Вестник Ивановского государственного университета

Серия «Естественные, общественные науки»

Вып. 2 / 2009 С. 86 – 100

Ю. В. Груздева, С. В. Пухов

ПРИНЦИП ОПТИМАЛЬНОСТИ В ВЫПУКЛЫХ ЗАДАЧАХ ВЕКТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Получены необходимые условия для точки минимума по Парето в выпуклой задаче векторной оптимизации.

The necessary conditions for the Pareto minimum point in the convex vector optimization problem are obtained.

Ключевые слова: упорядоченное векторное пространство, положительный конус, векторная оптимизация, минимум по Парето, функция Лагранжа, седловая точка функции, ядро множества.

Key words: partially ordered vector space, positive cone, vector optimization, Pareto minimum, Lagrange's function, saddle point, core of a set.

УДК 519.6.

§ 1. Конусы и упорядоченность в векторных пространствах

В настоящей работе рассматриваются векторные пространства только над полем вещественных чисел — вещественные векторные пространства (в.в.п.). Пусть X — в.в.п.

Множество A в X называется *выпуклым*, если $\alpha A + (1-\alpha)\,A \subseteq A$ при всех $\alpha \in [0;1]$.

Множество K в X называется *конусом*, если $\alpha K \subseteq K$ при всех $\alpha > 0$.

Конус K в X является выпуклым множеством тогда и только тогда, когда $K + K \subseteq K$. Отметим, что для произвольного множества A в X не обязательно $A + A = 2A$.

Введем в пространстве X *отношение* (*частичного*) *порядка*. Пусть K — конус в X.

а). Для $x_1, x_2 \in X$ пишем $x_1 \overset{K}{\geqslant} x_2$ (или $x_2 \overset{K}{\leqslant} x_1$), если $x_1 - x_2 \in K$. Этим определением в X введено бинарное отношение $\overset{K}{\geqslant}$. При этом конус K в пространстве X называется *положительным*, т. к. $K = \{x \in X : x \overset{K}{\geqslant} 0_X\}$. Очевидно, что $\{x \in X : x \overset{K}{\geqslant} a\} = a + K$ и из неравенств $x_1 \overset{K}{\geqslant} x_2$, $\alpha > 0$ и $\beta < 0$ следуют неравенства $\alpha x_1 \overset{K}{\geqslant} \alpha x_2$ и $\beta x_1 \overset{K}{\leqslant} \beta x_2$.

б). Отношение $\overset{K}{\geqslant}$ будет *рефлексивным*, т. е. $x \overset{K}{\geqslant} x$ при всех $x \in X$, тогда и только тогда, когда $0_X \in K$. Отметим, что конус K называется *заостренным*, если $0_X \in K$.

в). Отношение $\overset{K}{\geqslant}$ будет *антисимметричным*, т. е. из $x_1 \overset{K}{\geqslant} x_2$, $x_2 \overset{K}{\geqslant} x_1$ следует $x_1 = x_2$, если конус K будет *выступающим*, т. е. из $x \in K$, $x \neq 0_X$ следует, что $(-x) \notin K$, или (в случае: $0_X \in K$) из $x_1,\ x_2 \in K,\ x_1 + x_2 = 0_X$ следует, что $x_1 = x_2 = 0_X$.

г). Отношение $\overset{K}{\geqslant}$ будет *транзитивным*, т. е. из $x_1 \overset{K}{\geqslant} x_2$, $x_2 \overset{K}{\geqslant} x_3$ следует $x_1 \overset{K}{\geqslant} x_3$, если конус K будет *выпуклым.*

В дальнейшем будем считать, что (частичный) *порядок* $\overset{K}{\geqslant}$ *введен в* X *именно с помощью конуса* K*, который является выпуклым, выступающим и заостренным.* Тогда это отношение рефлексивно, антисимметрично и транзитивно:

(П1) *рефлексивность*: $x \overset{K}{\geqslant} x,\ x \in X$;

(П2) *антисимметричность*: $x_1 \overset{K}{\geqslant} x_2, x_2 \overset{K}{\geqslant} x_1 \Rightarrow x_1 \overset{K}{=} x_2, x_1, x_2 \in X$;

(П3) *транзитивность*: $x_1 \overset{K}{\geqslant} x_2, x_2 \overset{K}{\geqslant} x_3 \Rightarrow x_1 \overset{K}{\geqslant} x_3,\ x_1, x_2, x_3 \in X$.

