Вестник Ивановского государственного университета

Серия «Естественные, общественные науки»

Вып. 2 / 2009 С. 72 – 85

А. С. Белов

О НОВЫХ КОЭФФИЦИЕНТНЫХ УСЛОВИЯХ РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОГО РЯДА

Предлагаются новые достаточные условия на коэффициенты тригонометрического ряда для равномерной сходимости (ограниченности) его частных сумм.

The new sufficient conditions on coefficients of trigonometrical series for uniform convergence (boundedness) its partial sums are offered.

Ключевые слова: тригонометрические ряды, равномерная сходимость.

Key words: trigonometrical series, uniform convergence.

УДК 517.5.

Введение

Основным объектом исследования в этой статье является тригонометрический ряд

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \qquad \Bigl(\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \Bigr), \tag{1}$$

записанный в действительной или комплексной форме. Как обычно, $a_n = c_n + c_{-n}$, $b_n = (c_n - c_{-n})i$, $A_n(x) = a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) = c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}$, $S_n(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k(x)$, $\sigma_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_k(x)$, $\tilde{A}_n(x) = a_n \sin(nx) - b_n \cos(nx)$, $\tilde{S}_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \tilde{A}_k(x)$, $\Delta a_n = a_n - a_{n+1}$ при всех $n \geq 0$. Если $f \in L^{\infty}_{2\pi}$, то $\|f\|_{\infty} = \mathrm{esssup}_x |f(x)|$.

Хорошо известно (см. [1, гл. 1, § 60]), что частные суммы ряда (1) сходятся (ограничены) в метрике $C_{2\pi}$ тогда и только тогда, когда он является рядом Фурье непрерывной (существенно ограниченной) функции и

$$\|S_n - \sigma_n\|_{\infty} = o(1) \quad (\text{соответственно} = O(1)). \tag{2}$$

Здесь и далее, как обычно, предполагаем, что n стремится к бесконечности. Квадратные скобки всюду далее обозначают целую часть.

Справедлива следующая

Лемма 1. *Для любого ряда* (1) *условие* (2) *эквивалентно условию*

$$\|\tilde{S}_n - \tilde{\sigma}_n\|_{\infty} = o(1) \quad (\textit{соответственно } = O(1)). \tag{3}$$

© А. С. Белов, 2009

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 08–01–00302)

В частности, если выполнено условие (2), *то*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} ka_k = o(1) \quad (\textit{соответственно } = O(1)) \tag{4}$$

и

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} kb_k = o(1) \quad (\textit{соответственно } = O(1)). \tag{5}$$

Доказательство первой части леммы 1 можно найти в [2, лемма 3]. Поскольку

$$\Big| \frac{1}{(n+1)} \sum_{k=1}^{n} ka_k \Big| = |S_n(0) - \sigma_n(0)| \leqslant \|S_n - \sigma_n\|_\infty \,,$$

то из (2) вытекает (4). Аналогично из (3) вытекает (5).

Если частные суммы ряда (1) равномерно ограничены, т. е. существует такая постоянная $C_0 \in [0,\infty)$, что

$$\|S_n\|_\infty \leqslant C_0 \quad \text{при всех} \quad n \geqslant 0\,, \tag{6}$$

то последовательность $\{S_n(0)\}_{n=0}^{\infty}$ ограничена, т. е.

$$\sup_{n\geqslant 1}\Big|\sum_{k=1}^{n} a_k\Big| < \infty\,. \tag{7}$$

Пусть

$$K_1(x) = \left[\frac{\pi}{|x|}\right] \ \text{ и } \ K_2(x) = 2^{[\log_2(\pi/|x|)]} \ \text{ при } \ 0 < |x| \leqslant \pi\,. \tag{8}$$

Тогда

$$\frac{\pi}{2|x|} < K_2(x) \leqslant K_1(x) \leqslant \frac{\pi}{|x|} \quad \text{при всех} \quad x \in [-\pi,0)\cup(0,\pi]\,.$$

Пусть далее $K(x)$ обозначает любую из функций $K_1(x)$ или $K_2(x)$, т. е. в каждом утверждении, где используется функция $K(x)$, можно вместо нее взять любую из функций (8) и утверждение останется справедливым, поскольку в доказательствах будут использоваться только следующие свойства функции $K(x)$: она принимает натуральные значения на $[-\pi,0)\cup(0,\pi]$ и $K(-x) = K(x)$; функция $K(x)$ не возрастает на $(0,\pi]$ и

$$\frac{\pi}{2|x|} \leqslant K(x) \leqslant \frac{\pi}{|x|} \quad \text{при всех} \quad x \in [-\pi,0)\cup(0,\pi]\,. \tag{9}$$

Если ряд (1) задан, то при любом натуральном q и $x \in [-\pi,0)\cup(0,\pi]$ будем обозначать

$$R_q(x) = \sup_{n\geqslant qK(x)}\Big|\sum_{k=qK(x)}^{n} A_k(x)\Big|\,. \tag{10}$$

В этой статье рассматриваются тригонометрические ряды (1), которые удовлетворяют условиям

$$|a_n| + |b_n| \to 0 \qquad \text{при} \qquad n \to \infty \tag{11}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(|\Delta a_n| + |\Delta b_n| \right) < \infty\,. \tag{12}$$

