Вестник Ивановского государственного университета

Серия «Биология, Химия, Физика, Математика»

Вып. 3 / 2008 С. 95 – 113

М. Е. Лузина, С. В. Пухов

О МЕТОДЕ НЬЮТОНА — ЧЕБЫШЁВА ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

Получены явные формулы для численного решения нелинейных 2×2-систем методом Ньютона — Чебышёва второго порядка. Сходимость метода исследуется с использованием рекуррентных соотношений.

In this article the explicit formulas for numerical solution of 2×2 nonlinear systems are obtained by the second-order Newton — Chebyshev method. The convergence of the method is investigated by using recurrence relations.

Ключевые слова: нелинейные системы, метод второго порядка, метод Ньютона — Чебышёва, теорема сходимости.

УДК 518.5.

Введение

Нахождение точных или хотя бы приближенных решений уравнений — центральная задача математики. Исследования в области численных методов решения уравнений имеют давнюю историю. В развитие этой области математики внесли вклад такие выдающиеся ученые, как Ньютон, Эйлер, Лагранж, Коши, Гаусс, Чебышёв.

В одномерном случае одним из наиболее известных и весьма эффективных численных методов решения нелинейных уравнений является метод Ньютона (метод “касательных”). Однако его многомерный (точнее, бесконечномерный) аналог сравнительно недавно вошел в употребление: классический вариант метода Ньютона был существенно обобщен Л. В. Канторовичем в цикле его работ 1948—1949 г.г. и в первую очередь в его основополагающей статье “Функциональный анализ и прикладная математика” [2], в которых впервые дано последовательное и во многом законченное изложение для операторных уравнений.

Метод Ньютона до сих пор является практически непревзойденным численным методом решения уравнений. Внимание к нему не ослабевает со стороны современной математики. Так, на XX Международном конгрессе математиков в Беркли (1986 г., США) обзорный часовой доклад С. Смейла “Алгоритмы решения уравнений” [7] был посвящен именно различным аспектам метода Ньютона.

Из относительно недавних работ, отражающих состояние вопроса на то время и внесших наиболее весомый вклад в эту область, можно отметить монографии А. М. Островского [5], Дж. Ортеги и В. Рейнболдта [4], Дж. Трауба [8], P. Deuflhard'a [10], а также большое количество журнальных публикаций, в том числе приведенных в библиографии к [7].

Классический метод Ньютона является итерационным. По порядку производных отображения, используемых в рекуррентной формуле метода, он является методом первого порядка.

В работе “Вычисление корней уравнений” [9], написанной П. Л. Чебышёвым еще в студенческие годы (при переходе с первого курса на второй!) и удостоенной серебряной медали на конкурсе Московского университета в 1838 г., метод Ньютона получил значительное развитие: предложен способ построения приближений любого порядка, а не первого, как в методе Ньютона, естественно, со значительным повышением скорости сходимости.

Настоящая работа посвящена развитию метода Ньютона — Чебышёва высших порядков. Основная цель работы — получить явные формулы метода Ньютона — Чебышёва отыскания приближенного решения системы двух уравнений с двумя неизвестными. Для этого рассматриваются общие способы — обращение степенных рядов и применение обратного оператора.

§ 1. Обращение степенных рядов

Пусть дан ряд

$$W = \sum_{k=1}^{\infty} l_k\, Z^k, \tag{1.1}$$

где $Z \in \mathrm{K}$, $W \in \mathrm{K}$, поле K — это $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, коэффициенты l_k также из K.

Если ряд (1.1) сходится в некоторой области $I = \{Z \in \mathrm{K} : \mid Z \mid < r_0\}$, $r_0 > 0$, $l_1 \neq 0$, то в области $J = \{W \in \mathrm{K} : \mid W \mid < r_1\}$, $r_1 > 0, r_1 = \frac{1}{r_0}$, имеет место разложение

$$Z = \sum_{m=1}^{\infty} p_m\, W^m, \tag{1.2}$$

и этот ряд сходится в J.

Выразим коэффициенты p_m через l_k. Для этого подставим ряд (1.2) в ряд (1.1). Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях W в обеих частях равенства и решая полученную систему уравнений относительно $p_1, p_2 \ldots$, находим

$$p_1 = \frac{1}{l_1},\ p_2 = -\frac{l_2}{l_1^3},\ p_3 = \frac{2l_2^2 - l_3 l_1}{l_1^5},\ p_4 = \frac{-5l_2^3 + 5l_1 l_2 l_3 - l_1^2 l_4}{l_1^7},$$
$$p_5 = -\frac{1}{l_1^9}(-14l_2^4 + 21 l_1 l_2^2 l_3 - 6 l_1^2 l_2 l_4 - 3 l_1^2 l_3^2 + l_1^3 l_5).$$

Аналогичный вывод p_m через $l_1, \ldots, l_m$ можно продолжить для любого $m = 6, 7, \ldots$

Из формул (20), полученных в [6, с.150] с помощью многочленов Белла, можно вывести следующие формулы, позволяющие вычислять p_n через $l_1, \ldots, l_n$:

$$p_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!\, l_1^{n+1}} \sum_{k \in \pi(n)} \frac{(n + \mid k \mid)!}{k!} l^k \cdot \left(-\frac{1}{l_1}\right)^{|k|},\ n \geqslant 1, \tag{1.3}$$

где $k = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$ — мультииндекс с целыми неотрицательными компонентами, $k \in \mathbb{Z}_+^n$, $\pi(n)$ — множество разбиений числа n, т. е. представлений числа n в виде суммы натуральных чисел, k_i — число слагаемых разбиения, равных i,

$$\pi(n) = \{k = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}_+^n : k_1 + 2k_2 + \ldots + nk_n = n\},$$

$\mid k \mid = k_1 + \ldots + k_n$ — высота мультииндекса k;
$k! = k_1! \cdot \ldots \cdot k_n!$ — факториал мультииндекса k;
$l^k = l_2^{k_1} \cdot \ldots \cdot l_{n+1}^{k_n}$ — степень.

Используя указанные формулы, получим, например,

$$\begin{aligned}
p_6 &= l_1^{-11}(7l_1^3 l_2 l_5 + 7l_1^3 l_3 l_4 + 84 l_1 l_2^3 l_3 - l_1^4 l_6 - 28 l_1^2 l_2^2 l_4 - 28 l_1^2 l_2 l_3^2 - 42 l_2^5);, \\
p_7 &= l_1^{-13}(8l_1^4 l_2 l_6 + 8l_1^4 l_3 l_5 + 4l_1^4 l_4^2 + 120 l_1^2 l_2^3 l_4 + 180 l_1^2 l_2^2 l_3^2 + 132 l_2^6 - l_1^5 l_7 - \\
&\quad - 36 l_1^3 l_2^2 l_5 - 72 l_1^3 l_2 l_3 l_4 - 12 l_1^3 l_3^3 - 330 l_1 l_2^4 l_3).
\end{aligned}$$

§ 2. Вычисление корней уравнения методом Чебышёва

Рассмотрим метод Чебышёва отыскания корней уравнения

$$f(z) = 0, \tag{2.1}$$

где $z \in \mathrm{K}$ (поле $\mathrm{K} = \mathbb{R}$ или $\mathrm{K} = \mathbb{C}$), f — аналитическая в окрестности z_0 функция. Идея метода базируется на обращении степенного ряда.