Отметим, что при введенном отношении $\overset{K}{\geqslant}$ пространство X не является *совершенно* (*линейно*) *упорядоченным* (т. е. не является множеством, в котором два любых элемента сравнимы, (П4) *линейность*: $x_1 \overset{K}{\geqslant} x_2$ или $x_2 \overset{K}{\geqslant} x_1$, $x_1, x_2 \in X$), а является лишь *частично упорядоченным множеством* (ч.у.м.).

При введенном отношении (частичного) порядка $\overset{K}{\geqslant}$ над неравенствами можно выполнять следующие действия:

(А) умножать неравенство на положительное число

$$x_1 \overset{K}{\geqslant} x_2, \quad \alpha > 0 \Rightarrow \alpha x_1 \overset{K}{\geqslant} \alpha x_2;$$

(Б) почленно складывать неравенства одного знака

$$x_1 \overset{K}{\geqslant} x_2,\ x_3 \overset{K}{\geqslant} x_4 \Rightarrow x_1 + x_3 \overset{K}{\geqslant} x_2 + x_4.$$

Будем также писать $x_1 \overset{K}{>} x_2$, если $x_1 \overset{K}{\geqslant} x_2$ и $x_1 \neq x_2$. Такое отношение транзитивно, но не рефлексивно и не антисимметрично. Верно следующее:

а) $x_1 \overset{K}{>} x_2,\ \alpha > 0 \ \Rightarrow\ \alpha x_1 \overset{K}{>} \alpha x_2$;

б) $x_1 \overset{K}{\geqslant} x_2,\ x_3 \overset{K}{>} x_4 \ \Rightarrow\ x_1 + x_3 \overset{K}{>} x_2 + x_4$ и, значит,

в) $x_1 \overset{K}{>} x_2,\ x_3 \overset{K}{>} x_4 \ \Rightarrow\ x_1 + x_3 \overset{K}{>} x_2 + x_4$.

Поскольку конус K считается заостренным, то условие, что этот конус еще и выступающий, может быть сформулировано так: $K \cap (-K) = \{0_X\}$, т. е. K не содержит прямых, проходящих через вершину 0_X конуса K.

Замечания

1. Вещественное векторное пространство X называется *упорядоченным векторным пространством* (у.в.п.), если в X введено бинарное отношение, которое является рефлексивным, антисимметричным и транзитивным (отношение частичного порядка, обозначенное $\geqslant$) и согласовано с линейной структурой пространства X (см., например, [11, с. 257]):

(ЛП1) $x_1 \geqslant x_2 \Rightarrow x_1 + x \geqslant x_2 + x,\ x \in X$;

(ЛП2) $x_1 \geqslant x_2,\ \lambda > 0\ \Rightarrow\ \lambda x_1 \geqslant \lambda x_2$.

Первое из этих свойств отражает инвариантность порядка относительно трансляций (параллельных переносов, сдвигов), а второе — инвариантность относительно гомотетий (растяжений). Из (ЛП2) следует, что множество $K = \{x \in X\colon\ x \geqslant 0_X\}$ является конусом в X. Этот конус называется *положительным* (относительно порядка $\geqslant$) конусом. Из рефлексивности отношения следует, что $0_X \in K$, т. е. K — заостренный конус, из антисимметричности следует, что K является выступающим конусом, из транзитивности следует, что K — выпуклый конус. Отметим, что (ЛП1) равносильно (Б).

