Вестник Ивановского государственного университета

Серия «Биология, Химия, Физика, Математика»

Вып. 3 / 2008 С. 63 – 80

А. С. Белов

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНОСТИ ВСЕХ ЧАСТНЫХ СУММ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОГО РЯДА В ОКРЕСТНОСТИ НУЛЯ

Изучаются условия положительности всех частных сумм тригонометрического ряда с монотонными коэффициентами в некоторой окрестности нуля. Излагается один из эффективных способов доказательства положительности всех частных сумм косинус-ряда.

The conditions of positiveness in some neighborhood of zero of all partial sums of trigonometrical series with monotone coefficients are investigated. One of the effective ways of proof of positiveness of all partial sums of a cosine-series are presented.

Ключевые слова: тригонометрические ряды, положительность частных сумм.

УДК 517.5.

Введение

Основным объектом исследования в этой статье является тригонометрический ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx)\,, \tag{1}$$

где последовательность действительных чисел $a = \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяет условиям

$$a_n \geqslant 0 \quad \text{и} \quad a_n \geqslant a_{n+1} \quad \text{при} \quad n \geqslant 1\,, \quad 2a_0 \geqslant a_1\,, \quad a_0 > 0\,. \tag{2}$$

Для последовательности a при всех $t \in [0\,, +\infty)$ определены функции

$$a(t) = a(a;t) = \begin{cases} 2a_0 & \text{при } \ t \in [0, 1/2)\,, \\ a_n & \text{при } \ t \in [n-1/2, n+1/2)\,,\ n \geqslant 1\,, \end{cases} \tag{3}$$

$$M(x) = M(a;x) = \int_0^{3\pi/(2x)} a(t)\,\cos(tx)\,dt\,, \qquad x > 0\,, \tag{4}$$

и

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 08–01–00302)

$$M_4(x) = M_4(a;x) = \int_0^{7\pi/(2x)} a(t)\,\cos(tx)\,dt\,, \qquad x > 0\,, \tag{5}$$

причем буква a обозначает и последовательность, и функцию (3), чтобы подчеркнуть их тесную связь. Условие (2) означает, что функция (3) неотрицательна и не возрастает на промежутке $[0\,,+\infty)$ и $a(0) > 0$. При всех целых неотрицательных n и действительных x через

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\,\cos(kx) \tag{6}$$

обозначим частные суммы ряда (1) и пусть

$$\begin{aligned} V_n(x) &= 2\,\sin\Big(\frac{x}{2}\Big) S_n(x) - a_{n+1}\,\Big(1 + \sin\Big(\,\Big(n + \frac{1}{2}\Big)\,x\,\Big)\Big) = \\ &= 2\,\sin\Big(\frac{x}{2}\Big) S_{n+1}(x) - a_{n+1}\,\Big(1 + \sin\Big(\,\Big(n + \frac{3}{2}\Big)\,x\,\Big)\Big)\,. \end{aligned} \tag{7}$$

Функция (4) и полиномы (7) для всех целых $n \geqslant 0$ связаны между собой (см. [4, лемма 2.2]) равенством

$$x\,M(x) = V_n(x) \quad \text{при всех} \quad x \in \Big[\,\frac{3\pi}{2n+3}\,,\frac{3\pi}{2n+1}\,\Big]\,. \tag{8}$$

При всех положительных x определим также функцию

$$s_2(x) = s_2(a;x) = S_{[3\pi/(2x)]}(x)\,, \tag{9}$$

причем в (9) и всюду далее квадратные (фигурные) скобки означают целую (дробную) часть числа, заключенного в них.

Введенные выше обозначения, связанные с последовательностью $a = \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, используются на протяжении всей этой статьи.

Важность функции (4) для изучения частных сумм ряда (1) на положительность видна из следующей теоремы (см. [4, теоремы 3.1 и 1.1]).

Теорема A. *Пусть последовательность $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяет условиям (2). Тогда, если в некоторой точке $x \in (0,\pi]$ значение функции $M(x) > 0$, то*

$$S_n(x) > 0 \qquad \text{при всех} \qquad n \geqslant 0\,. \tag{10}$$

В частности, если

$$M(x) > 0 \qquad \text{при всех} \qquad x \in (0\,,\pi)\,, \tag{11}$$

то (10) верно при всех $x \in [0\,,\pi)$.

При изучении функции (4) оказывается полезной функция

$$A(v) = A(a;v) = \int_0^{v} a(t)\,dt\,, \qquad v \geqslant 0\,. \tag{12}$$

Условие (2) означает, что функция

$$\frac{A(v)}{v} = \int_0^1 a(vt)\,dt\,, \qquad v \geqslant 0\,, \tag{13}$$

не возрастает на промежутке $[0\,,+\infty)$, причем при $v = 0$ функция (13) считается определенной по непрерывности и равна $a(0)$. Отметим, что при любом $x > 0$ справедливо (см. [4, формула (2.10)]) равенство

$$M(x) = x \int_0^{3\pi/(2x)} A(t)\,\sin(tx)\,dt\,. \tag{14}$$

В статьях [1, 4] изложены основные идеи нового метода доказательства неотрицательности всех частных сумм ряда (1), коэффициенты которого удовлетворяют условиям (2). Суть предлагаемого нового метода доказательства неотрицательности частных сумм ряда (1) состоит в изучении вместо сумм (6) функций (4), (9), (5), как это описано в [1], и прежде всего в изучении знака функции (4) в окрестности нуля, т. е. в доказательстве того, что существует точка $x_0 \in (0\,,\pi]$, для которой

$$M(x) > 0 \qquad \text{при всех} \quad x \in (0\,, x_0)\,. \tag{15}$$

На остальной части промежутка $(0\,,\pi]$ функция (4) изучается на основе равенств (8) и (7).

Основная цель этой статьи — изучить условия на последовательность $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, которые гарантируют существование точки $x_0 \in (0\,,\pi]$, для которой справедливо (15), а также указать эффективные способы нахождения этой точки x_0.

Верна следующая

Теорема B. *Пусть последовательность неотрицательных чисел* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *не возрастает и для некоторого натурального* m *выполнены условия* $\sum_{k=0}^{m-1} a_k \geqslant \sum_{k=m}^{3m-2} a_k\,, \quad 2a_n \geqslant 3a_{3n-1}$ *при всех* $n \geqslant m$ *и*

$$\Delta a_{2m-2-k} + \Delta a_k \geqslant \Delta a_{2m-1+k} \qquad \text{при всех} \quad k = 1, \ldots, m-2\,, \tag{16}$$

где $\Delta a_n = a_n - a_{n+1}$. *Тогда* $M(x) > 0$ *при всех* $x \in (0\,,\pi/(2m-1)\,)$.