Применим полученные в § 1 формулы к решению уравнения (2.1). Заменяя переменные Z и W по формулам

$$Z = z - z_0,\ W = w - w_0,\ (z_0 \in \mathrm{K},\ w_0 = f(z_0) \in \mathrm{K}),$$

мы обращаем при $l_1 \neq 0$ разложение

$$w = f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} l_n (z - z_0)^n, \tag{2.2}$$

где

$$l_0 = w_0 = f(z_0),\ l_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!},\ n \geqslant 1, \tag{2.3}$$

следующим образом:

$$z = F(w) = z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n (w - w_0)^n. \tag{2.4}$$

Здесь F — обратная (в некоторой окрестности точки w_0) к f функция.

Таким образом, вместо того чтобы в формуле (2.2) полагать $w = 0$ и решать полученное уравнение относительно z, можно положить $w = 0$ в формуле (2.4). Тогда решение уравнения (2.1) представляется явно в виде ряда

$$z = F(0) = z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n p_n \cdot w_0^n. \tag{2.5}$$

Используя связь коэффициентов при обращении степенных рядов, описанную в § 1, с учетом (2.3) получаем *ряд Чебышёва*

$$
\begin{aligned}
z = z_0 - \frac{f}{f'} - \left(\frac{f}{f'}\right)^2 \frac{f''}{2f'} - \left(\frac{f}{f'}\right)^3 \left[\frac{f''^2}{2f'^2} - \frac{f'''}{6f'}\right] - \\
- \left(\frac{f}{f'}\right)^4 \left[\frac{5f''^3}{8f'^3} - \frac{5f''f'''}{12f'^2} + \frac{f^{(\mathrm{iv})}}{24f'}\right] + \\
+ \left(\frac{f}{f'}\right)^5 \left[-\frac{7f''^4}{8f'^4} + \frac{7f''^2 f'''}{8f'^3} - \frac{f^{(\mathrm{iv})} f''}{8f'^2} - \frac{f'''^2}{12f'^2} + \frac{f^{(\mathrm{v})}}{120f'}\right] - \ldots
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

Здесь функция f и все ее частные производные вычисляются в точке z_0.

Обрывая ряд Чебышёва на одном из членов (k–м члене, содержащем множитель $(f/f')^k$) и полагая $z = z_{m+1}$, $z_0 = z_m$, получим рекуррентную формулу *метода Ньютона — Чебышёва k–го порядка.* При $k = 1$ получается классический метод Ньютона.

Запись формулы n–го члена значительно усложняется с увеличением n.

В формуле (2.5)

$$p_n = \frac{1}{n!} F^{(n)}(w_0).$$

Поскольку F — функция, обратная (в некоторой окрестности точки $w_0 = f(z_0)$) к f, то для нахождения производных обратной функции можно использовать (наряду с формулами (1.3)) следующие формулы, выражающие $F^{(n)}$ через $f, f', \ldots, f^{(n)}$, при этом мы обозначаем ниже $F_1 = F', F_2 = F'' \ldots, f_1 = f', f_2 = f'' \ldots$ и т. д.

Во-первых,

$$F_1 = \frac{1}{f_1}.$$

Далее, если последовательно дифференцировать это равенство по z, учитывая при этом, что левая часть равенства зависит от z :
$F_1 = F'(w) = F'(f(z))$, то получим

$$F_2 = -\frac{f_2}{f_1^3},\; F_3 = \frac{3f_2^2 - f_1 f_3}{f_1^5}, \ldots$$

Таким образом,

$$F_n = \frac{Q_n}{f_1^{2n-1}},$$

где Q_n — многочлен от $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

Дифференцируя последнее равенство по z, получаем, с одной стороны, что

$$(F_n)' = F_{n+1} \cdot f_1 = \frac{Q_{n+1}}{f_1^{2n+1}} \cdot f_1 = \frac{Q_{n+1}}{f_1^{2n}},$$

а, с другой стороны,

$$
\begin{aligned}
(Q_n \cdot f_1^{1-2n})' = (1-2n) f_1^{-2n} \cdot f_2 \cdot Q_n + f_1^{1-2n} \cdot \frac{d}{dx} Q_n = \\
= \frac{(1-2n) f_2 \cdot Q_n}{f_1^{2n}} + \frac{f_1}{f_1^{2n}} \left(\sum_{k=1}^{n} f_{k+1} \cdot \frac{d}{df_k} Q_n\right).
\end{aligned}
$$

Отсюда при $n \geqslant 1$, $Q_1 = 1$ получаем

$$Q_{n+1} = (1-2n)f_2Q_n + f_1\left(\sum_{k=1}^{n} f_{k+1}\frac{d}{df_k}Q_n\right). \tag{2.7}$$

Используя эти формулы, последовательно находим

$$\begin{aligned}
&Q_1 = 1; \qquad Q_2 = -f_2; \qquad Q_3 = -f_3f_1 + 3f_2^2;\\
&Q_4 = -f_4f_1^2 + 10f_3f_2f_1 - 15f_2^3;\\
&Q_5 = -f_5f_1^3 + 15f_4f_2f_1^2 + 10f_3^2f_1^2 - 105f_3f_2^2f_1 + 105f_2^4;\\
&Q_6 = -f_6f_1^4 + 21f_5f_2f_1^3 + 35f_4f_3f_1^3 - 210f_4f_2^2f_1^2 - 280f_3^2f_2f_1^2 +\\
&\qquad + 1260f_3f_2^3f_1 - 945f_2^5; \ldots
\end{aligned}$$

Отметим, что многочлен Q_n является однородным относительно $f_1, \ldots, f_n$ многочленом степени $n-1$, имеет только один член, содержащий f_n (“старший член”): $-f_nf_1^{n-2}$, и только один член, не содержащий f_k при $k > 2$: $(-1)^{n-1}\cdot 1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-3)f_2^{n-1}$.

Вычисления Q_n, $n \geqslant 1$, позволяют последовательно получать члены ряда Чебышёва

$$z = z_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{f}{f_1}\right)^n\frac{Q_n}{f_1^{n-1}}. \tag{2.8}$$

Ряд Чебышёва можно получить также в следующем виде. Дифференцируя равенство $F(f(z)) = z$ по z, находим $F'\cdot f' = 1$, т. е. $F' = \frac{1}{f'}$.

Дифференцируя последнее равенство, находим $F''\cdot f' = \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{f'}\right)$, т. е. $F'' = \frac{1}{f'}\left(\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{f'}\right)\right)$. Продолжая так далее, находим (при соответствующих соглашениях в записи)

$$F^{(n)} = \frac{1}{f'}\left(\frac{d}{dz}\ldots\left(\frac{1}{f'}\left(\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{f'}\right)\right)\right)\ldots\right) = \left(\frac{1}{f'}\ \frac{d}{dz}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{f'}\right).$$

Тогда ряд Чебышёва запишется в виде

$$z = z_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{f^n}{n!}\left(\frac{1}{f'}\ \frac{d}{dz}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{f'}\right). \tag{2.9}$$

Здесь в правой части равенства (2.9) функции f и ее производных вычисляются при $z = z_0$. В таком виде ряд Чебышёва, видимо, впервые приведен в работе Э. Шрёдера [11] (см. также [3, с. 280] и [8, с. 69], где, впрочем, формула приведена с опечаткой).

§ 3. Обращение аналитических отображений из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$

На принципе обращения степенных рядов (для вещественных и комплексных переменных), применяемом в § 1, основывается получение коэффициентов при обращении аналитического отображения из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$.