Таким образом, введенный выше с помощью конуса K порядок $\overset{K}{\geqslant}$ превращает X в упорядоченное векторное пространство. Значит, между порядками со свойствами (П1) — (П3), удовлетворяющими также свойствам (ЛП1) и (ЛП2), и заостренными, выступающими, выпуклыми конусами имеется взаимно однозначное соответствие.

2. Напомним, что в пространстве X для конуса K множество

$$K' = \{x' \in X' : \langle x',\ x\rangle \geqslant 0 \text{ для всех } x \in K\}$$

называется (*алгебраически*) *сопряженным* (двойственным, дуальным) конусом. Здесь X' — это пространство линейных функционалов x', определенных на X, а $\langle x',\ x\rangle$ — результат действия линейного функционала x' на элемент $x \in X$.

Если X — топологическое векторное пространство (т.в.п.) и K — конус в X, то (*топологически*) *сопряженным конусом* называется множество

$$K^* = \{x^* \in X^* : \langle x^*,\ x\rangle \geqslant 0 \text{ для всех } x \in K\},$$

где X^* — (*топологически*) *сопряженное* к X пространство, $\langle x^*,\ x\rangle$ — результат действия линейного непрерывного функционала $x^* \in X^*$ на элемент $x \in X$.

3. В обозначениях алгебраически и топологически сопряженных к X пространств существует приятное авторское разнообразие: от X' и X^* до $X^{\#}$ практически почти во всех шести возможных вариантах, что требует внимательности при переходе от одного источника к другому.

§ 2. Выпуклые отображения

Пусть X — в.в.п., Y — у.в.п., K_Y — положительный конус в Y.

Пусть F — отображение из X в Y, $F\colon\ X \to Y$. Это отображение называется *выпуклым*, если множество

$$\operatorname{epi} F = \{(x, y) \in X \times Y : y \overset{K_Y}{\geqslant} F(x)\}$$

является выпуклым множеством в $X \times Y$.

Это множество называется *надграфиком* (или иногда эпиграфом) отображения F. Отметим, что $\operatorname{epi} F$ — не пустое множество, т. к. $(x,\ F(x)) \in \operatorname{epi} F$ при $x \in X$.

Выпуклость надграфика равносильна *неравенству Иенсена*: при всех $x_1,\ x_2 \in X$ и всех $\alpha \in [0; 1]$

$$F(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \overset{K_Y}{\leqslant} \alpha F(x_1) + (1-\alpha)F(x_2).$$

Отметим, что если отображение $F\colon\ X \to Y$ выпуклое, то множество $\{x \in X : F(x) \overset{K_Y}{\leqslant} 0_Y\}$ является выпуклым.

§ 3. Теоремы отделимости выпуклых множеств

В в.в.п. X для множества A *ядром* $\operatorname{core} A$ называется множество тех точек $x \in A$, для которых при любом $h \in X$ существует $\varepsilon = \varepsilon(h) > 0$ такое, что $x + th \in A$ для всех $t,\ |t| < \varepsilon$.

Отметим, что если A — выпуклое множество, то $\operatorname{core} A$ также выпукло. Точки ядра множества иногда называют *алгебраически внутренними точками* этого множества, а иногда — *окруженными точками* (см., например, [10, с. 109]).

Отметим, что $x \in \operatorname{core} A$, если и только если $x \in A$ и $(A - x)$ — *поглощающее множество* в X.

а). Приведем теорему об отделимости выпуклых множеств в произвольном в.в.п. X. Таким образом, пока не предполагается, что пространство X наделено топологией.

