Вестник Ивановского государственного университета

Серия «Биология, Химия, Физика, Математика»

Вып. 3 / 2008 С. 81 – 86

С. В. Колесников

О КЛАССАХ ФУНКЦИЙ ТИПА БЭРА НА КОМПАКТАХ СО СВЯЗНЫМ ДОПОЛНЕНИЕМ

По аналогии с классами Бэра определяются классы функций на компактах комплексной плоскости, имеющих связное дополнение. В качестве нулевого класса берется класс всех полиномов, а каждый последующий класс определяется как класс функций, являющихся поточечными пределами на компакте равномерно ограниченных последовательностей функций из предыдущих классов. Найдены необходимые и достаточные условия принадлежности функции таким классам.

Similary to Bair classes the classes of functions on compact with connected complement of complex plane are defined. For the class number zero the class of polinomials is taken. And every following class is defined as the class of functions being the pointwise limits on the compact of unifomly bounded sequences of functions from the precedings classes. Necessary and sufficient conditions of belonging to these classes are found.

Ключевые слова: классы Бэра, классы функций на компакте, поточечный предел многочленов.

УДК 517.5.

Пусть D — единичный круг $|z| < 1$, Γ — единичная окружность, E — некоторое множество на комплексной плоскости. Через $B_\alpha(E)$, где α — порядковое число первого или второго класса, будем обозначать классы Бэра. (Класс $B_0(E)$ — класс функций, каждая из которых непрерывна в некоторой окрестности множества E, а класс $B_\alpha(E)$ определяется как множество всех функций, представимых в виде поточечного предела на E последовательности функций, входящих в классы $B_\beta(E)$, $\beta < \alpha$.)

Определим классы $A_\alpha(E)$ следующим образом. Класс $A_0(E)$ определим как класс всех полиномов. Если классы $A_\beta(E)$ для всех порядковых чисел β, $\beta < \alpha$, уже определены, то класс $A_\alpha(E)$ содержит все функции, представимые на E в виде поточечных пределов равномерно ограниченных последовательностей функций, входящих в какие-то классы $A_\beta(E)$, $\beta < \alpha$.

Задача о характеризации класса $A_1(E)$, когда E есть замкнутый единичный круг, рассматривался М. В. Келдышем [3] и С. Н. Мергеляном и А. А. Талаляном [6]. Полное решение этой задачи было получено автором в работе [4].

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект 05-01-00962)

В 1986 г. А. Даниеляном [1] был охарактеризован класс $A_1(E)$, когда E — компакт на комплексной плоскости, имеющий связное дополнение.

Задача о характеризации всех классов $A_\alpha(E)$ для случая единичного круга рассмотрена автором в [5].

Ниже характеризуются классы $A_\alpha(E)$ для случая произвольного компакта со связным дополнением.

Пусть K — компакт на комплексной плоскости, имеющий связное дополнение; ∂K — его граница; K^0 — множество всех его внутренних точек; G_n, $n = 1, 2\ldots$, — связные компоненты K^0.

Так как дополнение к K связно, то G_n являются односвязными областями. Обозначим через $\varphi_n(z)$ конформное отображение единичного круга $D : |z| < 1$ на G_n, $n = 1, 2, \ldots$. По теореме Каратеодори, $\varphi_n(z)$ индуцирует взаимнооднозначное отображение точек единичной окружности на множество всех простых концов области G_n. Из связности дополнения к K следует, что для каждой области G_n существует не более счетного числа простых концов с носителями, содержащими более одной точки, и носители различных простых концов не пересекаются. Таким образом, каждая функция $\varphi_n(z)$, $n = 1, 2, \ldots$, продолжима до функции, непрерывной в каждой точке замкнутого единичного круга, за исключением не более чем счетного числа точек единичной окружности, а обратная функция $\varphi_n^{-1}(z)$ — до непрерывной функции на $\overline{G}_n$.