Верна следующая основная

Теорема 1. *Пусть ряд* (1) *удовлетворяет условиям* (11) *и* (12). *В этом случае справедливы следующие два утверждения.*

a) Ряд (1) *сходится равномерно на прямой, т. е. частные суммы ряда* (1) *сходятся в метрике* $C_{2\pi}$, *тогда и только тогда, когда ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \textit{сходится} \tag{13}$$

и выполнены условия

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k b_k \to 0 \qquad \textit{при} \qquad n \to \infty \tag{14}$$

и

$$\varliminf_{q\to\infty} \varlimsup_{x\to 0} R_q(x) = 0\,. \tag{15}$$

b) Частные суммы ряда (1) *равномерно ограничены на прямой, т. е. в метрике* $C_{2\pi}$, *тогда и только тогда, когда выполнены условие* (7) *и условия*

$$\sup_{n\geqslant 1} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k b_k \right| < \infty \tag{16}$$

и

$$\inf_{q\geqslant 1} \varlimsup_{x\to 0} R_q(x) < \infty\,. \tag{17}$$

При натуральных q и N положим

$$\Delta_q(a,N) = N \min_{m=1,\ldots,N} \left(\frac{1}{m} \sum_{k=qN}^{\infty} |a_k - a_{k+m}| \right). \tag{18}$$

Аналогично заменой всюду в (18) буквы a на b определяется $\Delta_q(b,N)$. Из теоремы 1 вытекает следующая

Теорема 2. *a) Если для ряда* (1) *выполнены условия* (11), (12), (13), (14) *и условия*

$$\varliminf_{q\to\infty} \varlimsup_{n\to\infty} \Delta_q(a,2^n) = 0 \quad \textit{и} \quad \varliminf_{q\to\infty} \varlimsup_{n\to\infty} \Delta_q(b,2^n) = 0\,, \tag{19}$$

то ряд (1) *сходится равномерно на прямой.*

b) Если для ряда (1) *выполнены условия* (11), (12), (7), (16) *и условия*

$$\inf_{q\geqslant 1}\varlimsup_{n\to\infty}\Delta_q(a,2^n)<\infty \quad \text{и} \quad \inf_{q\geqslant 1}\varlimsup_{n\to\infty}\Delta_q(b,2^n)<\infty\,, \tag{20}$$

то частные суммы ряда (1) *равномерно ограничены на прямой.*

Из теоремы 2 сразу вытекает

Следствие 1. *Пусть ряд* (1) *удовлетворяет условиям* (11) *и* (12) *и условию*

$$\sup_{n\geqslant 1}\Big(n\sum_{k=n}^{\infty}(\,|\Delta a_k|+|\Delta b_k|\,)\Big)<\infty\,. \tag{21}$$

Тогда справедливы следующие два утверждения.

a) Ряд (1) *сходится равномерно на прямой тогда и только тогда, когда верны условия* (13) *и* (14).

b) Частные суммы ряда (1) *равномерно ограничены на прямой тогда и только тогда, когда верны условия* (7) *и* (16).

Поскольку (см. (18))

$$\Delta_q(a,N)\leqslant\sum_{k=qN}^{\infty}|a_k-a_{k+N}|\,,$$

то условия теоремы 2 выполнены для любого абсолютно сходящегося ряда (1), в частности для абсолютно сходящегося лакунарного ряда. Поэтому теорема 2 значительно сильнее следствия 1, поскольку для лакунарного ряда условие (21) эквивалентно условию $\sup_{n\geqslant 1}(\,n\,(\,|a_n|+|b_n|\,))<\infty$, которое для некоторых абсолютно сходящихся лакунарных рядов может не выполняться, например для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{-2}\cos(\,2^n x\,)\,.$$

Отметим, что условие (21) можно заменить на условие

$$\sup_{n\geqslant 1}\Big(2^n\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}}(\,|\Delta a_k|+|\Delta b_k|\,)\Big)<\infty\,. \tag{22}$$

Действительно, условие (22) означает, что

$$\sum_{k=2^n+1}^{\infty}(\,|\Delta a_k|+|\Delta b_k|\,)=O(2^{-n})\,,$$

а последнее условие эквивалентно (21).

Положим $a'_k=a_k$, $b'_k=b_k$ при $k=0,1$ и

$$a'_k=\frac{1}{2^n}\sum_{j=2^n+1}^{2^{n+1}}a_j\,,\quad b'_k=\frac{1}{2^n}\sum_{j=2^n+1}^{2^{n+1}}b_j \tag{23}$$

при всех $k = 2^n+1, \ldots, 2^{n+1}$ и $n = 0,1,\ldots$. Пусть $a''_k = a_k - a'_k$, $b''_k = b_k - b'_k$ при всех $k = 0,1,\ldots$. Из теоремы 1 и следствия 1 получается

Теорема 3. *Пусть ряд* (1) *удовлетворяет условиям* (11) *и* (12). *В этом случае частные суммы ряда* (1) *равномерно сходятся* (*ограничены*) *на прямой тогда и только тогда, когда выполнены условие* (4), *условие* (13) (*соответственно* (7)) *и частные суммы каждого из рядов*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a''_n \cos(nx)\,, \tag{24}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b''_n \sin(nx) \tag{25}$$

равномерно сходятся (*ограничены*) *на прямой.*

Обратим внимание, что в каждом утверждении этой статьи переход к случаю, указанному в круглых скобках, производится во всех условиях одновременно.