Доказательство этой теоремы приведено в [1] как следствие теоремы 4 сразу после ее формулировки. При $m = 1$ и $m = 2$ условие (16) считается выполненным. Теорема B — это один из простых результатов, позволяющий установить справедливость (15) при $x_0 = \pi/(2m-1)$.

Пусть далее $\alpha \in (0,1)$ обозначает (см. [5, с. 307] и [2]) единственное число, которое удовлетворяет уравнению

$$\int_0^{3\pi/2} t^{-\alpha}\,\cos t\,dt = 0\,. \tag{17}$$

В § 1 изучается связь между функциями (4) и (9). Здесь, в частности, доказывается

Теорема 1. *Пусть последовательность* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *удовлетворяет условиям* (2). *Тогда справедливы неравенства*

$$2\,\sin\Bigl(\frac{x}{2}\Bigr)s_2(x) \geqslant xM(x) \qquad \text{при всех} \quad x>0\,, \tag{18}$$

$$2\,\sin\Bigl(\frac{x}{2}\Bigr)s_2(x) - xM(x) \leqslant 2a\Bigl(\,\frac{3\pi}{2x}\,\Bigr)\,\sin^2\Bigl(\,\frac{x}{4}\,\Bigr) \quad \text{при} \ \ x\in(0\,,3\pi]\,, \tag{19}$$

и при всех $\gamma\in[0\,,1)$ *верны равенства*

$$\varliminf_{x\to+0}\ \frac{s_2(x)}{x^{\gamma}} = \varliminf_{x\to+0}\ \frac{M(x)}{x^{\gamma}} \qquad \text{и} \qquad \varlimsup_{x\to+0}\ \frac{s_2(x)}{x^{\gamma}} = \varlimsup_{x\to+0}\ \frac{M(x)}{x^{\gamma}}\,. \tag{20}$$

Более того, если $a_n=O(n^{-\alpha})$, *то равенства* (20) *верны при всех* $\gamma\in[0\,,1+\alpha)$. *В частности, если функция* $s_2(x)$ *неотрицательна в некоторой правой окрестности нуля или даже* $\varliminf_{x\to+0} x^{-\gamma}\,s_2(x)\geqslant 0$ *при некотором* $\gamma\in[0\,,1+\alpha)$, *то* $a_n=O(n^{-\alpha})$ *и*

$$\varliminf_{x\to+0}\ x^{-\gamma}\,M(x)\geqslant 0\,. \tag{21}$$

В §1 также изложен результат о поведении функции (4) в том случае, когда коэффициенты ряда (1) являются функциями некоторого параметра λ, изменяющегося в некотором интервале I, т. е. когда $a=a(\lambda)=\{a_n(\lambda)\}_{n=0}^{\infty}$. Например, как следствие этого результата получена

Лемма 1. *Пусть* $a_0=a_0(\lambda)=1/(1+\lambda)$, $a_n=a_n(\lambda)=1/(n+\lambda)$ *при всех* $n\geqslant 1$. *Тогда если при некоторых* $x\in(0\,,\pi]$ *и* $\lambda_0\in(-1\,,+\infty)$ *значение функции* $M(a(\lambda_0);x)>0$, *то*

$$M(a(\lambda);x)>0 \qquad \text{при всех} \quad \lambda\in(-1\,,\lambda_0]\,. \tag{22}$$

В частности, (22) *верно при* $\lambda_0=5$ *и всех* $x\in(0\,,\pi/7\,)$.

Отметим, что если частные суммы ряда (1) с условием (2) на коэффициенты неотрицательны в некоторой правой окрестности нуля, то функция (9) неотрицательна в этой окрестности нуля, а отсюда по теореме 1 следует, что в этом случае выполнено условие (21). Таким образом, условие (21) необходимо для неотрицательных частных сумм ряда (1) в некоторой правой окрестности нуля. Более того, если $\lim_{x\to+0} x^{-\gamma}\,M(x)<0$ при некотором $\gamma\in[0\,,1)$, то в силу (20) существует такая точка $y_0\in(0\,,\pi]$, что

$$s_2(x)<0 \qquad \text{при всех} \quad x\in(0\,,y_0)\,. \tag{23}$$

Поскольку в силу (9)

$$s_2\Bigl(\,\frac{3\pi}{2n}\,\Bigr) = S_n\Bigl(\,\frac{3\pi}{2n}\,\Bigr) = S_{n-1}\Bigl(\,\frac{3\pi}{2n}\,\Bigr) \qquad \text{при всех} \quad n\geqslant 1\,, \tag{24}$$

то из (23) вытекает существование такого натурального числа n_0, что $S_n(\,3\pi/(2n)\,)<0$ при всех $n\geqslant n_0$. В частности, если

$$M(x)\to-\infty \qquad \text{при} \quad x\to+0\,, \tag{25}$$

то из (20) и (24) следует, что $S_n(\,3\pi/(2n)\,) \to -\infty$ при $n \to \infty$. Если же

$$\varliminf_{x\to+0} x^{-\gamma} M(x) > 0 \tag{26}$$

при некотором $\gamma \in [0\,,+\infty)$, то, очевидно, существует точка $x_0 \in (0\,,\pi]$, для которой верно (15). Поэтому для каждого конкретного примера ряда (1) важно установить (26) прежде, чем начать исследовать его частные суммы на неотрицательность. Именно это и изучается в § 2. Здесь получены следующие результаты.

Теорема 2. *Пусть последовательность $a = \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяет условиям (2) и существуют такие числа $\theta > 0$ и $\gamma \in [0\,,1)$, что*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big|\, a_n - \frac{\theta}{n^{\gamma}}\, \Big| < \infty\,. \tag{27}$$

Тогда при $\gamma > \alpha$ функция

$$M(x) \to +\infty \qquad \text{при} \qquad x \to +0 \tag{28}$$

и существует такая точка $x_0 \in (0\,,\pi]$, для которой верно (15). Если же $\gamma < \alpha$, то

$$s_2(x) \to -\infty \qquad \text{при} \qquad x \to +0 \tag{29}$$

и существует такая точка $y_0 \in (0\,,\pi]$, для которой справедливо (23).

