Вестник Ивановского государственного университета

Серия «Биология, Химия, Физика, Математика»

Вып. 3 / 2008 С. 122 – 127

С. И. Хашин

ОПТИМАЛЬНЫЙ ОРТОНОРМАЛЬНЫЙ БАЗИС В КОМПЬЮТЕРНОЙ ГРАФИКЕ

Определяется и вычисляется эффективность базиса Фурье в компьютерной графике. Находится наиболее эффективный базис в смысле данного определения. Вычисляется его эффективность.

Efficiency of Fourier basis in computer graphics is defined and calculated. The most effective basis in sense of the given definition and its efficiency is calculated.

Ключевые слова: компьютерная графика, базис Фурье.

УДК 519.68.

При обработке компьютерной графики одним из важнейших инструментов является дискретное преобразование Фурье (см., напр., [1, 2, 3]). С интересующей нас точки зрения оно является просто переходом от стандартного базиса в $\mathbb{R}^n$ к ортонормальному базису Фурье $F = (f_i)$:

$$\begin{aligned} f_0 &= (f_{00}, \dots, f_{0,n-1}), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_{n-1} &= (f_{n-1,0}, \dots, f_{n-1,n-1}), \end{aligned}$$

где

$$f_{ij} = \frac{C(i)}{\sqrt{n}} \cos\frac{(2j+1)\pi i}{2n} \quad \text{и} \quad C(i) = \begin{cases} 1, & i = 0\ , \\ \sqrt{2}, & i > 0\ , \end{cases}$$

т. е.

$$\begin{aligned} f_0 &= \frac{1}{\sqrt{n}}(1, \dots, 1), \\ f_1 &= \sqrt{\frac{2}{n}}\left(\cos\frac{\pi}{2n}, \cos\frac{3\pi}{2n}, \dots, \cos\frac{(2n-1)\pi}{2n}\right) \\ f_2 &= \sqrt{\frac{2}{n}}\left(\cos\frac{2\pi}{2n}, \cos\frac{2\cdot 3\pi}{2n}, \dots, \cos\frac{2(2n-1)\pi}{2n}\right) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots . \end{aligned}$$

Одной из основных причин эффективности использования базиса Фурье является сильная неоднородность величины коэффициентов разложения по этому базису. Рассмотрим, для примера, вектора – отрезки

© С. И. Хашин, 2008
Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 07-07-00178)

строк некоторого изображения. В исходном стандартном базисе все координаты равноправны, принимают значения от 0 до 255 и имеют среднее значение v_{mid} (средняя яркость изображения), для определенности будем считать $v_{mid} = 255/2 = 127.5$.

Если те же самые вектора длины N разложить по базису Фурье, то среднее значение нулевой координаты будет $\sqrt{N} \cdot f_{mid}$, а среднее значение остальных координат будет равно 0.

Чтобы оценить неоднородность в распределении координат, посмотрим на их среднеквадратичное значение. Эксперименты были проведены на большом количестве графических файлов, размер которых, для уменьшения погрешностей, был уменьшен в три раза по каждому измерению.

В таблице приведены среднеквадратичные значения коэффициентов векторов после преобразования Фурье. В столбце номер k приведены среднеквадратичные значения коэффициентов векторов, полученных в результате преобразования Фурье из всевозможных горизонтальных и вертикальных строчек длины k на выбранном множестве изображений.

k :	4	5	6	7	8	10	12	14	16
0	251.1	279.7	305.3	328.8	350.7	390.5	426.5	459.4	489.8
1	2.764	3.498	4.100	4.581	4.945	5.378	5.705	6.207	6.914
2	0.846	1.289	1.739	2.170	2.581	3.305	3.712	3.773	3.685
3	0.259	0.455	0.684	0.937	1.192	1.716	2.341	2.927	3.252
4		0.193	0.311	0.447	0.608	0.932	1.209	1.604	2.143
5			0.156	0.235	0.320	0.557	0.814	0.975	1.164
6				0.133	0.193	0.318	0.509	0.732	0.864
7					0.117	0.211	0.311	0.471	0.661
8						0.144	0.223	0.303	0.444
9						0.096	0.157	0.229	0.294
10							0.118	0.170	0.227
11							0.083	0.128	0.183
12								0.102	0.134
13								0.073	0.112
14									0.090
15									0.066

Например, если брать вектора длины $k = 5$, то после преобразования Фурье среднее значение 0-й координаты будет равно 281.3, 1-й координаты – 2.318, последней, 4-й – 0.171.