Отметим, что утверждение b) следствия 1 легко доказывается непосредственно хорошо известным способом оценивания с помощью преобразования Абеля (см. [1, гл. 1, § 30; гл. 10, § 1]). Утверждение a) следствия 1, возможно, является новым. Конечно, если вместо (21) выполнено более сильное условие

$$n\sum_{k=n}^{\infty}\left(\,|\Delta a_k| + |\Delta b_k|\,\right) \to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty\,, \tag{26}$$

то в этом случае утверждение a) следствия 1 довольно широко известно и легко доказывается непосредственно упомянутым выше хорошо известным способом оценивания с помощью преобразования Абеля (см. [1, гл. 1, § 30; гл. 10, § 1]). Новизна следствия 1, насколько нам известно, состоит в том, что вместо (26) рассматривается условие (21).

Возникает вопрос, нельзя ли улучшить условие (21) в следствии 1, заменив его на условие

$$\sum_{k=n}^{\infty}\left(\,|\Delta\, a_k| + |\Delta\, b_k|\,\right) \leqslant \frac{\Phi(n)}{n} \quad \text{при всех} \quad n\geqslant 1\,, \tag{27}$$

где последовательность положительных чисел $\{\Phi(n)\}_{n=1}^{\infty}$ стремится к бесконечности. Оказывается, условие (21) улучшить таким образом нельзя. Справедлива следующая

Теорема 4. *Для любой последовательности положительных чисел* $\{\Phi(n)\}_{n=1}^{\infty}$, *которая стремится к бесконечности, существуют такие две последовательности действительных чисел* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *и* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, *что ряды*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

сходятся,

$$\left|\,\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k a_k\,\right| + \left|\,\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k b_k\,\right| \to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty$$

и верны условия (11) *и* (27), *но частные суммы и ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) \,, \tag{28}$$

и ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) \tag{29}$$

не ограничены в метрике $C_{2\pi}$ *и, в частности, и ряд* (28), *и ряд* (29) *не сходятся равномерно на прямой, хотя и сходятся всюду. Более того, если через* $f(x)$ *обозначить сумму любого из рядов* (28) *или* (29), *то функция* f *окажется не ограниченной на прямой, но* $f \in L^p_{2\pi}$ *при всех* $p \in [1\,,\infty)$.

Отметим, что частные суммы ряда (1) сходятся (ограничены) в метрике $C_{2\pi}$ тогда и только тогда, когда этим свойством обладают частные суммы каждого из рядов (28) и (29), достаточно вместе с рядом (1) рассмотреть ряд, который получается из (1) заменой x на $-x$.

Доказательство теорем 1, 2 и 3, которое изложено в § 2, и является основной целью этой статьи. В § 1 приведены некоторые вспомогательные оценки, используемые далее. Теорема 4, в силу ограничений на объем статьи, приведена без доказательства и сформулирована по причине ее тесной связи с рассматриваемыми вопросами. Прежде всего теорема 4 показывает полезность и обоснованность перехода от условия вида (21) к условию вида (19), поскольку условие (21) является весьма ограничительным и, как утверждает теорема 4, его нельзя улучшить в указанном выше смысле.

§ 1. Некоторые вспомогательные утверждения

Пусть последовательность комплексных чисел $a = \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ пока произвольна. Мы будем налагать на нее условия

$$a_n \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\Delta a_n| < \infty \,. \tag{1.1}$$

Лемма 1.1. *Пусть последовательность* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *удовлетворяет условиям* (1.1). *Тогда для любых натуральных* q *и* N *при всех* x *таких, что* $\pi/2 \leqslant N|x| \leqslant \pi$, *верны оценки*

$$\sup_{\tau \geqslant qN} \Big| \sum_{k=qN}^{\tau} a_k\, e^{ikx} \Big| \leqslant \sqrt{2}\, N \min_{m=1,\,\dots,\,N} \Big(\frac{1}{m} \sum_{k=qN}^{\infty} |a_k - a_{k+m}| \Big) \,, \tag{1.2}$$

$$\sup_{\tau \geqslant qN} \Big| \sum_{k=qN}^{\tau} a_k\, \cos(kx) \Big| \leqslant \sqrt{2}\, N \min_{m=1,\,\dots,\,N} \Big(\frac{1}{m} \sum_{k=qN}^{\infty} |a_k - a_{k+m}| \Big) \,, \tag{1.3}$$

$$\sup_{\tau \geqslant qN} \Big| \sum_{k=qN}^{\tau} a_k\, \sin(kx) \Big| \leqslant \sqrt{2}\, N \min_{m=1,\,\dots,\,N} \Big(\frac{1}{m} \sum_{k=qN}^{\infty} |a_k - a_{k+m}| \Big) \tag{1.4}$$

и существует такое натуральное m, *что*

$$\frac{N}{2} < m \leqslant N \tag{1.5}$$

и

$$\frac{1}{m} \sum_{k=qN}^{\infty} |a_k - a_{k+m}| = \min_{j=1,\,\dots,\,N} \Big(\frac{1}{j} \sum_{k=qN}^{\infty} |a_k - a_{k+j}| \Big) . \tag{1.6}$$