Теорема 3. *Пусть последовательность $a = \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяет условиям (2). Тогда, если существует такое число $\theta \geqslant 0$, что*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big|\, a_n - \frac{\theta}{n^{\alpha}}\, \Big| < \infty\,, \tag{30}$$

то

$$\lim_{x\to+0} M(x) = \lim_{x\to+0} s_2(x) = \int_0^{\infty} \Big(a(t) - \frac{\theta}{t^{\alpha}}\Big)\, dt\,. \tag{31}$$

Более того, если предел в (31) положителен, то существует такая точка $x_0 \in (0\,,\pi]$, для которой верно (15). Если же предел в (31) отрицателен, то существует такая точка $y_0 \in (0\,,\pi]$, для которой справедливо (23). В частности, если

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty\,, \tag{32}$$

то

$$\lim_{x\to+0} M(x) = \lim_{x\to+0} s_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \tag{33}$$

и существует такая точка $x_0 \in (0\,,\pi]$, для которой верно (15).

Теорема 4. *Пусть последовательность* $a = \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *удовлетворяет условиям* (2), *выполнено* (*см.* (17)) *условие*

$$\sup_{n\geqslant 1}\Big(\Big(n+\frac{1}{2}\Big)a_n-(1-\alpha)\sum_{k=1}^{n}a_k\Big)<\infty \tag{34}$$

и

$$D_m=\sup_{n\geqslant m}\Big(\frac{(n+1/2)}{(1-\alpha)}\,a_n-\sum_{k=0}^{n}a_k\Big)\quad \text{при}\quad m\geqslant 1\,. \tag{35}$$

Тогда для любого натурального m *функция* $t^{\alpha-1}\,(A(t)+D_m)$ *не возрастает при* $t\geqslant m-1/2$, *при всех*

$$x\in(0\,,\,3\pi/(2m-1)\,] \tag{36}$$

верна оценка

$$M(x)\geqslant\frac{2}{x}\,\sin\Big(\frac{x}{2}\Big)\,S_{m-1}(x)-D_m-\sum_{k=0}^{m-1}a_k \tag{37}$$

и

$$\varliminf_{x\to+0}M(x)\geqslant\sup_{m\geqslant 1}(-D_m)=\varliminf_{n\to\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}a_k-\frac{(n+1/2)}{(1-\alpha)}\,a_n\Big)\,. \tag{38}$$

Из теоремы 4, в частности, вытекают такие следствия.

Следствие 1. *Пусть последовательность* $a = \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *удовлетворяет условиям* (2). *Тогда, если*

$$\varliminf_{n\to\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}a_k-\frac{(n+1/2)}{(1-\alpha)}\,a_n\Big)>0\,, \tag{39}$$

то

$$\varliminf_{x\to+0}M(x)>0 \tag{40}$$

и существует такая точка $x_0\in(0\,,\pi]$, *для которой верно* (15). *Более того, если*

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{k=1}^{n}a_k-\frac{(n+1/2)}{(1-\alpha)}\,a_n\Big)=\infty\,, \tag{41}$$

то верно (28).

Следствие 2. *Пусть последовательность* $a = \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *удовлетворяет условиям* (2),

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=+\infty \tag{42}$$

и выполнено условие

$$\varlimsup_{n\to\infty}\,(n+1/2)\,a_n\,\Big(\sum_{k=0}^{n}a_k\Big)^{-1}<1-\alpha\,, \tag{43}$$

то верно утверждение (28).

Сформулированные теоремы дают полный ответ на вопрос о поведении функции (4) в правой окрестности нуля в простейших случаях, например, когда выполнено условие (39). В § 3 для случая, когда последовательность a удовлетворяет условию (43), изложен один из простейших эффективных способов нахождения точки $x_0 \in (0\,, \pi]$, для которой выполнено условие (15).

При всех $v \in (\,0\,,\,3\pi/2\,]$ и $\gamma \in (\,-\infty\,,\,1\,]$ положим

$$\varphi(v,\gamma) = v^{-\gamma} \int_0^v t \sin t\, dt + \int_v^{3\pi/2} t^{1-\gamma} \sin t\, dt\,. \tag{44}$$

Пусть

$$\varphi(0,\gamma) = \int_0^{3\pi/2} t^{1-\gamma} \sin t\, dt \quad \text{при} \quad \gamma \leqslant 1\,. \tag{45}$$

Так определенная функция двух переменных $\varphi(v,\gamma)$ непрерывна при $v \in [\,0\,,\,3\pi/2\,]$, $\gamma \in (\,-\infty\,,\,1\,]$. В § 3 будет показано, что для всех $\gamma \in [\alpha\,,1\,]$ существует единственное значение $v = v_1(\gamma) \in [0,\pi]$ такое, что $\varphi(v_1(\gamma),\gamma) = 0$, причем $v_1(\alpha) = 0$, $v_1(1) = \pi$. Функция $v_1(\gamma)$ строго возрастает и непрерывна на отрезке $[\alpha\,,1]$, и обратная к ней функция $\gamma_1(v)$ непрерывна и строго возрастает на отрезке $v \in [0\,,\pi]$, $\gamma_1(0) = \alpha$, $\gamma_1(\pi) = 1$. Функции $v_1(\gamma)$ и $\gamma_1(v)$ легко табулируются в программе “Maple”. Например:

$\gamma_1(\pi/2) = 0{,}364391822425\ldots$, $\quad\gamma_1(\pi/3) = 0{,}326234147356\ldots$,
$\gamma_1(\pi/4) = 0{,}316550243518\ldots$, $\quad\gamma_1(\pi/5) = 0{,}312875221697\ldots$,
$\gamma_1(\pi/6) = 0{,}311153884145\ldots$, $\quad\gamma_1(\pi/8) = 0{,}309692943604\ldots$,
$v_1(1/3)/\pi = 0{,}376275920084\ldots$, $\quad v_1(5/16)/\pi = 0{,}1935516881804\ldots$.

Теорема 5. *Пусть последовательность* $a = \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *удовлетворяет условиям* (2) *и для некоторого* $\gamma \in (\alpha\,,1)$ *найдется такое натуральное число* m, *что выполнено условие*

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \geqslant \frac{(n+1/2)}{(1-\gamma)}\, a_n \quad \textit{при всех} \quad n \geqslant m\,. \tag{46}$$

Тогда верны оценки

$$M(x) > 0 \quad \textit{при всех} \quad x \in \Big(\,0\,,\ \frac{v_1(\gamma)}{m-1/2}\Big]\,, \tag{47}$$

$$M(x) \geqslant \pi^{\gamma-1} A\Big(\frac{\pi}{x}\Big)\,\varphi\Big(x\Big(m-\frac{1}{2}\Big),\gamma\Big) \quad \textit{при} \quad x \in \Big(\,0\,,\ \frac{v_1(\gamma)}{m-1/2}\Big]\,. \tag{48}$$

Более того, в этом случае функция $M(x)$ *в окрестности нуля имеет порядок* $A(\,\pi/x\,)$, *а если к тому же выполнено условие* (42), *то верно* (28).