Пусть вектор $W = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ выражается через вектор $Z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ в I — некоторой окрестности нуля следующим образом:

$$u = f(x,y) = l_1x + l_2y + l_3x^2 + l_4xy + l_5y^2 + \ldots, \tag{3.1}$$

$$v = g(x,y) = m_1x + m_2y + m_3x^2 + m_4xy + m_5y^2 + \ldots \tag{3.2}$$

Если $\triangle = l_1m_2 - l_2m_1 \neq 0$, то по теореме об обратной функции в J — некоторой окрестности нуля, имеет место разложение:

$$x = p_1u + p_2v + p_3u^2 + p_4uv + p_5v^2 + \ldots\ , \tag{3.3}$$

$$y = q_1u + q_2v + q_3u^2 + q_4uv + q_5v^2 + \ldots \tag{3.4}$$

Выразим коэффициенты $p_1, p_2, \ldots$ и $g_1, q_2, \ldots$ через $l_1, l_2, \ldots$ и $m_1, m_2, \ldots$

Для этого подставим ряды (3.1) и (3.2) в (3.3) и (3.4). После подстановки в (3.3) получим:

$$\begin{aligned} x = {} & p_1(l_1x + l_2y + l_3x^2 + l_4xy + l_5y^2) + \\ & + p_2(m_1x + m_2y + m_3x^2 + m_4xy + m_5y^2) + \ldots \end{aligned} \tag{3.5}$$

Чтобы выразить, например, коэффициенты $p_1, p_2, \ldots, p_5$, необходимо решить систему уравнений, приравняв коэффициенты при степенях x, y, x^2, xy, y^2 в обеих частях равенства (3.5). Это — система пяти уравнений относительно пяти неизвестных, она записывается следующим образом:

$$\begin{cases} p_1l_1 + p_2m_1 = 1, \\ p_1l_2 + p_2m_2 = 0, \\ p_1l_3 + p_2m_3 + p_3l_1^2 + p_4l_1m_1 + p_5m_1^2 = 0, \\ p_1l_4 + p_2m_4 + 2p_3l_1l_2 + p_4(l_1m_2 + m_1l_2) + 2p_5m_1m_2 = 0, \\ p_1l_5 + p_2m_5 + p_3l_2^2 + p_4l_2m_2 + p_5m_2^2 = 0. \end{cases} \tag{3.6}$$

Решая данную систему относительно $p_1, \ldots, p_5$ (как прямыми вычислениями, так и для проверки в пакете *MAPLE*), получаем следующие формулы для нахождения коэффициентов:

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{m_2}{\triangle}, \\ p_2 &= -\frac{l_2}{\triangle}, \\ p_3 &= -\frac{m_1^2(m_2l_5 - m_5l_2) + m_1m_2(m_4l_2 - m_2l_4) + m_2^2(m_2l_3 - m_3l_2)}{\triangle^3}, \\ p_4 &= \frac{2l_1m_1(m_2l_5 - m_5l_2) + (l_1m_2 + l_2m_1)(m_4l_2 - m_2l_4)}{\triangle^4} + \\ &\quad + \frac{2l_2m_2(m_2l_3 - m_3l_2)}{\triangle^4}, \\ p_5 &= -\frac{l_1^2(m_2l_5 - m_5l_2) + l_1l_2(m_4l_2 - m_2l_4) + l_2^2(m_2l_3 - m_3l_2)}{\triangle^3}. \end{aligned}$$

Здесь, как и выше, $\triangle = l_1 m_2 - l_2 m_1$.

Вывод p_k и q_k через $l_1, \ldots, l_k$ и $m_1, \ldots, m_k$ можно продолжить для любого $k \geqslant 6$.

Подставляя найденные коэффициенты в (3.3), будем иметь

$$x = \frac{m_2}{\triangle}u - \frac{l_2}{\triangle}v - \frac{1}{\triangle^3}\big[m_1^2(m_2l_5 - m_5l_2)u^2 + m_1m_2(m_4l_2 - m_2l_4)u^2 + \\ + m_2^2(m_2l_3 - m_3l_2)u^2 - 2l_1m_1(m_2l_5 - m_5l_2)uv - (l_1m_2 + l_2m_1)\times \\ \times (m_4l_2 - m_2l_4)uv - 2l_2m_2(m_2l_3 - m_3l_2)uv + l_1^2(m_2l_5 - m_5l_2)v^2 + \\ + l_1l_2(m_4l_2 - m_2l_4)v^2 + l_2^2(m_2l_3 - m_3l_2)v^2\big] + \ldots$$

Выполнив преобразования, приходим к следующей формуле:

$$x = \frac{m_2}{\triangle}u - \frac{l_2}{\triangle}v - \frac{1}{\triangle^3}\big[(m_2l_5 - m_5l_2)(m_1u - l_1v)^2 + (m_4l_2 - m_2l_4)\times \\ \times (m_1u - l_1v)(m_2u - l_2v) + (m_2l_3 - m_3l_2)(m_2u - l_2v)^2\big] + \ldots \qquad (3.7)$$

Аналогично выражаются коэффициенты многочлена (3.4) через l_k и m_k, $k = 1, \ldots, 5$. В результате получаются следующие формулы:

$$q_1 = -\frac{m_1}{\triangle},$$

$$q_2 = \frac{l_1}{\triangle},$$

$$q_3 = \frac{m_1^2(m_1l_5 - m_5l_1) + m_1m_2(m_4l_1 - m_1l_4) + m_2^2(m_1l_3 - m_3l_1)}{\triangle^3},$$

$$q_4 = -\frac{2l_1m_1(m_1l_5 - m_5l_1) + (l_1m_2 + l_2m_1)(m_4l_1 - m_1l_4)}{\triangle^3} - \\ - \frac{2l_2m_2(m_1l_3 - m_3l_1)}{\triangle^3},$$

$$g_5 = \frac{l_1^2(m_1l_5 - m_5l_1) + l_1l_2(m_4l_1 - m_1l_4) + l_2^2(m_1l_3 - m_3l_1)}{\triangle^3}.$$

Подставляя эти формулы в (3.4) и выполняя упрощения, приходим к следующей формуле:

$$y = -\frac{m_1}{\triangle}u + \frac{l_1}{\triangle}v + \frac{1}{\triangle^3}\big[(m_1l_5 - m_5l_1)(m_1u - l_1v)^2 + (m_4l_1 - m_1l_4)\times \\ \times (m_1u - l_1v)(m_2u - l_2v) + (m_1l_3 - m_3l_1)(m_2u - l_2v)^2\big] + \ldots \qquad (3.8)$$

§ 4. Решение системы двух уравнений с двумя неизвестными с помощью обращения рядов

Пусть теперь имеется отображение H из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$, т. е. вектор $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ переводится H в вектор $w = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$:

$$H(z) = w, \quad u = f(x, y), \quad v = g(x, y). \qquad (4.1)$$

Рассмотрим задачу нахождения корней операторного уравнения $H = 0$, что равносильно задаче решения системы скалярных уравнений:

$$\begin{cases} f(x,y) = 0, \\ g(x,y) = 0. \end{cases} \tag{4.2}$$

Будем предполагать, что система (4.2) имеет единственное решение в некоторой области D из $\mathbb{R}^2$, функции f, g имеют в этой области D непрерывные частные производные произвольного порядка, а определитель матрицы Якоби

$$\begin{pmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{pmatrix}$$

(якобиан) не обращается в нуль в D.