Теорема 1 (теорема об отделимости в в.в.п., см. [6, с. 138]). *Пусть A и B — два выпуклых множества в в.в.п. X, причем ядро хотя бы одного из них не пусто и это ядро не пересекается с другим множеством (например,* $\operatorname{core} B \neq \emptyset,\ A \cap \operatorname{core} B \neq \emptyset$). *Тогда множества A и B отделимы, т. е. существует ненулевой линейный функционал $x' \in X'$, $x' \neq 0_{X'}$, такой, что при всех $a \in A$ и всех $b \in B$ выполнено неравенство*

$$\langle x',\ a\rangle \leqslant \langle x',\ b\rangle.$$

Здесь, как и выше, через X' обозначено алгебраически сопряженное к X пространство.

Замечание. В аналитической форме теорема 1 об отделимости носит название теоремы о продолжении с подпространства на все пространство линейного функционала, мажорируемого преднормой (полунормой) у Г. Хана (1927) или аддитивной положительно однородной функцией у С. Банаха (1929) (см. [10, с. 123]).

б). Приведем теорему об отделимости выпуклых множеств в общих т.в.п.

Теорема 2 (первая теорема об отделимости в т.в.п., см. [11, с. 85]). *Пусть A, B — непустые выпуклые множества в т.в.п. X*, $\operatorname{int} A \neq \emptyset$, *причем* $(\operatorname{int} A) \cap B = \emptyset$. *Тогда существует замкнутая гиперплоскость,* *разделяющая A и B, т. е. существует ненулевой линейный непрерывный функционал $x^* \in X^*$, $x^* \neq 0_{X^*}$, разделяющий A и B :*

$$\langle x^*,\ a\rangle \leqslant \langle x^*,\ b\rangle \quad \textit{для всех } a \in A,\ b \in B.$$

Если к тому же A и B оба открытые, то они строго отделимы:

$$\langle x^*,\ a\rangle < \langle x^*,\ b\rangle \quad \textit{для всех } a \in A,\ b \in B.$$

Замечание. Первая часть теоремы 2 (см. [4, с. 42]) называется теоремой Эйдельгайта (1936).

в). Для полной картины об отделимости выпуклых множеств приведем также теорему об отделимости в локально выпуклых т.в.п. (локально выпуклое пространство, л.в.п.). В этой теореме важно, что X не просто т.в.п., а л.в.п.

Теорема 3 (вторая теорема об отделимости в т.в.п., см. [11, с. 86]). *Пусть A и B — непустые не пересекающиеся выпуклые множества в л.в.п. X такие, что A — замкнуто, а B — компактно. Тогда A и B строго отделимы.*

Замечание. Доказательство этой теоремы опирается на вторую часть теоремы 2: предварительно устанавливается, что существует выпуклая открытая окрестность V нуля в X (вот где требуется локальная выпуклость т.в.п. X!), что $A+V$ и $B+V$ не пересекаются. Отметим, что, очевидно, $A+V$ и $B+V$ открытые выпуклые множества в X, и тогда отделимость A и B следует из теоремы 2.

§ 4. Выпуклые задачи векторной оптимизации

Пусть X, Y, Z — вещественные векторные пространства, причем Y и Z — упорядоченные векторные пространства, K_Y и K_Z — положительные конусы в Y и Z соответственно.

Выпуклой задачей векторной оптимизации (ВЗВО) называется задача минимизации следующего вида:

$$F(x) \to min,\ x \in G,\ \ H(x) \overset{K_Z}{\leqslant} 0_Z, \tag{1}$$

где G — выпуклое множество в X, $F\colon\ X \to Y$, $H\colon\ X \to Z$ — выпуклые отображения.

Замечание. Отметим, что множество *допустимых точек* в ВЗВО

$$D = G \cap \{x \in X\colon\ H(x) \overset{K_Z}{\leqslant} 0_Z\}$$

является выпуклым множеством как пересечение выпуклых множеств.

Для ВЗВО (1) допустимая точка $\bar{x}$ называется *эффективной точкой* (или *точкой абсолютного минимума по Парето*, точкой АМП), если не существует $\tilde{x}$ — допустимой точки в ВЗВО (1) такой, что $F(\tilde{x}) \overset{K_Y}{<} F(\bar{x})$.