Доказательство. Для любого натурального j обозначим

$$d(j) = \frac{1}{j} \sum_{k=qN}^{\infty} |a_k - a_{k+j}| . \tag{1.7}$$

Тогда

$$2d(2j) = \frac{1}{j} \sum_{k=qN}^{\infty} |(a_k - a_{k+j}) + (a_{k+j} - a_{k+2j})| \leqslant$$
$$\leqslant d(j) + \frac{1}{j} \sum_{k=qN+j}^{\infty} |a_k - a_{k+j}| \leqslant 2d(j) ,$$

т. е. $d(2j) \leqslant d(j)$ при всех натуральных j. Обозначим через m наибольшее натуральное число такое, что $m \leqslant N$ и $d(m) = \min_{j=1,\,\dots,\,N} d(j)$. Поскольку $d(2m) \leqslant d(m)$, то $2m > N$, т. е. в силу (1.7) верно и (1.5), и (1.6). Теперь возьмем любое натуральное $\tau \geqslant qN$ и положим $\gamma_k = a_k$ при $k = qN, \dots, \tau$ и $\gamma_k = 0$ при остальных k. Тогда при каждом $\nu = qN, \dots, qN + m - 1$ имеем

$$\Big| \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_{\nu+jm} \, e^{i(\nu+jm)x} \Big| = \Big| \sum_{j=0}^{\infty} (\gamma_{\nu+jm} - \gamma_{\nu+(j+1)m}) \sum_{s=0}^{j} e^{i(\nu+sm)x} \Big| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2\,|\gamma_{\nu+jm} - \gamma_{\nu+(j+1)m}|}{|1 - e^{imx}|} \leqslant \frac{1}{\sin(m|x|/2)} \sum_{j=0}^{\infty} |\gamma_{\nu+jm} - \gamma_{\nu+(j+1)m}| .$$

Отсюда

$$\Big| \sum_{k=qN}^{\tau} a_k \, e^{ikx} \Big| = \Big| \sum_{\nu=qN}^{qN+m-1} \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_{\nu+jm} \, e^{i(\nu+jm)x} \Big| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{\nu=qN}^{qN+m-1} \frac{1}{\sin(m|x|/2)} \sum_{j=0}^{\infty} |\gamma_{\nu+jm} - \gamma_{\nu+(j+1)m}| =$$
$$= \frac{1}{\sin(m|x|/2)} \sum_{k=qN}^{\infty} |a_k - a_{k+m}| .$$

Поскольку $\frac{\pi m}{2N} \leqslant m|x| \leqslant \frac{\pi m}{N} \leqslant \pi$, то $\sin\big(\frac{m|x|}{2}\big) \geqslant \sin\big(\frac{\pi m}{4N}\big) \geqslant \frac{m}{N} \sin\big(\frac{\pi}{4}\big) = \frac{m\sqrt{2}}{2N}$ и верна оценка

$$\Big| \sum_{k=qN}^{\tau} a_k \, e^{ikx} \Big| \leqslant \frac{\sqrt{2}N}{m} \sum_{k=qN}^{\infty} |a_k - a_{k+m}| = \sqrt{2}N \, d(m) . \tag{1.8}$$

Заменяя x на $-x$, из (1.8) имеем

$$\Big|\sum_{k=qN}^{\tau} a_k\, e^{-ikx}\Big| \leqslant \sqrt{2}N\, d(m)\,.$$

Отсюда и из (1.8) получаем

$$\Big|\sum_{k=qN}^{\tau} a_k\, \cos(kx)\Big| = \frac{1}{2}\Big|\sum_{k=qN}^{\tau} a_k\, e^{ikx} + \sum_{k=qN}^{\tau} a_k\, e^{-ikx}\Big| \leqslant \sqrt{2}N\, d(m)$$

и

$$\Big|\sum_{k=qN}^{\tau} a_k\, \sin(kx)\Big| = \frac{1}{2}\Big|\sum_{k=qN}^{\tau} a_k\, e^{ikx} - \sum_{k=qN}^{\tau} a_k\, e^{-ikx}\Big| \leqslant \sqrt{2}N\, d(m)\,.$$

Из этих оценок и из (1.8), в силу (1.6) и произвольности τ, сразу вытекают оценки (1.2), (1.3) и (1.4). Лемма 1.1 доказана.

Лемма 1.2. *Для любой последовательности* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *и любых натуральных* q *и* N *при всех* x *таких, что* $N|x| \leqslant \pi$, *справедливы оценки*

$$\max_{\tau<qN}\Big|\sum_{k=1}^{\tau} a_k\,(\cos(kx)-1)\Big| \leqslant \pi\,(3+2\ln q)\,\frac{1}{N}\,\max_{k<qN}\Big|\sum_{j=1}^{k} ja_j\Big| \tag{1.9}$$

и

$$\max_{\tau<qN}\Big|\sum_{k=1}^{\tau} a_k\,\sin(kx)\Big| \leqslant \pi\,(2+2\ln q)\,\frac{1}{N}\,\max_{k<qN}\Big|\sum_{j=1}^{k} ja_j\Big|\,. \tag{1.10}$$

В частности, если выполнено условие (4), *то для любого натурального* q *верно условие*

$$\max_{\tau<qK(x)}\Big|\sum_{k=1}^{\tau} a_k\,(\cos(kx)-1)\Big| + \max_{\tau<qK(x)}\Big|\sum_{k=1}^{\tau} a_k\,\sin(kx)\Big| =$$
$$= o(1) \quad (\textit{соответственно } = O(1)) \quad \textit{при}\ \ x\to 0\,. \tag{1.11}$$