Обозначим через μ_n меру на ∂G_n, соответствующую при конформном отображении мере Лебега на окружности Γ, а через μ сумму $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n$. Будем говорить, что некоторое свойство выполняется почти всюду на границе ∂K, если оно выполняется всюду на ∂K, кроме некоторого множества нулевой μ-меры.

А. Даниеляном была доказана следующая теорема.

Теорема А. *Для того чтобы функция $f(z)$ принадлежала классу A_1 на компакте K, необходимо и достаточно, чтобы она принадлежала первому классу Бэра на K, была аналитической во внутренних точках K и функция $f(\varphi_n(z))$, почти всюду на Γ совпадала с ее граничными значениями, $n = 1, 2, \ldots$.*

Ниже доказывается следующая теорема.

Теорема 1. *Для того чтобы функция $f(z)$ принадлежала классу $A_\alpha(K)$ на компакте K со связным дополнением, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись два условия:*

1) $f(z)$ принадлежит соответствующему классу Бэра $B_\alpha(K)$,

2) функция $f(z)$ аналитична во внутренних точках компакта K и каждая функция $f(\varphi_n(z))$, $n = 1, 2, \ldots$, совпадает почти всюду на Γ с ее граничными значениями.

Последнее условие этой теоремы равносильно следующему условию (см. [1]): для любой комплекснозначной борелевской меры ν на компакте K, для которой

$$\int_K z^n d\nu(z) = 0, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

выполняется равенство

$$\int_K f(z)d\nu(z) = 0. \tag{1}$$

Для доказательства теоремы потребуется следующая лемма.

Лемма 1. *Если функция $F(z)$ принадлежит классу $A_\alpha(\overline{D})$, то функция $F(\varphi_n^{-1}(z))$ принадлежит классу $A_\alpha(\overline{G_n})$.*

Доказательство. Если функция $F(z)$ принадлежит $A_1(\overline{D})$, то существует последовательность функций $F_k(z)$, $k = 1, 2, \ldots$, непрерывных на $\overline{D}$ и аналитических в D, сходящаяся к $F(z)$ в каждой точке $z \in \overline{D}$. Так как функция $\varphi_n^{-1}(z)$ непрерывна на $\overline{G_n}$, то функции $F_k(\varphi_n^{-1}(z))$, $k = 1, 2, \ldots$, также непрерывны на $\overline{G_n}$ и аналитичны в G_n, т. е. $F(\varphi_n^{-1}(z)) = \lim_{k\to\infty} F_k(\varphi_n^{-1}(z))$ является функцией из $A_1(\overline{G_n})$.

Пусть лемма верна для всех порядковых чисел $\beta < \alpha$. Тогда найдется последовательность функций $F_k(z) \in A_{\beta_k}(\overline{G_n})$, $\beta_k < \alpha$, $k = 1, 2, \ldots$, такая, что $F(z) = \lim_{k\to\infty} F_k(z)$, $z \in \overline{D}$. По сделанному предположению сложная функция $F_k(\varphi_n^{-1}(z))$ принадлежит классу $A_{\beta_k}(\overline{G_n})$. Отсюда следует, что $F(\varphi_n^{-1}(z)) = \lim_{k\to\infty} F_k(\varphi_n^{-1}(z))$ принадлежит классу $A_\alpha(\overline{G_n})$.

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1.

Необходимость. Если $f \in A_\alpha(K)$, то очевидно $f \in B_\alpha(K)$. Также с помощью трансфинитной индукции доказывается, что выполняется (1), что равносильно второму условию теоремы.

Доказательство достаточности.

Случай $\alpha = 1$ содержится в теореме A. Докажем, что теорема верна и в случае $\alpha = 2$.