Для ВЗВО (1) (в случае, когда X — т.в.п.) допустимая точка $\bar{x}$ называется *локально эффективной точкой* (или *точкой локального минимума по Парето*, точкой ЛМП), если существует открытая окрестность $\mathcal{O}(\bar{x})$ точки $\bar{x}$ такая, что не существует $\tilde{x}$ — допустимой точки в ВЗВО (1), близкой к $\bar{x}$, а именно $\tilde{x} \in \mathcal{O}(\bar{x})$, и такой, что $F(\tilde{x}) \overset{K_Y}{<} F(\bar{x})$.

Предложение 1. *Если* $\bar{x}$ *— точка* ЛМП *в* ВЗВО (1), *то* $\bar{x}$ *— точка* АМП *в* ВЗВО (1).

Доказательство. Поскольку $\bar{x}$ — точка ЛМП в ВЗВО (1), то существует $\mathcal{O}(\bar{x})$ — открытая окрестность точки $\bar{x}$ такая, что не существует точки $\tilde{x} \in G$ такой, что $H(\tilde{x}) \overset{K_Z}{\leqslant} 0_Z$, $\tilde{x} \in \mathcal{O}(\bar{x})$ и $F(\tilde{x}) \overset{K_Y}{<} F(\bar{x})$.

Пусть утверждение не выполнено и существует $x' \in G$ такая, что $H(x) \overset{K_Z}{\leqslant} 0_Z$ и $F(x') \overset{K_Y}{<} F(\bar{x})$. Из последнего неравенства следует, что $x' \neq \bar{x}$.

Положим для $\alpha \in (0;\ 1)$ $\tilde{x}_\alpha = \alpha x' + (1-\alpha)\bar{x}$. Отметим, что $\tilde{x}_\alpha \in D$ в силу того, что D — выпуклое множество. Далее, для любого $\alpha \in (0;\ 1)$ имеем

$$H(\tilde{x}_\alpha) = H(\alpha x' + (1-\alpha)\bar{x}) \overset{K_Z}{\leqslant} \alpha H(x') + (1-\alpha)H(\bar{x}) \overset{K_Z}{\leqslant} 0_Z.$$

Выберем теперь α так, чтобы выполнялось условие $\tilde{x}_\alpha \in \mathcal{O}(\bar{x})$. Последнее будет верным при достаточно малых положительных α: $\tilde{x}_\alpha \in \mathcal{O}(\bar{x}) \Leftrightarrow \alpha x' + (1-\alpha)\bar{x} \in \mathcal{O}(\bar{x}) \Leftrightarrow \alpha(x' - \bar{x}) \in \mathcal{O}(\bar{x}) - \bar{x}$, а это верно, т. к. $\mathcal{O}(\bar{x}) - \bar{x}$ — поглощающее множество. Таким образом, существует $\alpha_0 > 0$ такое, что при любом α, $0 < \alpha < \alpha_0$, точка $\tilde{x}_\alpha$ — допустимая в ВЗВО (1) и $\tilde{x}_\alpha \in \mathcal{O}(\bar{x})$, а значит, не должно быть $F(\tilde{x}_\alpha) \overset{K_Y}{<} F(\bar{x})$. Но у нас, с другой стороны, получается

$$F(\tilde{x}_\alpha) = F(\alpha x' + (1-\alpha)\bar{x}) \overset{K_Y}{\leqslant} \alpha F(\tilde{x}_\alpha) + (1-\alpha)F(\bar{x}) \overset{K_Y}{<}$$
$$\overset{K_Y}{<} \alpha F(\bar{x}) + (1-\alpha)F(\bar{x}) = F(\bar{x}).$$

Это — противоречие с тем, что $\bar{x}$ — точка ЛМП в ВЗВО (1). Предложение доказано.

Замечание. Предложение 1 утверждает (в случае, когда X — т.в.п.), что в ВЗВО нет точек ЛМП, которые не являются точками АМП.