Ориентировочно можно считать, что после преобразования Фурье блоков длины k некоторого графического файла (и по горизонтали, и по вертикали) выполнено следующее:

среднеквадратичное значение 0-й координаты примерно равно $128\sqrt{N}$, 1-й — $1.7\sqrt{N}$, 2-й — $1.0\sqrt{N}$, …, т. е. большая часть старших координат будет равна 0 после округления до целых.

В связи с этим рассмотрим, нельзя ли построить другой ортонормальный базис, в котором неоднородность значений координат будет еще больше? Введем некоторые обозначения, чтобы формализовать эту задачу.

Пусть в n-мерном пространстве $\mathbb{R}^n$ заданы m векторов $V = \{v_j\}$, $j = 1, \ldots, m$, $m > n$ и пусть $E = \{e_i\}$ — ортонормальный базис в $\mathbb{R}^n$ и $v_j =$

$a_{j1}e_1 + \cdots + a_{jn}e_n$ — разложение каждого из векторов v_j по базису E. Мы хотим найти такой базис, чтобы первые координаты в разложении были как можно больше, а последние — как можно меньше. Для данного базиса E и набора векторов V введем следующие более точные характеристики:

$$S_j = \sum_{j=1}^{m} a_{ji}^2,\ j = 1, \ldots, n, \quad S = \sum_{i=1}^{n} S_j, \quad s_j = S_j/S.$$

По построению, $0 \leqslant s_i \leqslant 1$ и $s_1 + \cdots + s_n = 1$. Введем на множестве ортонормальных базисов отношение порядка. Будем говорить, что базис E_1 больше, чем E_2, если строчка $(s_1, \ldots, s_n)$ для первого базиса лексикографически больше соответствующей строчки для второго. Базис E будем называть оптимальным для набора векторов V, если E больше (или равен) всех остальных базисов.

Метод нахождения оптимального базиса. Для вектора v через v^2 обозначим квадратичную форму (квадрат проекции на вектор v):

$$f(x) = (x, v)^2.$$

Для набора векторов $V = \{v_i\}$ рассмотрим квадратичную форму $f_V = \sum v_i^2$. Имеет место следующее несложное утверждение.

Теорема. *В оптимальном базисе для набора векторов V квадратичная форма f_V диагональна.*

Таким образом, для нахождения оптимального базиса для набора векторов V надо построить квадратичную форму f_V и привести ее к главным осям.

Построение оптимального базиса. Будем строить оптимальный базис в n-мерном пространстве. Пусть дан некоторый, достаточно представительный, набор изображений. С его помощью построим большое количество векторов v_i длины n. Для этого можно предложить несколько вариантов:

- каждую строчку разрезать на вектора длины n;
- каждый столбец разрезать на вектора длины n;
- взять объединение векторов, построенных в двух предыдущих пунктах;
- для каждой точки (x, y) взять горизонтальный и вертикальный вектора длины n.

По этим векторам найдем оптимальный базис методом, описанным выше.

Замечание 1. Вполне естественно ожидать, что базис будут симметричен при обращении порядка векторов. На практике это условие будет выполняться лишь приближенно. Чтобы сразу получить симметричный вектор, вместе с каждым вектором $v = \{v_1, \ldots, v_n\}$ в систему векторов добавим обращенный вектор $rev(v) = \{v_n, \ldots, v_1\}$.

Замечание 2. Вполне естественно ожидать, что первый вектор в базисе будут пропорционален единичному: $v_1 = \{\alpha, \ldots, \alpha\}$. На практике это условие будет выполняться лишь приближенно. Чтобы сразу получить правильный первый базисный вектор, каждый вектор системы $v =$

$\{v_1, \ldots, v_n\}$ будем сразу корректировать: вычтем из всех его координат одно и то же число $\beta = (v_1 + \cdots + v_n)/n$: $\{v_1, \ldots, v_n\} \to \{v_1 - \beta, \ldots, v_n - \beta\}$. Это позволит не только получить нужный первый вектор, но и повысить точность нахождения остальных векторов, т. к. вес первого вектора намного больше весов всех остальных.