Пусть B пространство ограниченных функций f на K класса $B_1(K)$ с нормой $||f|| = \sup_{z\in K} |f(z)|$, а A — подпространство пространства B, состоящее из функций f, для которых $\int_K f(z)d\nu(z) = 0$, для всех мер ν, удовлетворяющих условию

$$\int_K z^n d\nu(z) = 0, \quad n = 0, 2, \ldots . \tag{2}$$

Так как равномерный предел последовательности функций класса не выше первого также является функцией не выше первого класса, то пространства B и A являются полными.

Рассмотрим факторпространство B/A, состоящее из классов $B_f = f + A$, $f \in B$, с нормой $||B_f|| = \inf_{g\in A} ||f - g||$.

Ограниченными линейными функционалами на B/A являются функционалы вида

$$\psi(B_f) = \int f(z)d\nu(z),$$

где борелевская мера ν удовлетворяет условию (2).

Пусть теперь $f(z)$ — функция класса B_2, удовлетворяющая условию теоремы, $f_n(z)$, $n = 1, 2, \ldots$, — равномерно ограниченная последовательность функций класса B_1, сходящаяся к $f(z)$ в каждой точке компакта K.

Если ν удовлетворяет условию (2), то

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n(z)d\nu(z)=\int f(z)d\nu(z)=0,$$

т. е. последовательность элементов B_{f_n} факторпространства B/A, слабо сходится к нулевому элементу. По теореме Мазура (см. [2, с. 173]) отсюда следует, что для любого $\varepsilon>0$ существует выпуклая линейная комбинация элементов B_{f_n} норма которой $<\varepsilon$, т. е. существуют такие $t_1,\dots,t_n>0$, $\sum_{k=1}^n t_k=1$, и функция $g\in A$, что

$$\Big|\sum_{k=1}^n t_kf_k(z)-g(z)\Big|<\varepsilon.$$

Отбросив первые n элементов последовательности f_k, $k=1,2,\dots$, выберем выпуклую линейную комбинацию $h_n(z)$ и функцию $g_n(z)\in A_1$, такие, что $|h_n(z)-g_n(z)|<1/n$, $n=1,2,\dots$. Тогда последовательность выпуклых линейных комбинаций $h_n(z)$, а значит, и последовательность $g_n(z)$ сходятся к функции $f(z)$, т.е. $f\in A_2(K)$.

Покажем, что всякую функцию $f\in A_\alpha(K)$ можно представить в виде суммы двух функций, одна из которых принадлежит классу $B_\alpha(K)$ и равна нулю всюду на K^0 и почти всюду на ∂K, а другая принадлежит классу $A_2(K)$.

Рассмотрим функцию $f_n(\varphi_n^{-1}(z))$. Как показано при доказательстве теоремы 2 из [4], существует функция $F_n(z)$ класса $A_2(\overline{D})$, почти всюду на Γ равная $f_n(\varphi_n^{-1}(z))$, $n=1,2,\dots$. По лемме 1 функция $F_n(\varphi_n(z))$ принадлежит классу $A_2(\overline{G_n})$.

Определим функцию $q(z)$ на K так, чтобы в каждой области G_n было $q(z)=f_n(z)$, а почти всюду на ее границе $F(z)$ была равна граничным значениям $f_n(z)$.

Заметим, что если границы двух областей G_n и G_m пересекаются, то их пересечение имеет нулевую меру μ_n или μ_m. В противном случае найдутся две точки $a,b\in(\partial G_n\cap\partial G_m)$, такие, что a является достижимой граничной точкой области G_n, а b — области G_m. Соединим точку a непрерывной кривой l_a, лежащей в G_n, с некоторой внутренней точкой a_0 области G_n и точку b кривой l_b с внутренней точкой b_0 области G_m.

Возьмем кривую γ_b в G_n с началом в точке a, приближающуюся к носителю простого конца области G_n, содержащему точку b и кривую γ_a в G_m с началом в точке b и с концом в простом конце области G_m, носитель которого содержит точку b.

Рассмотрим область, ограниченную кривыми l_a, l_b, γ_a и γ_b. Так как K имеет связное дополнение, то вся эта область содержится в K и пересекается с G_n и G_m, что противоречит их определению.