Для нахождения решения системы (4.2) используем идею Чебышёва отыскания корней уравнения, описанную в § 2, только применительно к системе двух уравнений. Для этого используем результаты § 3.

В качестве начального приближения к решению системы (4.2) возьмем (пока) произвольную точку $z_0 = (x_0, y_0) \in D$ (в теореме о сходимости последовательности приближений к точному решению системы точка z_0 выбирается “достаточно близко к точному решению”).

Обозначим

$$w_0 = H(z_0) = (f(z_0), g(z_0)) = (f(x_0, y_0), g(x_0, y_0)) = (u_0, v_0).$$

Будем предполагать, что отображение H аналитическое. Разложим функции f, g до второго порядка в ряд Тейлора в точке $z_0 = (x_0, y_0)$:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x_0,y_0) + f'_x \cdot (x - x_0) + f'_y \cdot (y - y_0) + \frac{1}{2!} f''_{xx} \cdot (x - x_0)^2 + \\ &\quad + f''_{xy} \cdot (x - x_0)(y - y_0) + \frac{1}{2!} f''_{yy} \cdot (y - y_0)^2 + \ldots, \\ g(x,y) &= g(x_0,y_0) + g'_x \cdot (x - x_0) + g'_y \cdot (y - y_0) + \frac{1}{2!} g''_{xx} \cdot (x - x_0)^2 + \\ &\quad + g''_{xy} \cdot (x - x_0)(y - y_0) + \frac{1}{2!} g''_{yy} \cdot (y - y_0)^2 + \ldots, \end{aligned} \tag{4.3}$$

где все частные производные вычисляются в точке $z_0 = (x_0, y_0)$.

Сделаем замену переменных по формулам

$$z - z_0 = (x - x_0, y - y_0) \longrightarrow z,$$
$$w - w_0 = (u - u_0, v - v_0) = (f(z) - f(z_0), g(z) - g(z_0)) \longrightarrow w = (u, v).$$

Тем самым мы имеем разложения вида (3.1) и (3.2) из § 3, где

$$\begin{aligned} l_1 = f'_x;\ l_2 = f'_y;\ l_3 = \frac{1}{2!} f''_{xx};\ l_4 = f''_{xy};\ l_5 = \frac{1}{2!} f''_{yy}; \\ m_1 = g'_x;\ m_2 = g'_y;\ m_3 = \frac{1}{2!} g''_{xx};\ m_4 = g''_{xy};\ m_5 = \frac{1}{2!} g''_{yy}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Используя связь коэффициентов, полученную при обращении рядов в § 3, после упрощения приходим к формулам:

$$\begin{cases} x = x_0 - \dfrac{g'_y}{\triangle} f + \dfrac{f'_y}{\triangle} g - \dfrac{1}{2\triangle^3}\big[(g'_y f''_{yy} - f'_y g''_{yy})(g'_x f - f'_x g)^2 + \\ \quad + 2(f'_y g''_{xy} - g'_y f''_{xy})(g'_x f - f'_x g)(g'_y f - f'_y g) + \\ \quad + (g'_y f''_{xx} - f'_y g''_{xx})(g'_y f - f'_y g)^2\big] + \dots\ ; \\ y = y_0 + \dfrac{g'_x}{\triangle} f - \dfrac{f'_x}{\triangle} g + \dfrac{1}{2\triangle^3}\big[(g'_x f''_{yy} - f'_x g''_{yy})(g'_x f - f'_x g)^2 + \\ \quad + 2(f'_x g''_{xy} - g'_x f''_{xy})(g'_x f - f'_x g)(g'_y f - f'_y g) + \\ \quad + (g'_x f''_{xx} - f'_x g''_{xx})(g'_y f - f'_y g)^2\big] + \dots \end{cases} \tag{4.5}$$

Здесь функции f, g и все их частные производные вычисляются в точке $z_0 = (x_0, y_0)$, $\triangle = f'_x g'_y - f'_y g'_x$.

Итерационный процесс по полученным выражениям можно построить, отбрасывая в (4.5) неуказанные слагаемые и делая замену в формулах (4.5) $x = x_{n+1}$, $y = y_{n+1}$, $x_0 = x_n$, $y_0 = y_n$, при этом значения функций f, g и всех их частных производных в правых частях равенств вычисляются в точке (x_n, y_n) :

$$\begin{aligned} x_{n+1} = x_n - \frac{g'_y}{\triangle} f_{|z=z_n} + \frac{f'_y}{\triangle} g_{|z=z_n} - \frac{1}{2\triangle^3}\big((g'_y f''_{xx} - f'_y g''_{xx})(g'_y f - f'_y g)^2 + \\ + 2(g'_y f''_{xy} - f'_y g''_{xy})(f'_x g - g'_x f)(g'_y f - f'_y g) + \\ + (g'_y f''_{yy} - f'_y g''_{yy})(f'_x g - g'_x f)^2\big)_{|z=z_n}, \end{aligned} \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned} y_{n+1} = y_n + \frac{g'_x}{\triangle} f_{|z=z_n} - \frac{f'_x}{\triangle} g_{|z=z_n} - \frac{1}{2\triangle^3}\big((f'_x g''_{xx} - g'_x f''_{xx})(g'_y f - f'_y g)^2 + \\ + 2(f'_x g''_{xy} - g'_x f''_{xy})(f'_x g - g'_x f)(g'_y f - f'_y g) + \\ + (f'_x g''_{yy} - g'_x f''_{yy})(f'_x g - g'_x f)^2\big)_{|z=z_n}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

§ 5. Решение операторного уравнения с помощью обратного оператора

Пусть дан оператор $H : D \to W$, отображающий открытое множество D банахова пространства Z на подмножество банахова пространства W, причем на D оператор H непрерывен и существуют непрерывные производные (по Фреше) оператора H до $(k+1)$–го порядка включительно. Предполагается также существование и непрерывность H^{-1} в $H(D)$ и H' в D, причем $H' \in \text{Isom}\ (Z, W)$ в D, а также, что нуль пространства W содержится в $H(D)$ и $H(D)$ — выпуклое множество в W.

Рассмотрим задачу построения итерационного процесса для нахождения точного решения уравнения

$$H(z) = 0. \tag{5.1}$$

В монографии [3, с. 280—281] рассматривается итерационный метод для решения операторного уравнения (5.1), задаваемый некоторой формулой (будем называть ее *формулой Коллатца*). Если задать начальное приближение $z_0 \in D$, то итерационный метод выглядит так:

$$z_{n+1} = z_n + \sum_{i=1}^{k} (-1)^i \left[\frac{H^i}{i!} \left(\left(\frac{1}{H'} \frac{d}{dz} \right)^{i-1} \frac{1}{H'}(z) \right) \right]_{|z=z_n}, \ n = 0, 1, 2, \dots , \tag{5.2}$$

где под $\frac{1}{H'}$ понимается обратный оператор $H^{'-1}$, под $\frac{d}{dz}$ понимается оператор дифференцирования (по Фреше) соответствующего оператора, действующего из Z. Отметим, что в случае $Z = W = \mathbb{R}$ приходим ровно к формуле Чебышёва — Шрёдера (2.9).

Хотя формула (5.2) компактна, однако ее применение при решении уравнений становится затруднительным с увеличением k из–за нечеткой записи, требующей разъяснений, а также поиска удобной (но не общепринятой) записи результата действия старших производных с помощью векторов и матриц.

