Вестник Ивановского государственного университета

Серия «Естественные, общественные науки»

Вып. 2 / 2009 С. 68 – 71

Д. Н. Азаров, Е. И. Чуракова

ОБ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ КОНЕЧНЫМИ p-ГРУППАМИ НЕКОТОРЫХ РАСЩЕПЛЯЕМЫХ РАСШИРЕНИЙ

Получены критерии аппроксимируемости конечными p-группами и нильпотентными группами для расщепляемого расширения свободной абелевой группы ранга 2 с помощью бесконечной циклической группы.

Split extensions of 2-generated free Abelian group by infinite cyclic group are considered. For such groups the necessary and sufficient conditions to be residually a finite p-group and to be residually a nilpotent group are obtained.

Ключевые слова: расщепляемое расширение группы, аппроксимируемость конечными p-группами.

Key words: split extension of group, residuality a finite p-groups.

УДК 512.543.

Пусть X — произвольная группа. Обозначим через π_X множество всех простых чисел p таких, что группа X аппроксимируема конечными p-группами. Если X — конечно порожденная нильпотентная группа без кручения, то π_X совпадает с множеством всех простых чисел [5]. Хорошо известно [3], что если полициклическая группа аппроксимируема конечными p-группами для каждого p из некоторого бесконечного множества простых чисел, то она нильпотентна и, следовательно, аппроксимируема конечными p-группами для любого простого p. Таким образом, для полициклической группы X множество π_X либо конечно, либо совпадает с множеством всех простых чисел. С другой стороны, для каждого конечного множества π простых чисел существует полициклическая группа X без кручения такая, что $\pi_X = \pi$. Соответствующий пример построен в [1] и представляет собой некоторое расщепляемое расширение. В данной статье будет получено эффективное описание множества π_G для произвольной группы G, являющейся расщепляемым расширением свободной абелевой группы ранга 2 с помощью бесконечной циклической группы.

Далее через G будем обозначать расщепляемое расширение свободной абелевой группы H ранга 2 с помощью бесконечной циклической группы T, порожденной элементом t. Пусть φ — автоморфизм группы H, сопоставляющий каждому элементу $h \in H$ элемент $t^{-1}ht$. Обозначим через A матрицу автоморфизма φ в некотором базисе группы H, а через E — единичную 2×2-матрицу. Здесь доказывается следующий результат.

Теорема. *Если* $\det(A+E) \neq 0$, *то множество* π_G *совпадает с множеством всех простых делителей числа* $\det(A-E)$. *Если же* $\det(A+E) = 0$, *то* $\pi_G = \{2\}$.

В качестве следствий из этой теоремы отметим следующие два утверждения, первое из которых независимо доказано в [1].

Следствие 1. *Пусть* π *— непустое конечное множество простых чисел. Если автоморфизм* φ *группы* H *задается матрицей*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & m+2 \end{pmatrix},$$

где m *— произведение всех простых чисел из* π, *то* $\pi_G = \pi$.

Следствие 2. *Для группы* G *следующие три условия равносильны:*

(1) *группа* G *аппроксимируема нильпотентными группами;*
(2) $\det(A-E) \neq \pm 1$;
(3) *множество* π_G *не пусто.*

Простые примеры показывают, что в сформулированной выше теореме и в следствии 2 существенно то обстоятельство, что ранг свободной абелевой группы H равен 2.

Еще одно применение сформулированной выше теоремы связано с результатом работы [4], относящимся к произвольному расщепляемому расширению F конечно порожденной группы R с помощью группы S. Пусть p — простое число. Обозначим через R_p пересечение всех нормальных подгрупп группы R индекса p, а через $\Phi(F,p)$ — множество всех автоморфизмов фактор-группы R/R_p, индуцированных сопряжениями на R элементами из S. В [4] доказывается, что если $p \in \pi_R$, $p \in \pi_S$ и $\Phi(F,p)$ — конечная p-группа, то $p \in \pi_F$. Необратимость этого утверждения может быть установлена с помощью сформулированной выше теоремы. Действительно, пусть $A = \begin{pmatrix} p-1 & p \\ p & p+1 \end{pmatrix}$, где p — нечетное простое число. Тогда $\det(A \pm E) = \pm 2p$, и поэтому $p \in \pi_G$. Но, с другой стороны, автоморфизм $\overline{\varphi}$ группы H/H_p, индуцированный автоморфизмом φ, имеет порядок 2, и поэтому группа $\Phi(G,p) = \{\overline{\varphi}, \mathrm{id}\}$ не является p-группой.