Доказательство. Положим $g_1(t) = \frac{\sin t}{t}$, $g_2(t) = \frac{1-\cos t}{|t|}$ при $t\neq 0$, $g_1(0) = 1$, $g_2(0) = 0$. Тогда $g_2(2t) = \sin(|t|)\,g_1(t)$, $|g_1(t)| \leqslant 1$, $|g_2(t)| \leqslant 1$ при всех t. Поскольку $g_1'(t) < 0$ при $t\in(0,\pi]$, то

$$\int_0^{\pi q} |g_1'(t)|\,dt = \int_0^{\pi}(-g_1'(t))\,dt + \int_{\pi}^{\pi q}\frac{|\cos t - g_1(t)|}{t}\,dt \leqslant$$
$$\leqslant g_1(0) - g_1(\pi) + \int_{\pi}^{\pi q}\frac{2}{t}\,dt = 1 + 2\ln q\,. \tag{1.12}$$

Так как $g_2'(t) > 0$ при $t\in(0,\pi/2]$, то

$$\int_0^{\pi q} |g_2'(t)|\,dt = \int_0^{\pi/2} g_2'(t)\,dt + \int_{\pi/2}^{\pi q}\frac{|\sin t - g_2(t)|}{t}\,dt \leqslant g_2(\pi/2)-$$
$$- g_2(0) + \int_{\pi/2}^{\pi}\frac{1}{t}\,dt + \int_{\pi}^{\pi q}\frac{2}{t}\,dt = \frac{2}{\pi} + \ln 2 + 2\ln q\,. \tag{1.13}$$

Пусть теперь натуральное $\tau < qN$. Обозначим

$$\beta_k = \sum_{j=1}^{k} j a_j \quad \text{при всех} \quad k \geqslant 0\,. \tag{1.14}$$

Тогда при $N|x| \leqslant \pi$ имеем $\tau|x| \leqslant \pi q$ и

$$\Big|\sum_{k=1}^{\tau} a_k \,\sin(kx)\Big| = |x|\,\Big|\sum_{k=1}^{\tau} k a_k\, g_1(k|x|)\Big| =$$
$$= |x|\,\Big|\, g_1(\tau|x|)\beta_\tau + \sum_{k=1}^{\tau-1} (g_1(k|x|) - g_1((k+1)|x|))\beta_k\Big| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\pi}{N} \max_{k=1,\,\dots,\,\tau} |\beta_k| \left(|g_1(\tau|x|)| + \sum_{k=1}^{\tau-1} |g_1(k|x|) - g_1((k+1)|x|)| \right).$$

Поскольку

$$|g_1(\tau|x|)| + \sum_{k=1}^{\tau-1} |g_1(k|x|) - g_1((k+1)|x|)| \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{\tau-1} \int_{k|x|}^{(k+1)|x|} |g_1'(t)|\, dt =$$
$$= 1 + \int_{|x|}^{\tau|x|} |g_1'(t)|\, dt \leqslant 1 + \int_{|x|}^{\pi q} |g_1'(t)|\, dt\,,$$

то

$$\Big|\sum_{k=1}^{\tau} a_k \,\sin(kx)\Big| \leqslant \frac{\pi}{N} \max_{k=1,\,\dots,\,\tau} |\beta_k| \left(1 + \int_{|x|}^{\pi q} |g_1'(t)|\, dt \right). \tag{1.15}$$

Аналогично

$$\Big|\sum_{k=1}^{\tau} a_k\, (\cos(kx) - 1)\Big| = |x|\,\Big|\sum_{k=1}^{\tau} k a_k\, g_2(k|x|)\Big| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\pi}{N} \max_{k=1,\,\dots,\,\tau} |\beta_k| \left(1 + \int_{|x|}^{\pi q} |g_2'(t)|\, dt \right).$$

Отсюда и из (1.13) сразу получаем (1.9). Из (1.15) и (1.12) вытекает (1.10).

Если верно (4), то в обозначении (1.14) имеем

$$\max_{k=1,\,\dots,\,n} |\beta_k| = o(n)$$

(соответственно $= O(n)$) и из (1.9) и (1.10) при $N = K(|x|)$ и любом натуральном q в силу (9) получаем (1.11). Лемма 1.2 доказана.

Лемма 1.3. *Если выполнено условие* (13) (*условие* (7)), *то верно условие* (4).

Доказательство. Сразу вытекает из равенства

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k a_k = \sum_{j=1}^{n} a_j - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{k} a_j \right).$$

Лемма 1.3 доказана.

Лемма 1.4. *Условие* (4) *эквивалентно условию*

$$\max_{m=2^n,\,\dots,\,2^{n+1}}\Big|\sum_{k=2^n}^{m} a_k\Big| = o(1) \quad (\textit{соответственно } = O(1))\,. \tag{1.16}$$

Доказательство. Условие (4) эквивалентно условию

$$\max_{m=2^n,\,\dots,\,2^{n+1}}\Big|\sum_{k=2^n}^{m} ka_k\Big| = o(2^n) \quad (\text{соответственно } = O(2^n))\,,$$

а это последнее условие в силу преобразования Абеля (см., например, [2, лемма 1]) эквивалентно условию (1.16). Лемма 1.4 доказана.