Существует и другой подход к построению формул итерационного метода высших порядков для решения уравнения (5.1), не основывающийся напрямую на формуле Коллатца. Этому подходу посвящена следующая часть § 5 и 6.

Обозначим $w_0 = H(z_0)$, $w_1 = H(z_1)$ для $z_0, z_1 \in D$,

$$h = w_1 - w_0, \quad w = w_0 + th, \ t \in \mathbb{R}.$$

Введем новый оператор $\varphi : \widehat{D} \to Z$, заданный по правилу

$$\varphi(t) = H^{-1}(w_0 + th), \tag{5.3}$$

где $\widehat{D}$ — подмножество в $\mathbb{R}$ такое, что $w_0 + th \in H(D)$. Отметим, что в силу выпуклости $H(D)$, множество $\widehat{D}$ — промежуток в $\mathbb{R}$ и $\widehat{D} \supset [0; 1]$.

Разложение в ряд Тейлора φ в точке $t = 0$ будет иметь вид

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{m!} t^m \varphi^{(m)}(0) + \frac{1}{(k+1)!} t^{k+1} \varphi^{(k+1)}(\xi) \tag{5.4}$$

при некотором $\xi = \xi(t)$, $0 < \xi < t$.
Подставив $t = 1$ в (5.4), получим, что при некотором $\xi \in (0; 1)$

$$z_1 - z_0 = \varphi(1) - \varphi(0) = \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{m!} \varphi^{(m)}(0) + \frac{1}{(k+1)!} \varphi^{(k+1)}(\xi). \tag{5.5}$$

Если в (5.5) заменить $z_0 \to z_n, z_1 \to \bar{z}$ (здесь под $\bar{z}$ понимается точное решение системы (5.1)), получим

$$\bar{z} = z_n + \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{m!} \varphi_n^{(m)}(0) + R_{k,n}(\bar{z}, z_n), \tag{5.6}$$

где $R_{k,n}(\bar{z}, z_n) = \frac{1}{(k+1)!} \varphi^{(k+1)}(\xi)$ для некоторого $\xi \in (0; 1)$, $\xi = \xi(\bar{z}, z_n)$.

В этой формуле $\varphi_n(t) = H^{-1}(w_n + th_{(n)})$, где $w_n = H(z_n)$, $h_{(n)} = \bar{w} - w_n = -w_n$, где $\bar{w} = H(\bar{z}) = 0$.

Итерационный процесс k–го порядка для построения последовательности приближенных решений уравнений (5.1) получается, если пренебречь остатком в (5.6), тогда каждое следующее значение z_{n+1} находится по формуле

$$z_{n+1} = z_n + \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{m!} \varphi_n^{(m)}(0). \tag{5.7}$$

Таким образом, чтобы решить уравнение (5.1), необходимо последовательно вычислить производные оператора φ, определенного в (5.3).

Удобство введения нового оператора для построения итерационного процесса определяется тем, что производная $\varphi^{(m)}$ является отображением из $\mathbb{R}$ в Z и может поэтому быть без особого труда последовательно вычислена на каждом шаге m (в отличие от формулы Коллатца, где, например, H'' для $H : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ представляет собой, точнее, отождествляется с "трехмерной"матрицей размера $N \times N \times N$, а H''' — уже с "четырехмерной"матрицей и т. д.)

§ 6. Решение системы двух уравнений с помощью обратного оператора

Рассмотрим построение итерационного метода в случае, когда оператор $H : D \to W = \mathbb{R}^2$ действует в области определения $D \subset Z = \mathbb{R}^2$ и для $z = (x, y) \in D$ имеет следующий вид :

$$H(z) = \begin{pmatrix} f(z) \\ g(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = w.$$

Необходимо решить операторное уравнение $H(z) = 0$, что равносильно системе уравнений:

$$\begin{cases} f(x,y) = 0, \\ g(x,y) = 0. \end{cases} \tag{6.1}$$

Воспользуемся формулой (5.5) из § 5 для построения итерационного процесса решения системы (6.1).

Пусть $h = w_1 - w_0 = \begin{pmatrix} u_1 - u_0 \\ v_1 - v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$.

Предварительно запишем производные оператора φ.

Используя теорему о производной суперпозиции и теорему о производной обратного отображения, получаем

$$\varphi^{(1)}(t) = z'(t) = [H']^{-1}h = \begin{pmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{g'_y}{\triangle} & -\frac{f'_y}{\triangle} \\ -\frac{g'_x}{\triangle} & \frac{f'_x}{\triangle} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{g'_y}{\triangle}h_1 - \frac{f'_y}{\triangle}h_2 \\ -\frac{g'_x}{\triangle}h_1 + \frac{f'_x}{\triangle}h_2 \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \psi_1(z) \\ \psi_2(z) \end{pmatrix}, \tag{6.2}$$

где $\triangle = \det H' = f'_x g'_y - f'_y g'_x$, $z = h^{-1}(w_0 + th)$.

Вторая производная вычисляется так:

$$\varphi^{(2)}(t) = \frac{d}{dt}(\varphi^{(1)}(t)) = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt}\psi_1(z) \\ \frac{d}{dt}\psi_2(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_{1x}(z) & \psi_{1y}(z) \\ \psi_{2x}(z) & \psi_{2y}(z) \end{pmatrix} z'(t) =$$
$$= \begin{pmatrix} \psi_{1x}(z) & \psi_{1y}(z) \\ \psi_{2x}(z) & \psi_{2y}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{g'_y}{\triangle} & -\frac{f'_y}{\triangle} \\ -\frac{g'_x}{\triangle} & \frac{f'_x}{\triangle} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}. \tag{6.3}$$

Находим элементы первой матрицы в последнем произведении:

$$\psi_{1x}(z) = \frac{1}{\triangle^2}\big[(g'_y f''_{xx} - f'_y g''_{xx})(f'_y h_2 - g'_y h_1) + (f'_y g''_{xy} - g'_y f''_{xy})\times$$
$$\times (f'_x h_2 - g'_x h_1)\big],$$
$$\psi_{1y}(z) = \frac{1}{\triangle^2}\big[(g'_y f''_{xy} - f'_y g''_{xy})(f'_y h_2 - g'_y h_1) + (f'_y g''_{yy} - g'_y f''_{yy})\times$$
$$\times (f'_x h_2 - g'_x h_1)\big],$$
$$\psi_{2x}(z) = \frac{1}{\triangle^2}\big[(f'_x g''_{xx} - g'_x f''_{xx})(f'_y h_2 - g'_y h_1) + (g'_x f''_{xy} - f'_x g''_{xy})\times$$
$$\times (f'_x h_2 - g'_x h_1)\big],$$
$$\psi_{2y}(z) = \frac{1}{\triangle^2}\big[(f'_x g''_{xy} - g'_x f''_{xy})(f'_y h_2 - g'_y h_1) + (g'_x f''_{yy} - f'_x g''_{yy})\times$$
$$\times (f'_x h_2 - g'_x h_1)\big].$$