Таким образом, если выполнено условие (43), а значит, и (46) при некоторых $\gamma \in (\alpha\,,1)$ и $m \geqslant 1$, то теорема 5 позволяет сразу указать значение $x_0 = v_1(\gamma)/(m-1/2)$, для которого верно (15). Например, при $\gamma = 1/3$ можно взять $x_0 = 3\pi/(8m-4)$. В частности, при $\gamma = 1/3$ и $m = 2$

можно взять $x_0 = \pi/4$. Если $\gamma = 0{,}365$, то $v_1(\gamma) > \pi/2$, и поэтому можно взять $x_0 = \pi/(2m-1)$.

Заметим, что в своем общем виде предлагаемый нами метод применим к изучению частных сумм рядов вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos((n+\theta)\,x+\psi)\,,$$

где θ и ψ – произвольные действительные числа, а последовательность неотрицательных чисел $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ не возрастает, начиная с некоторого номера. В этом случае при $\psi \in [0\,,\pi/2)$ роль числа α играет (см. [3, теорема 2]) единственное число $\alpha_\psi \in (0\,,1)$, которое удовлетворяет уравнению $\int_0^{3\pi/2-\psi} t^{-\alpha_\psi}\,\cos(t+\psi)\,dt = 0$. Но ради большей ясности идеи метода мы предпочитаем изложить сначала на примере рядов вида (1).

Перейдем теперь к доказательствам сформулированных выше результатов.

§ 1. О связи между функциями $M(x)$ и $s_2(x)$

Функции $M(x)$ и $s_2(x)$ являются важнейшими функциями, которые нужно изучить в интервале $(0\,,\pi)$ при исследовании частных сумм тригонометрического ряда (1) на неотрицательность. Из (7), (8) и (9) видим, что для всех целых чисел $n \geqslant 0$ функции $s_2(x) = S_n(x)$,

$$2\,\sin\Bigl(\frac{x}{2}\Bigr)s_2(x) - xM(x) = a_{n+1}\left(1-\cos\Bigl(\frac{3\pi-(2n+1)\,x}{2}\Bigr)\right) \qquad (1.1)$$

при всех $x \in \left[\,\frac{3\pi}{2n+2}\,,\frac{3\pi}{2n+1}\,\right]$ и $s_2(x) = S_{n+1}(x)$,

$$2\,\sin\Bigl(\frac{x}{2}\Bigr)s_2(x) - xM(x) = a_{n+1}\left(1-\cos\Bigl(\frac{(2n+3)\,x-3\pi}{2}\Bigr)\right) \qquad (1.2)$$

при всех $x \in \left[\,\frac{3\pi}{2n+3}\,,\frac{3\pi}{2n+2}\,\right]$.

Доказательство теоремы 1. Из (2), (1.1) и (1.2) сразу вытекает (18) при $x \leqslant 3\pi$. При $x > 3\pi$ неравенство (18) очевидно, поскольку тогда $s_2(x) = a_0$, $x\,M(x) = -2a_0$. Пусть целое $n \geqslant 0$. При $x \in \left[\,\frac{3\pi}{2n+2}\,,\frac{3\pi}{2n+1}\,\right]$ имеем $0 \leqslant 3\pi-(2n+1)\,x \le \min(\,x\,,4\pi-x\,)$ и (19) вытекает из (1.1). Если же $x \in \left[\,\frac{3\pi}{2n+3}\,,\frac{3\pi}{2n+2}\,\right]$, то $0 \leqslant (2n+3)\,x-3\pi \leqslant x$ и (19) вытекает из (1.2). Из (18) и (19) следует (20). Из ограниченности снизу функции $s_2(x)$ вытекает (см. [3, теорема 1], или [2, теорема 2]), что $a_n = O(n^{-\alpha})$. Теорема 1 доказана.

Теорему 1 дополняет следующая

Лемма 1.1. *Пусть последовательность* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *удовлетворяет условиям* (2). *Тогда*

$$2\,\sin\Bigl(\frac{x}{2}\Bigr)s_2(x) = x\int_0^{d(x)} a(t)\,\cos(tx)\,dt \qquad \textit{при всех} \quad x \in (0\,,6\pi]\,, \qquad (1.3)$$

где $d(x) = 3\pi/(2x) - |1/2 - \{3\pi/(2x)\}|$, *и справедливы оценки*

$$\Big|\, \frac{\sin(x/2)}{(x/2)}\, s_2(x) \,\Big| \leqslant A\Big(\frac{3\pi}{2x}\Big) \leqslant \frac{3}{2}\, A\Big(\frac{\pi}{x}\Big) \leqslant 3\, A\Big(\frac{\pi}{2x}\Big) \ \text{\textit{при всех}}\ x > 0\,, \quad (1.4)$$

и

$$\Big|M(x)\Big| \leqslant A\Big(\frac{3\pi}{2x}\Big) \leqslant \frac{3}{2}\, A\Big(\frac{\pi}{x}\Big) \leqslant 3\, A\Big(\frac{\pi}{2x}\Big) \quad \text{\textit{при всех}} \quad x > 0\,. \qquad (1.5)$$

Доказательство. Если $x \in \big(\, \frac{3\pi}{2n+2}\,, \frac{3\pi}{2n+1}\,\big]$, $n \geqslant 0$, то $\{3\pi/(2x)\} = 3\pi/(2x) - n$, $d(x) = n + 1/2$, и из (1.1) получаем

$$2\, \sin\Big(\frac{x}{2}\Big) s_2(x) - xM(x) = a_{n+1}\, \Big(1 - \cos\Big(\, x \,\Big|\frac{1}{2} - \Big\{\frac{3\pi}{2x}\Big\}\Big|\,\Big)\,\Big) =$$
$$= -xa\Big(\frac{3\pi}{2x}\Big) \int_{d(x)}^{3\pi/(2x)} \cos(tx)\, dt\,, \qquad (1.6)$$

т. е. в силу (4) равенство (1.3) верно. Если $x \in \big[\, \frac{3\pi}{2n+3}\,, \frac{3\pi}{2n+2}\,\big]$, $n \geqslant 0$, то $\{3\pi/(2x)\} = 3\pi/(2x) - (n+1)$, $d(x) \geqslant n + 1/2$, и из (1.2) снова имеем (1.6), а значит, и (1.3). При $x > 3\pi$ равенство (1.3) очевидно. Из (12) и доказанного равенства (1.3) при $x \in (0\,, 3\pi]$ получаем

$$\Big|2\, \sin\Big(\frac{x}{2}\Big) s_2(x)\Big| \leqslant x \int_0^{d(x)} a(t)\, dt \leqslant x\, A\Big(\frac{3\pi}{2x}\Big)\,,$$

причем при $x \geqslant 3\pi$ последняя оценка очевидна. Из (4) и (12) при $x > 0$ также видим, что $|M(x)| \leqslant A(3\pi/(2x))$. Осталось заметить, что поскольку функция (13) не возрастает на промежутке $(0, \infty)$, то $A(3\pi/2x) \leqslant \frac{3}{2}\, A(\pi/x) \leqslant 3\, A(\pi/2x)$ и оценки (1.4), (1.5) получены. Лемма 1.1 доказана.