§ 2. Доказательство теорем 1, 2 и 3

Пусть задан произвольный ряд (1). Положим

$$F(x) = \sup_{n\geqslant 0}|S_n(x) - S_n(0)|\,. \tag{2.1}$$

Здесь и далее используются обозначения из введения.

Лемма 2.1. *Если частные суммы ряда* (1) *равномерно ограничены на прямой, то функция* (2.1) *неотрицательна и ограничена на прямой и выполнены условия* (7), (16), (17) *и*

$$\sup_{n\geqslant 1}\Big|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} ka_k\Big| < \infty\,. \tag{2.2}$$

Более того, существует такая постоянная $C\in[0,\infty)$, *что для всех натуральных* q *и любого* $x\in[-\pi,0)\cup(0,\pi]$ *справедливы оценки*

$$R_q(x)\leqslant C\,, \tag{2.3}$$

$$\sup_{\tau\geqslant qK(x)}\Big|\sum_{k=qK(x)}^{\tau} a_k\cos(kx)\Big|\leqslant C \quad \textit{и} \quad \sup_{\tau\geqslant qK(x)}\Big|\sum_{k=qK(x)}^{\tau} a_k\sin(kx)\Big|\leqslant C\,. \tag{2.4}$$

Доказательство. В силу (6) существует такая постоянная $C_0\in[0,\infty)$, что

$$|S_n(x)|\leqslant C_0 \quad \text{при всех} \quad n\geqslant 0 \ \text{ и } \ x\,. \tag{2.5}$$

Отсюда сразу вытекает условие (7) и вторые (в скобках) условия (2), (3), (4) и (5). Поэтому по лемме 1.3 выполнены условия (16), (2.2) и $F(x)\leqslant 2C_0$ при всех x. Если же $x\in[-\pi,0)\cup(0,\pi]$, то в силу (10) и (2.5)

$$R_q(x) = \sup_{n\geqslant qK(x)}|\,S_n(x) - S_{qK(x)-1}(x)\,|\leqslant 2C_0$$

и

$$\sup_{n\geqslant qK(x)}\Big|\sum_{k=qK(x)}^{n}(A_k(x)\pm A_k(-x))\Big|\leqslant R_q(x)+R_q(-x)\leqslant 4C_0\,,$$

т. е. верно и (2.3), и (2.4) при $C=2C_0$. В частности, справедливо (17). Лемма 2.1 доказана.

Лемма 2.2. *Если ряд* (1) *равномерно сходится на прямой, то*

$$\lim_{x\to 0}F(x)=0\,, \tag{2.6}$$

выполнены условия (13), (14), (15) *и*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}ka_k\to 0 \qquad \textit{при} \quad n\to\infty\,. \tag{2.7}$$

Более того, для любого натурального q функция (10)

$$R_q(x)\to 0 \qquad \textit{при} \quad x\to 0 \tag{2.8}$$

и также при $x\to 0$ величина

$$\sup_{\tau\geqslant qK(x)}\Big|\sum_{k=qK(x)}^{\tau}a_k\,\cos(kx)\Big|+\sup_{\tau\geqslant qK(x)}\Big|\sum_{k=qK(x)}^{\tau}a_k\,\sin(kx)\Big|\to 0\,. \tag{2.9}$$

Доказательство. Поскольку частные суммы ряда (1) равномерно сходятся, то они равномерно ограничены на прямой, выполнены условия (13), (2), (3), (4), (5), (2.7) и верны все утверждения леммы 2.1. Обозначим через $f(x)$ сумму ряда (1), которая непрерывна. Возьмем произвольное $\varepsilon>0$. Существует такой номер N, что $\|S_n-f\|_\infty<\varepsilon$ для всех натуральных $n\geqslant N$. Тогда при $n\geqslant N$ имеем $|S_n(x)-S_n(0)|\leqslant|S_n(x)-f(x)|+|f(x)-f(0)|+|f(0)-S_n(0)|\leqslant 2\|S_n-f\|_\infty+|f(x)-f(0)|<2\varepsilon+|f(x)-f(0)|$. Поэтому для функции (2.1) при всех x справедлива оценка

$$F(x)\leqslant 2\varepsilon+|f(x)-f(0)|+\sum_{n=0}^{N-1}|S_n(x)-S_n(0)|\,.$$

Следовательно, $\overline{\lim}_{x\to 0}F(x)\leqslant 2\varepsilon$. В силу произвольности $\varepsilon>0$ отсюда вытекает (2.6). Пусть теперь $x\in[-\pi,0)\cup(0,\pi]$ и $n\geqslant qK(x)$. Тогда $|\,S_n(x)-S_{qK(x)-1}(x)\,|\leqslant|S_n(x)-S_n(0)|+|S_n(0)-S_{qK(x)-1}(0)|+|S_{qK(x)-1}(0)-S_{qK(x)-1}(x)|$. Поэтому

$$R_q(x)\leqslant 2F(x)+\sup_{n\geqslant qK(x)}\Big|\sum_{k=qK(x)}^{n}a_k\Big|.$$

Отсюда и из (2.6) следует (2.8) и тем более (15). Из оценки

$$\sup_{n\geqslant qK(x)}\Big|\sum_{k=qK(x)}^{n}(A_k(x)+A_k(-x))\Big|+$$

$$+\sup_{n\geqslant qK(x)}\Big|\sum_{k=qK(x)}^{n}(A_k(x)-A_k(-x))\Big|\leqslant 2R_q(x)+2R_q(-x)$$

и (2.8) вытекает (2.9). Лемма 2.2 доказана.