Положим $q(z)=f_n(z)$, если z внутренняя точка области G_n или принадлежит границе только этой области. Если точка z принадлежит пересечению $\partial G_n\cap\partial G_k$ и мера μ_n этого пересечения положительна, то положим $q(z)=F_n(\varphi_n(z))$. Если же мера μ_m положительна, то положим $q(z)=F_n(\varphi_m(z))$. Если для всех пересечений $\partial G_n\cap\partial G_k$ и обе меры равны нулю, то положим $q(z)=F_n(\varphi_n(z))$, где n — наименьший индекс, для которого $z\in\partial G_n$. Наконец, если z не принадлежит ни одному замыканию $\overline{G}_n$, $n=1,2,\dots$, то положим $q(z)=0$.

Функция, равная $q(z) = F_n(\varphi_m(z))$ на $\overline{G}_n$ и 0 в остальных точках, принадлежит классу $B_2(K)$. Отсюда, по построению, $\overline{G}_n$ можно представить в виде объединения не более чем счетного числа замкнутых множеств и одного множества типа G_δ, таких, что на каждом из них функция $q(z)$ совпадает с функцией из класса $B_2(K)$. Нетрудно доказать, что в этом случае функция $q(z)$ является функцией из $B_2(\overline{G}_n)$. Так как в точках, не принадлежащих замыканиям $\overline{G}_n$, $n = 1, 2, \ldots$, функция q равна 0, то $q \in B_2(z)$.

По построению, функция $q(z)$ удовлетворяет условию 2) теоремы 1. Поэтому, по доказанному выше случаю, она принадлежит классу $A_2(K)$. Разность $p(z) = f(z) - q(z)$ почти всюду равна нулю и принадлежит $B_\alpha(K)$.

Для доказательства теоремы 1 остается показать, что любая функция $p(z)$ из класса $B_\alpha(K)$, отличная от нуля лишь на некотором множестве нулевой μ-меры, принадлежит классу $A_\alpha(K)$. Докажем это с помощью трансфинитной индукции.

Для случая $\alpha = 2$ это имеет место.

Пусть это верно для всех порядковых чисел, меньших α. Возьмем множество E типа G_δ нулевой μ-меры, вне которого $p(z) = 0$, и пусть $p_n(z)$ — равномерно ограниченная последовательность функций классов $B_\beta(K)$, сходящаяся на K к $p(z)$. Характеристическая функция $\chi(z)$ принадлежит классу $A_2(K)$, поэтому произведения $\chi(z)p_n(z)$ принадлежат или тому же классу, что и функция p_n, или классу $A_2(K)$, т. е. принадлежат классам $A_\beta(K)$, $\beta < \alpha$. Таким образом, функция $p(z) = \lim_{n\to\infty} \chi(z)p_n(z)$ есть функция класса $A_\alpha(K)$.

Теорема доказана.

Библиографический список

1. *Даниелян А. А.* О представлении функций последовательностями равномерно ограниченных полиномов на компактных множествах комплексной плоскости // Изв. АН Арм. ССР. 1986. Т. 21. № 4. С. 345—357.
2. *Иосида К.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1987. 624 с.
3. *Келдыш М. В.* О последовательностях полиномов, ограниченных в совокупности // Мат. сб. 1935. Т. 42. С. 719—724.
4. *Колесников С. В.* Об одной теореме М. В. Келдыша, касающейся поточечной сходимости полиномов // Там же. 1984. Т. 124(166). № 4(8). С. 568—570.
5. *Колесников С. В.* О классификации типа Бэра граничных значений аналитических функций // Вестн. Иван. гос. ун-та. 2000. Вып. 3. С. 122—128.
6. *Мергелян С. Н., Талалян А. А.* Об одном классе точечно-разрывных функций // ДАН Арм. ССР. 1961. Т. 32. № 4. С. 183—187.