Заметим, что (1.4) и (1.5) дают очевидные оценки сверху для функций $M(x)$ и $s_2(x)$, которые будут полезны далее при выявлении порядка этих функций в окрестности нуля.

Для последовательности $a = \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ определены функции $a(t)$, $A(t)$, $s_2(x)$, $M(x)$ и так далее. Часто коэффициенты $a_n = a_n(\lambda)$ являются функциями от некоторого параметра λ , изменяющегося в некотором промежутке I . В этом случае соответствующие функции для последовательности $a = a(\lambda) = \{a_n(\lambda)\}_{n=0}^{\infty}$ будем обозначать $a(\lambda, t) = a(a(\lambda); t)$, $M(\lambda, x) = M(a(\lambda); x)$ и так далее. При изучении этих функций оказывается полезной следующая

Теорема 1.1. *Если при изменении* λ *в некотором интервале* I *функции* $\{a_n(\lambda)\}_{n=0}^{\infty}$ *положительны, удовлетворяют условиям* $a_n(\lambda) \geqslant a_{n+1}(\lambda)$ *при* $n \geqslant 1$, $2a_0(\lambda) \geqslant a_1(\lambda)$, *при каждом* $n \geqslant 0$ *функции* $a_{n+1}(\lambda)/a_n(\lambda)$ *не убывают (не возрастают) при возрастании* λ *в интервале* I , *а функции* $a_2(\lambda)/a_1(\lambda)$ *строго возрастают (строго убывают) на* I , *то функция*

$$M(\lambda, x)/a(\lambda, \pi/(2x)) \qquad (1.7)$$

при каждом $x \in (0\,,\,\pi\,)$ строго убывает (строго возрастает) при возрастании λ на I .

Доказательство. Достаточно воспользоваться представлением

$$\frac{M(\lambda,x)}{a(\lambda,\pi/(2x))} = \int_0^{3\pi/(2x)} \frac{a(\lambda,t)}{a(\lambda,\pi/(2x))}\,\cos(tx)\,dt\,,$$

которое вытекает из (4), и заметить, что под интегралом стоит функция от λ, которая не возрастает (не убывает) при каждом $t \in (0\,,3\pi/(2x))$ и которая как функция от t различна при различных значениях λ. Теорема 1.1 доказана.

Доказательство леммы 1. Если $I = (-1,+\infty)$ и последовательность $a = a(\lambda)$ определена условиями леммы 1, то условия теоремы 1.1 выполнены. Поэтому функция (1.7) для каждого $x \in (0\,,\pi)$ строго убывает при возрастании λ на I. Отсюда получаем утверждение (22). В [1] сразу после формулировки теоремы 4 показано, что условия теоремы B в случае $\lambda = 5$ выполнены при $m = 4$ и, значит, $M(a(5);x) > 0$ при всех $x \in (0\,,\pi/7)$. Поэтому утверждение (22) верно для $\lambda_0 = 5$ при всех $x \in (0\,,\pi/7)$. Таким образом, чтобы доказать (22), требуется изучить только случай $\lambda = \lambda_0$. Лемма 1 доказана.

§ 2. Поведение функции $M(x)$ в правой окрестности нуля

Далее во всех утверждениях предполагаем, что последовательность $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяет условию (2).

Лемма 2.1. *Пусть на $(0\,,\,\infty\,)$ существует функция $b(t)$, интегрируемая на любом конечном интервале $(0\,,\,B\,)$, $B > 0$, такая, что*

$$\int_0^{\infty} |a(t)-b(t)|\,dt < \infty\,. \tag{2.1}$$

Тогда

$$\lim_{x\to+0}\Big(M(x) - \int_0^{3\pi/(2x)} b(t)\,\cos(tx)\,dt\Big) = \int_0^{\infty} (a(t)-b(t))\,dt \tag{2.2}$$

и

$$\lim_{x\to+0}\Big(M_4(x) - \int_0^{7\pi/(2x)} b(t)\,\cos(tx)\,dt\Big) = \int_0^{\infty} (a(t)-b(t))\,dt\,. \tag{2.3}$$

Доказательство. Из (4) и (2.1) при $x > 0$ и любом $B \geqslant 0$ имеем

$$\begin{aligned}
&\Big|M(x) - \int_0^{3\pi/(2x)} b(t)\,\cos(tx)\,dt - \int_0^{\infty} (a(t)-b(t))\,dt\Big| \leqslant \\
&\leqslant \int_0^{3\pi/(2x)} |a(t)-b(t)|\,2\sin^2\Big(\frac{tx}{2}\Big)\,dt + \\
&+ \int_{3\pi/(2x)}^{\infty} |a(t)-b(t)|\,dt \leqslant \int_0^{\infty} |a(t)-b(t)|\,\min\Big(2,\frac{t^2x^2}{2}\Big)\,dt \leqslant \\
&\leqslant \frac{x^2}{2}\int_0^{B} t^2\,|a(t)-b(t)|\,dt + 2\int_B^{\infty} |a(t)-b(t)|\,dt\,.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Беря здесь $B = 2\,x^{-1/2}$, получаем оценку

$$\Big|M(x) - \int_0^{3\pi/(2x)} b(t)\,\cos(tx)\,dt - \int_0^{\infty} (a(t) - b(t))\,dt\Big| \leqslant$$
$$\leqslant 2x \int_0^{2\,x^{-1/2}} |a(t) - b(t)|\,dt + 2 \int_{2\,x^{-1/2}}^{\infty} |a(t) - b(t)|\,dt\,,$$

правая часть которой стремится к нулю вместе с x . Этим (2.2) доказано. Если в этом доказательстве вместо $3\pi/(2x)$ и $M(x)$ подставим соответственно $7\pi/(2x)$ и $M_4(x)$, то получим (2.3). Лемма 2.1 доказана.

Напомним, что $\alpha \in (0,1)$ обозначает единственное число, которое удовлетворяет уравнению (17).