Выполнив необходимые вычисления, получим

$$\varphi^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt}\psi_1(z) \\ \frac{d}{dt}\psi_2(z) \end{pmatrix}, \quad \text{где}$$

$$\frac{d}{dt}\psi_1(z) = \frac{1}{\triangle^3}\big[(f'_y g''_{yy} - g'_y f''_{yy})(f'_x h_2 - g'_x h_1)^2 + 2(f'_y g''_{xy} - g'_y f''_{xy})\times$$
$$\times (f'_x h_2 - g'_x h_1)(f'_y h_2 - g'_y h_1) + (f'_y g''_{xx} - g'_y f''_{xx})(f'_x h_2 - g'_y h_1)^2\big],$$
$$\frac{d}{dt}\psi_2(z) = \frac{1}{\triangle^3}\big[(g'_x f''_{xx} - f'_x g''_{xx})(f'_y h_2 - g'_y h_1)^2 + 2(f'_x g''_{xy} - g'_x f''_{xy})\times$$
$$\times (f'_x h_2 - g'_x h_1)(f'_y h_2 - g'_y h_1) + (g'_x f''_{yy} - f'_x g''_{yy})(f'_x h_2 - g'_x h_1)^2\big].$$

Подставляя полученные производные φ в формулу (5.5) при $k = 2$, $w_1 = (0;0)$ и учитывая, что тогда

$$h = w_1 - w_0 = \begin{pmatrix} -u_0 \\ -v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix},$$

будем иметь (отбрасывая остаток в (5.5))

$$z_1 - z_0 = -\begin{pmatrix} \frac{g'_y}{\triangle}u_0 - \frac{f'_y}{\triangle}v_0 \\ -\frac{g'_x}{\triangle}u_0 + \frac{f'_x}{\triangle}v_0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2\triangle^3}\begin{pmatrix} P(u_0, v_0) \\ T(u_0, v_0) \end{pmatrix}, \tag{6.4}$$

где

$$\begin{aligned}P(u_0,v_0)&=(f'_yg''_{yy}-g'_yf''_{yy})(f'_xv_0-g'_xu_0)^2+2(f'_yg''_{xy}-g'_yf''_{xy})(f'_xv_0-g'_xu_0)\times\\&\quad\times(f'_yv_0-g'_yu_0)+(f'_yg''_{xx}-g'_yf''_{xx})(f'_yv_0-g'_yu_0)^2,\\T(u_0,v_0)&=(g'_xf''_{xx}-f'_xg''_{xx})(f'_yv_0-g'_yu_0)^2+2(f'_xg''_{xy}-g'_xf''_{xy})(f'_xv_0-g'_xu_0)\times\\&\quad\times(f'_yv_0-g'_yu_0)+(g'_xf''_{yy}-f'_xg''_{yy})(f'_xv_0-g'_xu_0)^2.\end{aligned}$$

Делая в (6.4) замену

$$z_1\to z_{n+1},\quad z_0\to z_n$$

и учитывая, что значения функций f,g и всех их частных производных до второго порядка включительно вычисляются в точке (x_n,y_n), получаем итерационный процесс, который покоординатно будет выглядеть так:

$$\begin{aligned}x_{n+1}&=x_n-\frac{g'_y}{\triangle}f_{|z=z_n}+\frac{f'_y}{\triangle}g_{|z=z_n}-\frac{1}{2\triangle^3}\big((g'_yf''_{xx}-f'_yg''_{xx})(g'_yf-f'_yg)^2+\\&\quad+2(g'_yf''_{xy}-f'_yg''_{xy})(f'_xg-g'_xf)(g'_yf-f'_yg)+\\&\quad+(g'_yf''_{yy}-f'_yg''_{yy})(f'_xg-g'_xf)^2\big)_{|z=z_n};\end{aligned}\tag{6.5}$$

$$\begin{aligned}y_{n+1}&=y_n+\frac{g'_x}{\triangle}f_{|z=z_n}-\frac{f'_x}{\triangle}g_{|z=z_n}-\frac{1}{2\triangle^3}\big((f'_xg''_{xx}-g'_xf''_{xx})(g'_yf-f'_yg)^2+\\&\quad+2(f'_xg''_{xy}-g'_xf''_{xy})(f'_xg-g'_xf)(g'_yf-f'_yg)+\\&\quad+(f'_xg''_{yy}-g'_xf''_{yy})(f'_xg-g'_xf)^2\big)_{|z=z_n}.\end{aligned}\tag{6.6}$$

Как видим, эти формулы совпадают с полученными формулами (4.6) и (4.7) из § 4.

Запишем формулы (6.5) и (6.6) в матричном виде

$$\begin{aligned}z_{n+1}&=z_n-\begin{pmatrix}\frac{g'_y}{\triangle}f-\frac{f'_y}{\triangle}g\\-\frac{g'_x}{\triangle}f+\frac{f'_x}{\triangle}g\end{pmatrix}_{|z=z_n}-\frac{1}{2\triangle^3}\begin{pmatrix}-P(f,g)\\-T(f,g)\end{pmatrix}\\&\overset{\text{def}}{=}z_n-A(z_n)-\frac{1}{2\triangle^3}B(z_n),\end{aligned}\tag{6.7}$$

где

$$\begin{aligned}-P(f,g)&=\Big((g'_yf''_{xx}-f'_yg''_{xx})(g'_yf-f'_yg)^2+2(g'_yf''_{xy}-f'_yg''_{xy})(f'_xg-g'_xf)\times\\&\quad\times(g'_yf-f'_yg)+(g'_yf''_{yy}-f'_yg''_{yy})(f'_xg-g'_xf)^2\Big)_{|z=z_n},\\-T(f,g)&=\Big((f'_xg''_{xx}-g'_xf''_{xx})(g'_yf-f'_yg)^2+2(f'_xg''_{xy}-g'_xf''_{xy})(f'_xg-g'_xf)\times\\&\quad\times(g'_yf-f'_yg)+(f'_xg''_{yy}-g'_xf''_{yy})(f'_xg-g'_xf)\Big)^2_{|z=z_n}.\end{aligned}$$

Преобразуем слагаемые:

$$A(z_n)=\begin{pmatrix}\frac{g'_y}{\triangle}f-\frac{f'_y}{\triangle}g\\-\frac{g'_x}{\triangle}f+\frac{f'_x}{\triangle}g\end{pmatrix}_{|z=z_n}=\begin{pmatrix}\frac{g'_y}{\triangle} & -\frac{f'_y}{\triangle}\\-\frac{g'_x}{\triangle} & \frac{f'_x}{\triangle}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f\\g\end{pmatrix}_{|z=z_n}=$$
$$=\begin{pmatrix}f'_x & f'_y\\g'_x & g'_y\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}f\\g\end{pmatrix}_{|z=z_n}=\big[H'(z)\big]^{-1}H(z_n);$$
$$B(z_n)=\begin{pmatrix}(g'_yf''_{xx}-f'_yg''_{xx})(g'_yf-f'_yg)^2\\(f'_xg''_{xx}-g'_xf''_{xx})(g'_yf-f'_yg)^2\end{pmatrix}_{|z=z_n}+$$
$$+2\begin{pmatrix}(g'_yf''_{xy}-f'_yg''_{xy})(f'_xg-g'_xf)(g'_yf-f'_yg)\\(f'_xg''_{xy}-g'_xf''_{xy})(f'_xg-g'_xf)(g'_yf-f'_yg)\end{pmatrix}_{|z=z_n}+$$
$$+\begin{pmatrix}(g'_yf''_{yy}-f'_yg''_{yy})(f'_xg-g'_xf)^2\\(f'_xg''_{yy}-g'_xf''_{yy})(f'_xg-g'_xf)^2\end{pmatrix}_{|z=z_n}=$$
$$=\left(\begin{pmatrix}g'_yf''_{xx}-f'_yg''_{xx}\\-g'_xf''_{xx}+f'_xg''_{xx}\end{pmatrix}(g'_yf-f'_yg)^2+2\begin{pmatrix}g'_yf''_{xy}-f'_yg''_{xy}\\-g'_xf''_{xy}+f'_xg''_{xy}\end{pmatrix}\times\right.$$
$$\times(g'_yf-f'_yg)(-g'_xf+f'_xg)+\begin{pmatrix}g'_yf''_{yy}-f'_yg''_{yy}\\-g'_xf''_{yy}+f'_xg''_{yy}\end{pmatrix}$$
$$\left.\times(-g'_xf+f'_xg)^2\right)_{|z=z_n}=\left(\begin{pmatrix}g'_y & -f'_y\\-g'_x & f'_x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f''_{xx}\\g''_{xx}\end{pmatrix}(g'_yf-f'_yg)^2+\right.$$
$$+2\begin{pmatrix}g'_y & -f'_y\\-g'_x & f'_x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f''_{xy}\\g''_{xy}\end{pmatrix}(g'_yf-f'_yg)(-g'_xf+f'_xg)+$$
$$\left.+\begin{pmatrix}g'_y & -f'_y\\-g'_x & f'_x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f''_{yy}\\g''_{yy}\end{pmatrix}(-g'_xf+f'_xg)^2\right)_{|z=z_n}=$$
$$=\begin{pmatrix}g'_y & -f'_y\\-g'_x & f'_x\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}f''_{xx}\\g''_{xx}\end{pmatrix}(g'_yf-f'_yg)^2+2\begin{pmatrix}f''_{xy}\\g''_{xy}\end{pmatrix}(g'_yf-f'_yg)\times\right.$$
$$\left.\times(-g'_xf+f'_xg)+\begin{pmatrix}f''_{yy}\\g''_{yy}\end{pmatrix}(-g'_xf+f'_xg)^2\right)_{|z=z_n}=\begin{pmatrix}g'_y & -f'_y\\-g'_x & f'_x\end{pmatrix}_{|z=z_n}$$
$$\times\left((g'_yf-f'_yg,\ -g'_xf+f'_xg)\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}f''_{xx}\\g''_{xx}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}f''_{xy}\\g''_{xy}\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}f''_{xy}\\g''_{xy}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}f''_{yy}\\g''_{yy}\end{pmatrix}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g'_yf-f'_yg\\-g'_xf+f'_xg\end{pmatrix}\right)_{|z=z_n}$$
$$=\triangle^3[H'(z_n)]^{-1}\Big(\big([H'(z_n)]^{-1}H(z_n)\big)^TH''(z_n)\big([H'(z_n)]^{-1}H(z_n)\big)\Big).$$

В итоге получаем формулу

$$z_{n+1}=z_n-A(z_n)-\frac{1}{2\triangle^3}B(z_n)=z_n-[H'(z_n)]^{-1}H(z_n)-$$
$$-\frac{1}{2\triangle^3}\triangle^3[H'(z_n)]^{-1}\Big(\big([H'(z_n)]^{-1}H(z_n)\big)^TH''(z_n)\big([H'(z_n)]^{-1}H(z_n)\big)\Big)=$$
$$=z_n-[\boldsymbol{H}'(z_n)]^{-1}\boldsymbol{H}(z_n)-$$
$$-\frac{1}{2}[\boldsymbol{H}'(z_n)]^{-1}\Big(\big(\boldsymbol{H}''(z_n)\big([\boldsymbol{H}'(z_n)]^{-1}\boldsymbol{H}(z_n)\big)\big)\big([\boldsymbol{H}'(z_n)]^{-1}\boldsymbol{H}(z_n)\big)\Big). \tag{6.8}$$

Жирным шрифтом выделена операторная запись формулы в отличие от предыдущей векторно-матричной записи.

§ 7. Оценка сходимости метода Ньютона — Чебышёва для численного решения системы двух уравнений

Для дальнейших рассуждений нам понадобится оценить остаток $R_{k,n}(\bar{z}, z_n) = \frac{1}{(k+1)!}\varphi^{(k+1)}(\xi)$ в формуле (5.6). Для этого, очевидно, необходимо оценить производную $\varphi^{(k+1)}$. Здесь мы действуем в самом простом случае — для оператора $H : Z \to W$ при $Z = W = \mathbb{R}^2$.

Введем норму в пространстве W следующим образом:
для $w = (w_1, w_2) \in W = \mathbb{R}^2$

$$\| w \|_\infty = \max(| w_1 |, | w_2 |). \tag{7.1}$$

Согласованной с этой нормой в пространстве матриц $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, задающих отображения из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$, является норма

$$\| A \|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant 2} \left(\sum_{j=1}^{2} | a_{ij} | \right). \tag{7.2}$$

Пусть модули всех частных производных функций f и g до $(k+1)$–го порядка в области D ограничены одним и тем же числом:

$$M = \sup_{\substack{0 < i+j \leq k+1, \\ z \in D}} \left\{ \left| f_{x^i y^j}(z) \right|, \left| g_{x^i y^j}(z) \right| \right\}.$$

Пусть также для постоянной $m > 0$ имеет место оценка

$$|\triangle| \geqslant m \quad \text{при всех} \quad z \in D,$$

где, как и выше, $\triangle = \det H' = f'_x g'_y - f'_y g'_x$.

Очевидно, что в этом случае

$$\| [H']^{-1} h \|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} \frac{g'_y}{\triangle} & -\frac{f'_y}{\triangle} \\ -\frac{g'_x}{\triangle} & \frac{f'_x}{\triangle} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \right\|_\infty \leqslant \frac{2M}{m} \ \| h \|_\infty,$$

и, следовательно, из (6.2) получаем, что $\| \varphi^{(1)} \|_\infty \leqslant \frac{2M}{m} \| h \|_\infty$.

Аналогично, пользуясь определениями и свойствами введенных выше норм, а также формулами (6.3), получается неравенство

$$\| \varphi^{(2)} \|_\infty \leqslant \frac{32M^4}{m^3} \ \| h \|_\infty^2 .$$

Продолжая далее, получим оценку для $(k+1)$–й производной:

$$\| \varphi^{(k+1)} \|_\infty \leqslant S \, \| h \|_\infty^{k+1},$$

где S — некоторый множитель, зависящий от M и m, а также k.

Тогда для остатка $R_{k,n}(\bar z, z_n) = \frac{1}{(k+1)!}\varphi^{(k+1)}(\xi)$ имеем следующую оценку:

$$\| R_{k,n}(\bar z, z_n) \|_\infty = \left\| \frac{1}{(k+1)!}\varphi^{(k+1)}(\xi) \right\|_\infty \leqslant \\ \leqslant \frac{S}{(k+1)!} \| h \|_\infty^{k+1} \overset{\text{def}}{=} C \| h \|_\infty^{k+1}, \quad (7.3)$$

где $C = C(M, m, k)$.

Конечно же, оценка аналогичная (7.3) имеет место и в многомерном случае $H\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, а не только при $Z = W = \mathbb{R}^2$, при этом $C = C(M, m, k, N)$.