Перейдем теперь к доказательству основного результата работы. Пусть $\gamma_n(G)$ — n-й член нижнего центрального ряда группы G (где, напомним, $\gamma_1(G) = G$ и $\gamma_{n+1}(G)$ — взаимный коммутант $\gamma_n(G)$ и G). В [1] доказано, что для каждого $n \geqslant 2$

$$\gamma_n(G) = H(\varphi - \mathrm{id})^{n-1} \tag{1}$$

— образ H относительно эндоморфизма $(\varphi - \mathrm{id})^{n-1}$. Хорошо известно, что если эндоморфизм ψ свободной абелевой группы V конечного ранга инъективен, то индекс $[V : V\psi]$ совпадает с модулем определителя матрицы эндоморфизма ψ. Отсюда и из того, что матрица эндоморфизма $(\varphi - \mathrm{id})^{n-1}$ совпадает с матрицей $(A-E)^{n-1}$, следует, что если число $d = \det(A-E)$ отлично от 0, то $\left[H : H(\varphi - \mathrm{id})^{n-1}\right] = |\det(A-E)|^{n-1} = |d|^{n-1}$, и тогда в силу (1)

$$[H : \gamma_n(G)] = |d|^{n-1}. \tag{2}$$

Обозначим через $\pi(d)$ множество всех простых делителей числа d.

Лемма 1. *Пусть* $\det(A+E) \neq 0$ *и* $d \neq 0$. *Тогда* $\pi_G = \pi(d)$.

Доказательство. Так как $\det(A \pm E) \neq 0$, то для любого неединичного элемента $h \in H$ имеем $h(\varphi \pm \mathrm{id}) \neq 1$, т. е. $t^{-1}ht \neq h^{\pm 1}$. Поэтому в H нет неединичных циклических подгрупп, ивариантных в G.

Покажем, что $\pi(d) \subseteq \pi_G$. Пусть $p \in \pi(d)$. Так как $d \neq 0$, то в силу (2) для каждого $n \geqslant 2$ группа $H_n = H/\gamma_n(G)$ является конечной абелевой группой порядка $|d|^{n-1}$. Отсюда и из того, что $p \in \pi(d)$, следует, что p^{n-1} делит порядок группы H_n. Поэтому если P_n — p-компонента группы H_n, то $|P_n| \geqslant p^{n-1}$. Пусть Q_n — произведение всех примарных компонент группы H_n, отличных от P_n. Тогда $H_n/Q_n \simeq P_n$ — конечная p-группа. Так как $Q_n \leqslant H_n = H/\gamma_n(G)$, то $Q_n = L_n/\gamma_n(G)$, где L_n — подгруппа группы H, содержащая $\gamma_n(G)$. Поскольку Q_n характеристична в H_n и H_n инвариантна в $G_n = G/\gamma_n(G)$, то Q_n инвариантна в G_n. Отсюда следует, что L_n инвариантна в G. Так как $\gamma_n(G)$ содержится в L_n, то фактор-группа G/L_n нильпотентна и, кроме того, она является расширением конечной p-группы $H/L_n \simeq (H/\gamma_n(G))\,/\,(L_n/\gamma_n(G)) = H_n/Q_n \simeq P_n$ с помощью бесконечной циклической группы. Поэтому группа G/L_n аппроксимируема конечными p-группами [5]. Так как $|H/L_n| = |P_n| \geqslant p^{n-1}$, то индексы подгрупп L_n в группе H не ограничены. Поэтому подгруппа $L = \bigcap_{n=2}^{\infty} L_n$ имеет в H бесконечный индекс. Отсюда и из того, что H — свободная абелева группа ранга 2, следует, что L — циклическая группа, являющаяся к тому же инвариантной подгруппой группы G. Но выше отмечалось, что H не содержит неединичных циклических подгрупп, инвариантных в G. Поэтому $L = 1$, т. е. G аппроксимируема фактор-группами G/L_n, которые, в свою очередь, аппроксимируемы конечными p-группами. Отсюда следует, что G аппроксимируема конечными p-группами, т. е. $p \in \pi_G$.

Покажем теперь, что $\pi_G \subseteq \pi(d)$. Предположим, что $p \in \pi_G$, и покажем, что тогда $p \in \pi(d)$. Допустим противное: p взаимно просто с d. Пусть ρ — гомоморфизм группы G на конечную p-группу. Так как любая конечная p-группа нильпотентна, то гомоморфизм ρ проходит через естественный гомоморфизм $G \to G/\gamma_n(G)$ для достаточно большого n. Отсюда и из того, что порядок группы $H/\gamma_n(G)$ в силу (2) совпадает с числом $|d|^{n-1}$, взаимно простым с p, следует, что $H\rho = 1$. Это противоречит тому, что $p \in \pi_G$. Таким образом, $\pi_G \subseteq \pi(d)$, и лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть* $\det(A+E) \neq 0$ *и* $d = 0$. *Тогда* $\pi_G = \pi(d)$.