Доказательство теоремы 2. Положим в лемме 2.1, что $b(t) = \theta t^{-\gamma}$. Тогда при каждом натуральном n верна оценка

$$\int_{n-1/2}^{n+1/2} |a(t) - b(t)|\,dt = \int_{n-1/2}^{n+1/2} \Big|a_n - \frac{\theta}{t^\gamma}\Big|\,dt \leqslant$$
$$\leqslant \Big|a_n - \frac{\theta}{n^\gamma}\Big| + \frac{1}{2}\Big(\frac{\theta}{(n-1/2)^\gamma} - \frac{\theta}{(n+1/2)^\gamma}\Big)\,.$$

Поэтому

$$\int_0^{\infty} |a(t) - b(t)|\,dt \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \Big|a_n - \frac{\theta}{n^\gamma}\Big| + \theta\,2^{\gamma-1} + \int_0^{1/2} (2a_0 + b(t))\,dt$$

и в силу (27) выполнено условие (2.1). По лемме 2.1 существует конечный предел (2.2). Поскольку

$$\int_0^{3\pi/(2x)} b(t)\,\cos(tx)\,dt = \theta\,x^{\gamma-1} \int_0^{3\pi/2} t^{-\gamma}\,\cos t\,dt\,,$$

а последний интеграл отрицателен при $\gamma < \alpha$ и положителен при $\gamma \in (\alpha,1)$, то утверждения (28) и (15), а в силу (20), и (29), (25), (23) справедливы. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Полагая $b(t) = \theta t^{-\alpha}$ и $\gamma = \alpha$ в доказательстве теоремы 2, получаем (2.2). Отсюда из (17) и (20) вытекает (31). При $\theta = 0$ условие (32) совпадает с (30) и (31) совпадает с (33). Поскольку $a_0 > 0$, то предел в (33) положителен. Теорема 3 доказана.

Замечание 2.1. При условиях теоремы 3 в случае, когда предел в (31) $M(+0) > 0$, можно указать следующий конкретный способ подбора точки $x_0 \in (0\,,\pi]$, для которой верно (15). Возьмем любое положительное $\varepsilon \leqslant M(+0) = \int_0^\infty (a(t){-}b(t))\,dt$, где $b(t) = \theta t^{-\alpha}$. Найдем число $B = B(\varepsilon) \in [0,\infty)$ так, что $4\int_B^\infty |a(t){-}b(t)|\,dt < \varepsilon$. Затем найдем число $x_0 = x_0(\varepsilon, B) \in (0,\pi]$ так, что $x_0^2 \int_0^B t^2\,|a(t) - b(t)|\,dt \leqslant \varepsilon$. Тогда при $x \in (0\,,x_0]$ из оценки (2.4) имеем $|M(+0){-}M(x)| \leqslant \frac{x_0^2}{2}\int_0^B t^2\,|a(t){-}b(t)|\,dt{+}2\int_B^\infty |a(t){-}b(t)|\,dt < \varepsilon$. Отсюда сразу вытекает (15).

Лемма 2.2. *Пусть выполнено условие* (42) *и последовательность* $\{na_n\}_{n=1}^{\infty}$ *ограничена. Тогда верно* (28) *и существует такая точка* $x_0 \in (0\,,\pi]$, *для которой справедливо* (15).

Доказательство. По условию существует такое число $K_1 \in (0,\infty)$, что $na_n \leqslant K_1$ для всех $n \geqslant 1$. Тогда при $t \geqslant 1/2$ имеем

$$2ta(t) = 2ta_{[t+1/2]} \leqslant 3[t+1/2]a_{[t+1/2]} \leqslant 3K_1\,.$$

Поэтому $ta(t) \leqslant K = 3K_1/2$ при всех $t \geqslant 1/2$. Отсюда при $x \in (0\,,\pi]$ имеем

$$M(x) = \int_0^{\pi/(4x)} a(t)\,\cos(tx)\,dt + \int_{\pi/(4x)}^{3\pi/(4x)} \Big(a(t) - a\Big(\frac{\pi}{2x}\Big)\Big)\,\cos(tx)\,dt -$$
$$-\int_{3\pi/(4x)}^{3\pi/(2x)} a(t)|\cos(tx)|\,dt \geqslant 2^{-1/2}\int_0^{\pi/(4x)} a(t)\,dt -$$
$$-K\int_{3\pi/(4x)}^{3\pi/(2x)} \frac{|\cos(tx)|}{t}\,dt \geqslant 2^{-1/2}\,A\Big(\frac{\pi}{4x}\Big) - K\int_{3\pi/4}^{3\pi/2} \frac{|\cos t\,|}{t}\,dt\,.$$

В силу (42) получаем (28). Лемма 2.2 доказана.

Доказательство теоремы 4 и следствия 1. Возьмем любое натуральное число m и положим $g(t) = t^{\alpha-1}\,(A(t)+D_m)$ при $t \geqslant m-1/2$, $g(t) = g(m-1/2)$ при $t \in [0\,,\,m-1/2]$. При каждом натуральном n и $t \in [n-1/2\,,\,n+1/2]$ функция $ta_n - (1-\alpha)\,(A(t)+D_m)$ не убывает, поскольку ее производная равна $\alpha\,a_n$. Поэтому при всех $n \geqslant m$ справедливо неравенство $ta_n-(1-\alpha)\,(A(t)+D_m) \leqslant 0$, т. к. в силу (35) последнее неравенство выполнено при $t = n+1/2$. При $t \in [n-1/2\,,\,n+1/2]$ производная от функции $g(t)$ равна $t^{\alpha-2}\,(ta_n - (1-\alpha)\,(A(t)+D_m)) \leqslant 0$, если $n \geqslant m$. Следовательно, функция $g(t)$ не возрастает при $t \geqslant 0$. В случае (36) из равенства (14) и (4) в силу (17) получаем

$$M(x) = x\int_0^{3\pi/(2x)} \Big(g(t) - g\Big(\frac{\pi}{x}\Big)\Big)\,t^{1-\alpha}\,\sin(tx)\,dt +$$
$$+\int_0^{m-1/2} a(t)\,\cos(tx)\,dt -$$
$$-(1-\alpha)\,(m-1/2)^{\alpha-1}\,(D_m + A(m-1/2))\int_0^{m-1/2} t^{-\alpha}\,\cos t\,dt\,.$$

Первый интеграл в этом равенстве неотрицателен, а последний не превосходит $(m-1/2)^{1-\alpha}/(1-\alpha)$. Следовательно, верна оценка

$$M(x) \geqslant \int_0^{m-1/2} a(t)\,\cos(tx)\,dt - (D_m + A(m-1/2))\,,$$

которая совпадает с оценкой (37). Из (37) сразу следует (38). Поэтому (39) означает (40), а (41) влечет (28). Теорема 4 и следствие 1 доказаны.