Пусть дан оператор $H\colon Z \to W$, отображающий открытое множество D банахова пространства Z на подмножество банахова пространства W, причем на D оператор H непрерывен и существуют производные (по Фреше) оператора H до $(k+1)$–го порядка включительно. Предполагается существование и непрерывность H^{-1} в $H(D)$ и H' в D, причем $H' \in \operatorname{Isom}(Z, W)$ в D, а также, что нуль пространства W содержится в $H(D)$ и $H(D)$ — выпуклое множество в W.

Пусть $\bar z$ — точное решение операторного уравнения $H(z) = 0$. Тогда по формуле (5.6) из § 5 точное решение можно определить так:

$$\bar z = z_n + \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{m!}\, \varphi_n^{(m)}(0) + R_{k,n}(\bar z, z_n), \quad (7.4)$$

(определения $\varphi(t)$ и $R_{k,n}(\bar z, z_n)$ см. в § 5).

Рекуррентная же формула метода Ньютона — Чебышёва имеет вид

$$z_{n+1} = z_n + \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{m!}\, \varphi_n^{(m)}(0). \quad (7.5)$$

Сформулируем теорему о сходимости метода Ньютона — Чебышёва для численного решения системы двух уравнений.

Теорема. *Пусть имеется отображение H из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$, т. е. вектор $z = \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2$ переводится H в вектор $w = \binom{u}{v} \in \mathbb{R}^2$:*

$$H(z) = w,\ u = f(x, y),\ v = g(x, y).$$

Пусть H удовлетворяет также условиям, указанным выше в § 7, и имеет единственный нуль $\bar z$ в D. Обозначим

$$M = \sup_{\substack{0 < i+j \leqslant k+1,\\ z \in D}} \bigl\{ \bigl| f_{x^i y^j}(z) \bigr|, \bigl| g_{x^i y^j}(z) \bigr| \bigr\},$$

$$P = \sup_{z \in D} \| H'(z) \|_\infty = \sup_{z \in D} \max\bigl(|f'| + |f'_y|,\ |g'_x| + |g'_y| \bigr)$$

и пусть

а) $|\triangle| = |\det H'| = \left|f'_x g'_y - f'_y g'_x\right| \geqslant m$ *для всякого* $z \in D$;

б) $q^{\frac{1}{k}} \parallel \bar{z} - z_0 \parallel_\infty < 1$, *где* $q = P^{k+1}C$, *а* $C \geqslant \frac{\|\varphi^{(k+1)}\|_\infty}{(k+1)!}$.

Если начальное приближение z_0 *выбрано достаточно близко к корню* $\bar{z}$, *а именно в соответствии с б), то метод Ньютона — Чебышёва* k*–го порядка сходится, т. е.* $z_n \to \bar{z}$ *при* $n \to \infty$ *(где* z_n *определяется рекуррентной формулой (7.5) и* $z_n \in D$, $n = 0, 1, 2, \ldots$*).*

Доказательство. Вычтем (7.5) из (7.4). Получим

$$\bar{z} - z_{n+1} = R_{k,n}(\bar{z}, z_n).$$

Воспользуемся оценкой остаточного члена, приведенной в (7.3):

$$\parallel R_{k,n}(\bar{z}, z_n) \parallel_\infty \leqslant C \parallel h \parallel_\infty^{k+1} .$$

Здесь C — некоторый множитель, зависящий от M, k и $m, h = \bar{w} - w_n$, где $\bar{w} = H(\bar{z}) = 0,\ w_n = H(z_n)$.

По теореме о среднем

$$\parallel h \parallel_\infty = \parallel \bar{w} - w_n \parallel_\infty = \parallel H(\bar{z}) - H(z_n) \parallel_\infty \leqslant P \parallel \bar{z} - z_n \parallel_\infty .$$

Таким образом, можем записать, что

$$\parallel \bar{z} - z_{n+1} \parallel_\infty = \parallel R_{k,n}(\bar{z}, z_n) \parallel_\infty \leqslant P^{k+1}C \parallel \bar{z} - z_n \parallel_\infty^{k+1} \stackrel{\text{def}}{=} q \parallel \bar{z} - z_n \parallel_\infty^{k+1} .$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\parallel \bar{z} - z_{n+1} \parallel_\infty &\leqslant q \parallel \bar{z} - z_n \parallel_\infty^{k+1} \leqslant q^{1+(k+1)} \parallel \bar{z} - z_{n-1} \parallel_\infty^{(k+1)^2} \leqslant \\
&\leqslant q^{1+(k+1)+(k+1)^2} \parallel \bar{z} - z_{n-2} \parallel_\infty^{(k+1)^3} \leqslant \ldots \leqslant \\
&\leqslant q^{1+(k+1)+\ldots+(k+1)^n} \parallel \bar{z} - z_0 \parallel_\infty^{(k+1)^{n+1}} = \\
&= q^{\frac{(k+1)^{n+1}-1}{k}} \parallel \bar{z} - z_0 \parallel_\infty^{(k+1)^{n+1}} = \\
&= q^{-\frac{1}{k}} \left(q^{\frac{1}{k}} \parallel \bar{z} - z_0 \parallel_\infty \right)^{(k+1)^{n+1}} .
\end{aligned}$$

В итоге получаем $\parallel \bar{z} - z_{n+1} \parallel_\infty \leqslant q^{-\frac{1}{k}} \left(q^{\frac{1}{k}} \parallel \bar{z} - z_0 \parallel_\infty \right)^{(k+1)^{n+1}}$.

Так как $q^{\frac{1}{k}} \parallel \bar{z} - z_0 \parallel_\infty < 1$, то $\parallel \bar{z} - z_{n+1} \parallel_\infty \to 0$, и теорема доказана.

Отметим в заключение, что процесс вывода явных формул метода Ньютона — Чебышёва показывает, что на данном пути можно получить явные формулы метода Ньютона — Чебышёва для числа переменных больше, чем два, и для порядков метода выше, чем два.

Библиографический список

1. *Дэннис Дж., Шнабель Р.* Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений. М.: Мир, 1988, 440 с.

2. *Канторович Л. В.* Функциональный анализ и прикладная математика. // УМН. Т. 3. Вып. 6. 1948. С. 82—185.
3. *Коллатц Л.* Функциональный анализ и вычислительная математика М.: Мир, 1962. 448 с.
4. *Ортега Дж., Рейнболдт В.* Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. М.: Мир, 1975. 560 с.
5. *Островский А. М.* Решение уравнений и систем уравнений. М.: ИЛ, 1963. 200 с.
6. *Риордан Дж.* Комбинаторные тождества. М.: Наука, 1982. 256 с.
7. *Смейл С.* Алгоритмы решения уравнений // Междунар. конгресс математиков в Беркли, 1986: Обзорные доклады: Сб. ст.: Пер. с англ. М.: Мир, 1991. С. 265—296.
8. *Трауб Дж.* Итерационные методы решения уравнений. М.: Мир, 1985. 264 с.
9. *Чебышёв П. Л.* Вычисление корней уравнений // Полн. собр. соч. М.: Академия наук СССР, 1951. Т. 5: Прочие сочинения. Биографические материалы. С. 7—25.
10. *Deuflhard P.* Newton Methods for Nonlinear Problems. Affine Invariance and Adaptive Algorithms. Corr. 2nd pr. Berlin; Heidelberg; New York: Springer–Verlag, 2006. P. XII + 424.
11. *Schröder E.* Über unendlich viele Algorithmen zur Auflösung der Gleichungen // Math. Ann. 1870. Bd. 2. S. 317—365.