Отметим, что функция

$$F_*(x) = \sup_{n\geqslant 1}\Big|\sum_{k=1}^{n} a_k\,(\cos(kx)-1)\,\Big| + \sup_{n\geqslant 1}\Big|\sum_{k=1}^{n} b_k\,\sin(kx)\,\Big| =$$
$$= \frac{1}{2}\,(\sup_{n\geqslant 1}|S_n(x)+S_n(-x)-2S_n(0)| + \sup_{n\geqslant 1}|S_n(x)-S_n(-x)|) \leqslant$$
$$\leqslant F(x)+F(-x).$$

Поэтому при условиях леммы 2.1 функция $F_*(x)$ ограничена на прямой, а при условиях леммы 2.2 функция $F_*(x)$ непрерывна в нуле.

Теорема 2.1. *Пусть ряд* (1) *удовлетворяет условиям* (11) *и* (12). *Тогда верны следующие два утверждения.*

a) Если выполнено условие (7) *и функция* $F(x)$ *ограничена в некоторой окрестности нуля, то частные суммы ряда* (1) *равномерно ограничены на прямой.*

b) Если выполнено условие (13) *и* $F(x) \to 0$ *при* $x \to 0$, *то ряд* (1) *сходится равномерно на прямой.*

Доказательство. Пусть выполнены условия (11) и (12). Тогда на каждом сегменте, не содержащем точек, кратных 2π, ряд (1) сходится равномерно и его частные суммы равномерно ограничены на этом сегменте. Если к тому же верно условие (7), то функция $F(x)$ будет ограничена на любом сегменте, не содержащем точек, кратных 2π. Если теперь предположить, что функция $F(x)$ ограничена в некоторой окрестности нуля, то отсюда будет следовать, что она ограничена на отрезке $[-\pi,\pi]$. Отсюда и из (7) вытекает, что частные суммы ряда (1) равномерно ограничены на $[-\pi,\pi]$, а значит, и на всей прямой. Утверждение a) доказано.

Пусть выполнены условия утверждения b). Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда существует такое $\delta \in (0,\pi)$, что при всех $|x| < \delta$ будет $F(x) < \varepsilon$. Найдем такой номер N, что для всех натуральных $n \geqslant N$, $m \geqslant N$ выполнено свойство

$$|\,S_n(x)-S_m(x)\,| < \varepsilon \quad \text{при всех} \quad |x| \in \{0\}\cup[\delta,\pi]\,. \tag{2.10}$$

Тогда при $n \geqslant N$, $m \geqslant N$ и $|x| < \delta$ имеем $|\,S_n(x)-S_m(x)\,| \leqslant |S_n(x) - S_n(0)| + |S_n(0)-S_m(0)| + |S_m(0)-S_m(x)| \leqslant 2F(x) + |S_n(0)-S_m(0)| < 3\varepsilon$. Отсюда и из (2.10) вытекает, что $\|S_n - S_m\|_\infty < 3\varepsilon$ при всех $n \geqslant N$, $m \geqslant N$. Поэтому ряд (1) сходится равномерно на прямой. Теорема 2.1 доказана.

Из лемм 2.1 и 2.2 вытекает, что утверждения a) и b) теоремы 2.1 обратимы, т. е. если частные суммы ряда (1) равномерно сходятся (ограничены) на прямой, то выполнено условие (13) (условие (7)) и функция $F(x)$ непрерывна в нуле (ограничена в любой окрестности нуля).

Доказательство теоремы 1. Необходимость в утверждении a) сразу следует из леммы 2.2, а в утверждении b) — из леммы 2.1. Докажем достаточность. Для любых натуральных q и N при $n \geqslant qN$ имеем

$$|S_n(x) - S_n(0)| \leqslant |S_{qN-1}(x) - S_{qN-1}(0)| + \Big| \sum_{k=qN}^{n} (A_k(x) - a_k) \Big| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{\tau<qN} |S_\tau(x) - S_\tau(0)| + \sup_{m\geqslant qN} \Big| \sum_{k=qN}^{m} A_k(x) \Big| + \sup_{m\geqslant qN} \Big| \sum_{k=qN}^{m} a_k \Big| .$$

Последняя оценка верна и при $n < qN$. Следовательно, при всех x справедлива (см. (2.1)) оценка

$$F(x) \leqslant \max_{\tau<qN} |S_\tau(x) - S_\tau(0)| + \sup_{m\geqslant qN} \Big| \sum_{k=qN}^{m} A_k(x) \Big| + \sup_{m\geqslant qN} \Big| \sum_{k=qN}^{m} a_k \Big| .$$

Отсюда при $x \in [-\pi, 0) \cup (0, \pi]$ и $N = K(x)$ в силу (10) получаем

$$F(x) \leq \max_{\tau<qK(x)} |S_\tau(x) - S_\tau(0)| + R_q(x) + \sup_{m\geqslant qK(x)} \Big| \sum_{k=qK(x)}^{m} a_k \Big| .$$

Поэтому для любого натурального q имеем

$$\varlimsup_{x\to 0} F(x) \leqslant \varlimsup_{x\to 0} \max_{\tau<qK(x)} |S_\tau(x) - S_\tau(0)| +$$

$$+ \varlimsup_{x\to 0} \sup_{m\geqslant qK(x)} \Big| \sum_{k=qK(x)}^{m} a_k \Big| + \varlimsup_{x\to 0} R_q(x) . \qquad (2.11)$$

Если выполнено условие (17), то в правой части (2.11) для некоторого натурального q последнее слагаемое будет конечным, второе слагаемое будет конечным в силу (7), а первое — в силу (1.11). Следовательно, в этом случае функция $F(x)$ будет ограничена в некоторой окрестности нуля и по теореме 2.1 частные суммы ряда (1) будут равномерно ограничены на прямой.