Следствие 2.1. *Если выполнено условие*

$$\frac{2}{\pi}\,a_0 \geqslant \frac{(n+1/2)}{(1-\alpha)}\,a_n - \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad \textit{при} \qquad n \geqslant 1\,, \tag{2.5}$$

то верно утверждение (11) .

Доказательство. При $x \in (0\,,\pi]$ и $m = 1$ из (37) получаем $M(x) \geqslant \frac{2}{x}\,\sin\!\left(\frac{x}{2}\right) a_0 - D_1 - a_0 > \frac{2}{\pi}\,a_0 - (D_1 + a_0) \geqslant 0$. Следствие 2.1 доказано.

Следствие 2.2. *Если выполнено условие* (34)*, то существует вещественная постоянная* C *, такая, что для всех* x *и* $n \geqslant 0$ *верна оценка* $S_n(x) \geqslant -C$.

Доказательство. Увеличивая, если нужно, коэффициент a_0, добъемся того, что выполнено условие (2.5). Тогда по следствию 2.1 верно (11) и по теореме A все частные суммы ряда (1) неотрицательны на прямой. Следствие 2.2 доказано.

Отметим, что без доказательства следствие 2.2 было сформулировано нами в работе [3] (см. там утверждение 4).

Следствие 2.3. *Если* $a_0 \geqslant a_1$ *и выполнено условие*

$$\frac{3^{3/2}}{2\pi}\left(a_0 - \frac{1}{2}\,a_1\right) \geqslant \frac{(n+1/2)}{(1-\alpha)}\,a_n - \sum_{k=2}^{n} a_k \qquad \textit{при} \qquad n \geqslant 2\,, \tag{2.6}$$

то верно утверждение (11).

Доказательство. При $x \in (0, 2\pi/3)$ и $m = 2$ из (37) и (2.6) получаем

$$M(x) \geqslant \frac{2}{x}\,\sin\!\left(\frac{x}{2}\right)(a_0 + a_1\,\cos x) - (D_2 + a_0 + a_1) >$$
$$> \frac{3^{3/2}}{2\pi}\left(a_0 - \frac{1}{2}\,a_1\right) - (D_2 + a_0 + a_1) \geqslant 0\,.$$

В частности, $M(3\pi/5) > 0$. По теореме 3.2 из [4] получаем (11). Следствие 2.3 доказано.

Доказательство следствия 2. По условию (43) существует такое $\gamma \in (\alpha\,, 1)$ и такое натуральное m , что при всех $n \geqslant m$ справедлива оценка $(n+1/2)a_n \leqslant (1-\gamma)\,\sum_{k=0}^{n}\,a_k$, а значит, и оценка

$$\sum_{k=0}^{n} a_k - \frac{(n+1/2)}{(1-\alpha)}\,a_n \geqslant \left(\sum_{k=0}^{n}\,a_k\right)\left(1 - \frac{(1-\gamma)}{(1-\alpha)}\right).$$

Отсюда и из (42) вытекает (41), а значит, в силу теоремы 4, и (28). Следствие 2 доказано.

При условии леммы 2.2 условие (43) выполнено. Поэтому следствие 2 обобщает лемму 2.2. Таким образом, при условии (43) всегда существует такая точка $x_0 \in (0\,,\pi]$, для которой верно (15). В следующем параграфе будет указан эффективный способ нахождения такой точки x_0 в этом случае.

§ 3. Один из простых эффективных способов исследования частных сумм косинус-ряда на положительность в окрестности нуля

При всех $v \in [0\,,\, 3\pi/2]$ и $\gamma \in (-\infty\,,\, 1]$ определим непрерывную функцию двух переменных $\varphi(v,\gamma)$ равенствами (44) и (45). Тогда

$$\varphi(v,\gamma) = (1-\gamma)\int_0^{3\pi/2} t^{-\gamma}\cos t\,dt - \int_0^v t(t^{-\gamma} - v^{-\gamma})\sin t\,dt \tag{3.1}$$

при $\gamma < 1$, $\varphi(v,1) = \sin v/v$, $\varphi(v,0) = -1$,

$$\varphi(0,\gamma) = (1-\gamma)\int_0^{3\pi/2} t^{-\gamma}\cos t\,dt > 0 \quad \text{при} \quad \gamma \in (\alpha,1) \tag{3.2}$$

и $\varphi(0,\gamma) < 0$ при $\gamma < \alpha$. Из представления (3.1) видим, что при фиксированном $\gamma \in (0,1)$ функция $\varphi(v,\gamma)$ строго убывает по v на $(0\,,\,\pi\,]$, причем величина

$$\varphi(\pi,\gamma)\,\pi^{\gamma-1} = 1 + \int_\pi^{3\pi/2}\left(\frac{t}{\pi}\right)^{1-\gamma}\sin t\,dt\,,$$

как функция от γ, строго возрастает на $(-\infty\,,\,1\,)$ и $\varphi(\pi,1) = 0$. Поэтому $\varphi(\pi,\gamma) < 0$ при всех $\gamma \in (-\infty\,,\,1\,)$ и в силу (3.2) при всех $\gamma \in [\alpha\,,\,1\,]$ существует единственное значение $v = v_1(\gamma) \in [0,\pi]$ такое, что $\varphi(v_1(\gamma),\gamma) = 0$, причем $v_1(\alpha) = 0$, $v_1(1) = \pi$. При фиксированном $v \in (0,\pi)$ функция

$$\varphi(v,\gamma)\,\pi^\gamma = \left(\frac{\pi}{v}\right)^\gamma \int_0^v t\sin t\,dt +$$
$$+ \int_v^\pi \left(\frac{\pi}{t}\right)^\gamma t\sin t\,dt - \int_\pi^{3\pi/2}\left(\frac{t}{\pi}\right)^{-\gamma} t\,|\sin t|\,dt$$

от γ строго возрастает на $(-\infty\,,\,1\,]$. Поэтому при каждом $\gamma_0 \in (\,\alpha\,,\,1\,)$ величина $\varphi(v_1(\gamma_0),\gamma) > 0$ при всех $\gamma \in (\,\gamma_0\,,\,1\,]$ и $\varphi(v_1(\gamma_0),\gamma) < 0$ при всех $\gamma < \gamma_0$. Значит, функция $v_1(\gamma)$ строго возрастает при $\gamma \in [\,\alpha\,,\,1\,]$, непрерывна и обратная к ней функция $\gamma_1(v)$ непрерывна и строго возрастает на отрезке $v \in [\,0\,,\,\pi\,]$, $\gamma_1(0) = \alpha$, $\gamma_1(\pi) = 1$. Если $v \in (\,\pi\,,\,3\pi/2\,)$, то функция

$$\varphi(v,\gamma)\,v^\gamma = \int_0^v t\sin t\,dt - \int_v^{3\pi/2}\left(\frac{v}{t}\right)^\gamma t|\sin t|\,dt$$