Замечание 3. Большая часть имеющихся изображений "пропущена"через формат JPEG или некоторый его аналог. Это может внести весьма существенные систематические погрешности в измерения. Чтобы этого избежать, можно уменьшить размер каждого изображения в три раза по обоим измерениям. Так как возможные JPEG-подобные артефакты на изображениях имеют шаг 8 или 16, то подобное преобразование позволит практически полностью исключить такие погрешности. Кроме того, отбирать для экспериментов следует, естественно, лишь высококачественные изображения.

	4	5	6	7	8	10	12	14	16
0	251.1	279.7	305.3	328.8	350.7	390.5	426.5	459.4	489.8
	251.1	279.7	305.3	328.8	350.7	390.5	426.5	459.4	489.8
1	2.764	3.498	4.100	4.581	4.945	5.378	5.705	6.207	6.914
	2.768	3.512	4.131	4.635	5.027	5.528	5.855	6.279	6.936
2	0.846	1.289	1.739	2.170	2.581	3.305	3.712	3.773	3.685
	0.846	1.289	1.740	2.172	2.585	3.318	3.775	3.928	3.899
3	0.259	0.455	0.684	0.937	1.192	1.716	2.341	2.927	3.252
	0.255	0.441	0.653	0.887	1.119	1.586	2.205	2.872	3.288
4		0.193	0.311	0.447	0.608	0.932	1.209	1.604	2.143
		0.193	0.310	0.445	0.604	0.922	1.165	1.468	1.947
5			0.156	0.235	0.320	0.557	0.814	0.975	1.164
			0.155	0.231	0.312	0.540	0.804	0.971	1.123
6				0.133	0.193	0.318	0.509	0.732	0.864
				0.133	0.192	0.314	0.493	0.719	0.859
7					0.117	0.211	0.311	0.471	0.661
					0.117	0.209	0.308	0.459	0.649
8						0.144	0.223	0.303	0.444
						0.143	0.221	0.299	0.433
9						0.096	0.157	0.229	0.294
						0.096	0.157	0.227	0.291
10							0.118	0.170	0.227
							0.118	0.169	0.226
11							0.083	0.128	0.183
							0.082	0.128	0.182
12								0.102	0.134
								0.102	0.133
13								0.073	0.112
								0.072	0.112
14									0.090
									0.089
15									0.066
									0.066

Замечание 4. По крайней мере, младшие вектора полученных орто-

нормальных базисов можно с хорошей точностью задать аналитическими выражениями:

все координаты нулевого вектора одинаковы и равны $1/\sqrt{N}$.

координаты первого базисного вектора $v_1 = (v_{10}, \dots, v_{1,k-1})$ аппроксимируются многочленом $v_{1i} = f_1(z_k(i))$, где

$$f_1(x) = -0.6338603\ x + 0.35225387\ x^3 \quad \text{и} \quad z_k(i) = \frac{2i+1}{2k} - 1;$$

координаты второго базисного вектора $v_2 = (v_{20}, \dots, v_{2,k-1})$ аппроксимируются многочленом $v_{2i} = f_2(z_k(i))$, где

$$f_2(x) = 0.35865076 - 1.7480666\ x^2 + 1.12339755\ x^4;$$

координаты третьего базисного вектора v_3 аппроксимируются многочленом $v_{3i} = f_3(z_k(i))$, где

$$f_3(x) = 1.79751994\ x - 7.4007959\ x^3 + 8.43063786\ x^5 - 3.1493354\ x^7;$$

координаты четвертого базисного вектора v_4 аппроксимируются многочленом $v_{4i} = f_4(z_k(i))$, где

$$f_4(x) = 0.355755 - 7.46509\ x^2 + 24.58347\ x^4 - 27.8172\ x^6 + 10.71917\ x^8.$$

Библиографический список

1. *Ватолин Д., Ратушняк А., Смирнов М., Юдин В.* Методы сжатия данных. Устройство архиваторов, сжатие изображений и видео. М.: Диалог-МИФИ. 2002. 384 с.
2. Методы компьютерной обработки изображений / Под ред. В. А. Сойфера. 2-е изд. испр. М.: Физматлит, 2003. 784 с.
3. *Jahne B.* Digital Image Processing. Berlin: Springer-Verlag, 2002. 598 p.