Если выполнены условия (13), (14) и (15), то первое слагаемое в правой части (2.11) обращается в нуль в силу (1.11), а второе слагаемое также обращается в нуль в силу (13) и (9). Поэтому для любого натурального q верна оценка $\varlimsup_{x\to 0} F(x) \leq \varlimsup_{x\to 0} R_q(x)$. Отсюда и из (15) при q стремящемся к бесконечности следует (2.6). По теореме 2.1 получаем, что ряд (1) сходится равномерно на прямой. Теорема 1 доказана.

Следствие 2.1. *a) Если выполнены условия* (11), (12), (13), (14) *и*

$$\lim_{q\to\infty} \varlimsup_{n\to\infty} (\Delta_q(a, 2^n) + \Delta_q(b, 2^n)) = 0 , \qquad (2.12)$$

то ряд (1) *сходится равномерно на прямой.*

b) Если выполнены условия (11), (12), (7), (16) *и*

$$\inf_{q\geqslant 1} \varlimsup_{n\to\infty} (\Delta_q(a, 2^n) + \Delta_q(b, 2^n)) < \infty , \qquad (2.13)$$

то частные суммы ряда (1) *равномерно ограничены на прямой.*

Доказательство. Из (10) и (18) по лемме 1.1 при $x \in [-\pi, 0) \cup (0, \pi]$ и $N = K(x)$ имеем

$$R_q(x) \leqslant \sup_{\tau \geqslant qN} \Big| \sum_{k=qN}^{\tau} a_k \cos(kx) \Big| + \sup_{\tau \geqslant qN} \Big| \sum_{k=qN}^{\tau} a_k \sin(kx) \Big| \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{2}\,(\Delta_q(a, N) + \Delta_q(b, N)) = \sqrt{2}\,(\Delta_q(a, K(x)) + \Delta_q(b, K(x)))\,.$$

Поэтому

$$\varliminf_{q \to \infty} \varlimsup_{x \to 0} R_q(x) \leqslant \sqrt{2}\ \varliminf_{q \to \infty} \varlimsup_{x \to 0} (\Delta_q(a, K(x)) + \Delta_q(b, K(x)))\,.$$

Отсюда видим, что если $K(x) = K_2(x)$, то условие (2.12) означает (15), а условие (2.13) означает (17). По теореме 1 сразу получаем следствие 2.1.

Доказательство теоремы 2. Применим следствие 2.1 отдельно к каждому из рядов (28) и (29). Тогда из условий теоремы 2 вытекает равномерная сходимость (ограниченность) на прямой частных сумм каждого из рядов (28) и (29), а значит, и равномерная сходимость (ограниченность) частных сумм ряда (1). Теорема 2 доказана.

Доказательство следствия 1. Необходимость сразу следует из лемм 2.1 и 2.2. Достаточность вытекает из теоремы 2, стоит лишь в силу (18) заметить, что

$$\Delta_q(a, N) \leqslant \frac{1}{q} \Big(qN \sum_{k=qN}^{\infty} |a_k - a_{k+N}| \Big)\,.$$

Поэтому из (21) следует (19) и тем более (20). Следствие 1 доказано.

Доказательство теоремы 3. Если выполнены условия (11), (12), (4) и (13) (соответственно (7)), то по лемме 1.4 в силу (23) имеем $|a'_k| + |b'_k| = o(1/k)$ (соответственно $= O(1/k)$) и из определяющих формул (23) сразу получаем условие

$$2^n \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} (\,|\Delta a'_k| + |\Delta b'_k|\,) = o(1) \quad (\text{соответственно } = O(1))\,.$$

Поскольку в следствии 1 условия (21) и (22) взаимозаменяемы, то по следствию 1 получаем, что частные суммы ряда

$$\frac{1}{2} a'_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a'_n \cos(nx) + b'_n \sin(nx)) \tag{2.14}$$

равномерно сходятся (ограничены) на прямой. Отсюда выводим, что если частные суммы ряда (1) равномерно сходятся (ограничены) на прямой, то в силу лемм 2.1 и 2.2 тем же свойством обладают и частные суммы каждого из рядов (2.14), (24) и (25). Обратно, если частные суммы каждого из рядов (24) и (25) равномерно сходятся (ограничены) на прямой, то тем же свойством обладают и частные суммы ряда (2.14), а значит, и частные суммы ряда, полученного сложением рядов (2.14), (24) и (25), т. е. ряда (1). Теорема 3 доказана.

Библиографический список

1. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961. 936 с.
2. *Белов А. С.* Об условиях сходимости в среднем тригонометрических рядов Фурье // Изв. Тульск. гос. ун-та. Математика. Механика. Информатика. 1998. Т. 4. Вып. 1. С. 40—46.