Рассмотрим сначала *выпуклую задачу векторной оптимизации без ограничений в виде неравенств*

$$F(x) \to min,\ x \in G, \tag{2}$$

где, как и выше, G — выпуклое множество в в.в.п. X, F: $X \to Y$ — выпуклое отображение, Y — у.в.п. с положительным конусом K_Y.

Теорема 4. *Пусть в* ВЗВО (2) *положительный конус* K_Y *имеет непустое ядро,* $\operatorname{core} K_Y \neq \emptyset$.

Если $\bar{x}$ *— точка* АМП *в* ВЗВО (2), *то существует отличный от нуля линейный функционал* $y' \in K'_Y$ *такой, что для функции Лагранжа* ВЗВО (2)

$$\mathcal{L}(x) \overset{def}{=} \langle\, y',\ F(x)\rangle$$

выполнено условие минимума

$$\min_{x\in G} \mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(\bar{x}).$$

Доказательство

1. Введем в рассмотрение множество

$$M = \{y \in Y\colon\ y \overset{K_Y}{>} F(x) - F(\bar{x}),\ x \in G\}.$$

2. Покажем, что M — выпуклое множество в Y.

Если $\alpha \in (0;\ 1)$ и $y_1,\ y_2 \in M$, то существуют $x_1,\ x_2 \in G$ такие, что $y_1 \overset{K_Y}{>} F(x_1) - F(\bar{x})$, $y_2 \overset{K_Y}{>} F(x_2) - F(\bar{x})$. Тогда для $x = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \in G$ и $y = \alpha y_1 + (1-\alpha)y_2$ имеем

$$y = \alpha y_1 + (1-\alpha)y_2 \overset{K_Y}{>} \alpha[F(x_1) - F(\bar{x})] + (1-\alpha)[F(x_2) - F(\bar{x})] \overset{K_Y}{\geqslant} \geqslant F(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) - F(\bar{x}) = F(x) - F(\bar{x}).$$

Таким образом, для $x \in G$ получили, что $y \overset{K_Y}{>} F(x) - F(\bar{x})$, т. е. $y \in M$. Следовательно, M — выпуклое множество в Y.

3. Отметим, что M можно представить в виде

$$M = \bigcup_{x\in G}(F(x) - F(\bar{x}) + K_Y^+),$$

где $K_Y^+ = \{y \in K_Y\colon\ y \overset{K_Y}{>} 0_Y\} = K_Y \setminus \{0_Y\}$.

Действительно, для $x \in G$

$$F(x) - F(\bar{x}) + K_Y^+ = \{y = F(x) - F(\bar{x}) + \hat{y}\colon\ \hat{y} \in K_Y^+\},$$

$$\text{т. е. } y - (F(x) - F(\bar{x})) = \hat{y} \in K_Y^+, \quad \text{или} \quad y \overset{K_Y}{>} F(x) - F(\bar{x}).$$

4. Отметим, что $\operatorname{core} K_Y \subset K_Y^+$. Действительно, если $\hat{y} \in \operatorname{core} K_Y$, то $\hat{y} \in K_Y$, или $\hat{y} \overset{K_Y}{\geqslant} 0_Y$, и если $\hat{y} = 0_Y$, то $\hat{y} = 0_Y \in K_Y$. А это не так: $K_Y - 0_Y = K_Y$, но это множество не является поглощающим в Y, т. к. конус K_Y выступающий, $K_Y \cap (-K_Y) = \{0_Y\}$. Значит, $\hat{y} \overset{K_Y}{>} 0_Y$ и $\hat{y} \in K_Y^+$. По предположению $\operatorname{core} K_Y \neq \emptyset$ и, значит, $\operatorname{core} M \neq \emptyset$.