Доказательство. Так как $d = 0$, то множество $\pi(d)$ совпадает с множеством всех простых чисел. Поэтому доказательство равенства $\pi_G = \pi(d)$ сводится к доказательству нильпотентности группы G. Так как $d = 0$, то эндоморфизм $\varphi - \mathrm{id}$ не инъективен. Отсюда и из того, что $\varphi - \mathrm{id}$ — эндоморфизм свободной абелевой группы H ранга 2, следует, что $H(\varphi - \mathrm{id})$ — циклическая группа. Но в силу (1) $H(\varphi - \mathrm{id}) = \gamma_2(G)$. Поэтому $\gamma_2(G)$ порождается некоторым элементом $h \in H$. Так как $\gamma_2(G)$ нормальна в G, то $t^{-1}ht = h^{\pm 1}$. Покажем, что $t^{-1}ht = h$. Допустим противное. Тогда $t^{-1}ht = h^{-1}$ и $h \neq 1$. Отсюда следует, что эндоморфизм $\varphi + \mathrm{id}$ не инъективен. Но это невозможно, поскольку $\det(A+E) \neq 0$. Таким образом, $t^{-1}ht = h$. Поэтому $\gamma_2(G)$ — центральная подгруппа группы G, и, следовательно, группа G нильпотентна. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть* $\det(A+E)=0$. *Тогда* $\pi_G=\{2\}$.

Доказательство. Так как $\det(A+E)=0$, то в H существует неединичный элемент h такой, что $t^{-1}ht=h^{-1}$. Обозначим через x элемент группы H, являющийся корнем из h максимальной возможной степени. Так как извлечение корня в H обладает свойством однозначности и $t^{-1}ht=h^{-1}$, то $t^{-1}xt=x^{-1}$. Поэтому циклическая подгруппа X группы H, порожденная элементом x, инвариантна в G. В силу выбора элемента x подгруппа X изолирована в H. Таким образом, X — бесконечная циклическая изолированная подгруппа свободной абелевой группы H ранга 2. Поэтому H/X — бесконечная циклическая группа, причем, как отмечалось выше, X инвариантна в G. Мы получаем, таким образом, в группе G нормальный ряд $1\leqslant X\leqslant H\leqslant G$ с циклическими факторами. Следовательно, группа G сверхразрешима, причем она не является нильпотентной, поскольку $t^{-1}ht=h^{-1}$. Поэтому требуемое равенство $\pi_G=\{2\}$ вытекает из следующих двух результатов работы [2]: любая сверхразрешимая группа без кручения аппроксимируема конечными 2-группами; если сверхразрешимая группа аппроксимируема конечными p-группами для нечетного простого числа p, то она нильпотентна. Лемма доказана.

Утверждение теоремы, сформулированной выше, является непосредственным следствием лемм 1, 2 и 3.

Докажем теперь следствие 1. Пусть π — непустое конечное множество простых чисел, m — произведение всех чисел из π и

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & m+2\end{pmatrix}.$$

Тогда (в обозначениях, введенных выше) $d=-m$ и поэтому $\pi(d)=\pi$. Так как $\det(A+E)=m+4\neq 0$ и $d\neq 0$, то, по лемме 1, $\pi_G=\pi(d)=\pi$.

Остается доказать следствие 2. Если $d=\pm1$, то в силу (2) для каждого $n\geqslant 2$ $\gamma_n(G)=H$, и поэтому группа G не аппроксимируема нильпотентными группами. Таким образом, если группа G аппроксимируема нильпотентными группами, то $d\neq\pm1$.

Пусть теперь $d\neq\pm1$, т. е. множество $\pi(d)$ не пусто. Если $\det(A+E)\neq 0$, то в силу доказанной теоремы $\pi_G=\pi(d)$, и поэтому π_G не пусто. Если же $\det(A+E)=0$, то, по лемме 3, $\pi_G=\{2\}$ — непустое множество. Таким образом, если $d\neq\pm1$, то множество π_G не пусто.

Наконец, если множество π_G не пусто, то группа G аппроксимируема конечными p-группами хотя бы для одного простого числа p, и поэтому группа G аппроксимируема нильпотентными группами. Следствие 2 доказано.

Библиографический список

1. *Азаров Д. Н.* Об аппроксимируемости конечными p-группами полициклических групп // Математика и ее приложения: Журн. Иван. мат. об-ва. Иваново, 2004. № 1. С. 21—24.
2. *Азаров Д. Н., Молдаванский Д. И.* Аппроксимируемость сверхразрешимых групп конечными p-группами // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. Вып. 2 (1999). С. 8—9.

3. *Сексенбаев К.* К теории полициклических групп // Алгебра и логика. 1961. Т. 4. Вып. 3. С. 79—83.
4. *Якушев А. В.* Аппроксимируемость конечными p-группами расщепляющихся расширений групп // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. Вып. 3 (2000). С. 119—124.
5. *Gruenberg K. W.* Residual properties of infinite soluble groups // Proc. London Math. Soc. 1957. Vol. 7. P. 29—62.