строго возрастает по γ и $\varphi(v,1)\,v = \sin v$. Значит, $\varphi(v,\gamma) < 0$ при всех $v \in (\,\pi\,,\,3\pi/2\,]$ и $\gamma \leqslant 1$. Итак, $\varphi(v,\gamma) > 0$ тогда и только тогда, когда $v \in [\,0\,,\,\pi\,]$, $\gamma \in [\,\alpha\,,\,1\,]$, $v < v_1(\gamma)$, и, что то же самое, тогда и только тогда, когда $v \in [\,0\,,\,\pi\,]$, $\gamma \in [\,\alpha\,,\,1\,]$, $\gamma > \gamma_1(v)$. Функции $v_1(\gamma)$ и $\gamma_1(v)$ легко табулируются в программе “Maple”, в частности,
$v_1(0{,}3644) > \pi/2$, $v_1(1/3) > 3\pi/8$, $v_1(0{,}3129) > \pi/5$, $v_1(0{,}31) > \pi/8$.

Лемма 3.1. *Пусть последовательность* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *удовлетворяет условиям* (2) , m *— натуральное число и* $\gamma \in (\,\alpha\,,\,1\,)$. *Тогда для любого*

$$x \in (\,0\,,\,v_1(\gamma)/(m-1/2)\,]\,, \tag{3.3}$$

если функция $A(t)\,t^{\gamma-1}$ *не возрастает на отрезке* $[m-1/2, 3\pi/(2x)]$, *то* $M(x) > 0$. *В частности, если функция* $A(t)\,t^{\gamma-1}$ *не возрастает на промежутке* $[m-1/2, \infty)$, *то верны оценки* (47) , (48) *и*

$$\varliminf_{x\to+0} \frac{M(x)}{A(\,\pi/x\,)} \geqslant \pi^{\gamma-1}\varphi(0,\gamma)\,. \tag{3.4}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что при условии (3.3) величина $x\,(m-1/2) \leqslant v_1(\gamma) < \pi < 3\pi/2$. Положим $g(t) = A(t)t^{\gamma-1}$ при $t \geqslant m-1/2$, $g(t) = (m-1/2)^{\gamma}\,A(t)/t$ при $t \in [0, m-1/2]$. Тогда функция $g(t)$, в силу условий леммы 3.1 и невозрастания функции $A(t)/t$ при $t > 0$, не возрастает, положительна и непрерывна на отрезке $[0, 3\pi/(2x)]$. При любом $x > 0$ из равенства (14), (44) и (45) имеем

$$M(x) = x^{\gamma-1}\, g\Big(\frac{\pi}{x}\Big)\, \varphi\Big(x\,\Big(m-\frac{1}{2}\,\Big), \gamma\Big) +$$
$$+\, x \int_0^{3\pi/(2x)} \Big(\, g(t) - g\Big(\frac{\pi}{x}\Big)\,\Big)\ \sin(tx)\ t\ \min\Big(\,\Big(m-\frac{1}{2}\Big)^{-\gamma}, \, t^{-\gamma}\,\Big)\, dt\,.$$

Поскольку последний интеграл берется от неотрицательной функции, то справедлива оценка

$$M(x) \geqslant x^{\gamma-1}\, g\Big(\frac{\pi}{x}\Big)\, \varphi\Big(x\,\Big(m-\frac{1}{2}\,\Big), \gamma\Big)\,, \tag{3.5}$$

из которой сразу следует (48). Если $x\,(m-1/2) < v_1(\gamma)$, то величина, стоящая в правой части (3.5), положительна и поэтому $M(x) > 0$. Пусть теперь $x\,(m-1/2) = v_1(\gamma)$. Из (3.5) следует, что $M(x) \geqslant 0$. Предположим, что $M(x) = 0$. Тогда $g(t) - g(\pi/x) = 0$ при всех $t \in [0\,, 3\pi/(2x)]$. В частности, $A(t) = g(\pi/x)t^{1-\gamma}$ при $t \in [m-1/2\,, 3\pi/(2x)]$. Беря правую и левую производные от обеих частей этого равенства, получаем, что кусочно постоянная функция $a(t) = (1-\gamma)g(\pi/x)t^{-\gamma}$ при $t \in [m-1/2\,, 3\pi/(2x))$, а это противоречит положительности величины $g(\pi/x)$. Следовательно, и в этом случае $M(x) > 0$. Лемма 3.1 полностью доказана.

Как следствие леммы 3.1 мы получим теорему 5.

Доказательство теоремы 5. При натуральном n на отрезке $[n-1/2\,, n+1/2]$ функция $ta_n - A(t)(1-\gamma)$ имеет неотрицательную при $n \geqslant m$ производную γa_n . Поэтому в силу (46) функция $A(t)\,t^{\gamma-1}$ имеет на отрезке $[n-1/2\,, n+1/2]$, $n \geqslant m$, неположительную производную $(ta_n - A(t)(1-\gamma))\,t^{\gamma-2}$ и значит, не возрастает на этом отрезке. Таким образом, функция $A(t)\,t^{\gamma-1}$ не возрастает на промежутке $[m-1/2, \infty)$ и по лемме 3.1 верны оценки (47), (48) и (3.4). Отметим, что правая часть

(3.4) положительна. Отсюда и из оценки (1.5) следует, что порядок функции $M(x)$ в некоторой окрестности нуля совпадает с порядком функции $A(\pi/x)$. Теорема 5 доказана.

Теорема 5 эффективно решает задачу исследования знака функции (4) в окрестности нуля. Отметим также, что в случае, когда в (43) равенство, также имеются эффективные способы исследования знака функции (4) в окрестности нуля, которые в этой статье не рассматриваются.

Библиографический список

1. *Белов А. С.* Об одном методе доказательства неотрицательности всех частных сумм тригонометрического ряда // Вестн. Иван. гос. ун-та. 2007. Вып. 3. С. 60—71.
2. *Белов А. С.* О коэффициентах тригонометрических рядов с неотрицательными частичными суммами // Мат. заметки. 1987. Т. 41. № 2. С. 152—158.
3. *Белов А.С.* О коэффициентах тригонометрических косинус-рядов с неотрицательными частными суммами // Тр. МИАН СССР. 1989. Т. 190. М.: Наука, 1989. С. 3—21.
4. *Белов А. С.* О примерах тригонометрических рядов с неотрицательными частными суммами // Мат. сб. 1995. Т. 186. № 4. С. 21—46.
5. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. М.: Мир, 1965. Т. 1. 615 с.