Множество M не содержит нуля $0_Y \in Y$. Действительно, если $y = 0_Y \in M$, то существует $x_0 \in G$ такая, что $y = F(x_0) - F(\bar{x}) + \hat{y}$, где $\hat{y} \in K_Y^+$ и, значит, $\hat{y} \overset{K_Y}{>} 0_Y$, т. е. $\hat{y} = F(\bar{x}) - F(x_0) \overset{K_Y}{>} 0_Y$, $F(x_0) \overset{K_Y}{<} F(\bar{x})$. Получили противоречие с тем, что $\bar{x}$ — точка АМП в ВЗВО (2).

5. Поскольку $0_Y \notin M$ и, значит, $0_Y \notin \operatorname{core} M$, то в этом случае точку $0_Y \in Y$ и множество M можно отделить по теореме 1: существует ненулевой линейный функционал $y' \in Y'$ такой, что при всех $y \in M$ будет выполнено неравенство $\langle y',\ y\rangle \geqslant 0 = \langle y',\ 0_Y\rangle$. Итак, при всех $x \in G$, $\hat{y} \in K_Y^+$ имеет место *неравенство отделимости*

$$\langle y',\ F(x) - F(\bar{x}) + \hat{y}\rangle \geqslant 0.$$

Положив в неравенстве отделимости $x = \bar{x}$, получим неравенство $\langle\, y',\ \hat{y}\rangle \geqslant\ 0$ для всех $\hat{y} \in K_Y^+$, которое, очевидно, выполнено и для $\hat{y} = 0_Y$, значит, для всех $y \in K_Y$. Последнее неравенство означает, что $y' \in K_Y'$.

Покажем, что из неравенства отделимости следует неравенство

$$\langle y',\ F(x) - F(\bar{x})\rangle \geqslant 0$$

для всех $x \in G$. Допустим, это не верно, и существует точка $x_1 \in G$ такая, что $\langle y',\ F(x_1) - F(\bar{x})\rangle < 0$. Тогда при фиксированном $y_1 \in K_Y^+$ и малых положительных α имеем, что $\alpha y_1 \in K_Y^+$ и

$$\langle y',\ F(x_1) - F(\bar{x}) + \alpha y_1\rangle = \langle y',\ F(x_1) - F(\bar{x})\rangle + \alpha\langle y',\ y_1\rangle < 0,$$

что противоречит неравенству отделимости.

Таким образом, получаем $\langle y',\ F(x) - F(\bar{x})\rangle \geqslant 0$ при всех $x \in G$, или $\langle y',\ F(x)\rangle \geqslant \langle y',\ F(\bar{x})\rangle$.

Итак, для функции Лагранжа $\mathcal{L}(x) \overset{def}{=} \langle\, y',\ F(x)\rangle$ выполнено

$$\min_{x\in G} \mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(\bar{x}).$$

Теорема доказана.

Замечания

1. Суть теоремы 4 — в сведении задачи векторной оптимизации к задаче скалярной оптимизации. Метод сведения — “свертка” векторного функционала $F(x)$ в скалярный — $\langle y',\ F(x)\rangle$, или скаляризация, очень популярен в некоторых прикладных исследованиях, поскольку помогает избавиться от многочисленных критериев (multiple objectives) с помощью субъективных их весов (см., например, [5, 8, 9, 12]). Конечномерный вариант теоремы 4 см., например, в [12, с. 61]. Однако тут же И. Экланд [12, с. 65—66] подвергает эмоциональной критике как само понятие оптимума по Парето, так и выбор функции коллективной полезности (т. е. функции Лагранжа), служащей для решения проблемы справедливого дележа, и завершает свое обсуждение словами: “Мы не настаиваем на том, что выбор невозможен. Мы утверждаем, что он имеет политический характер, поскольку его невозможно совершить, исходя лишь из экономических соображений $\langle \ldots \rangle$ Таким образом, понятие оптимума по Парето указывает водораздел между экономикой и политикой. Экономист ограничивается описанием оптимумов, иначе говоря, убеждается лишь в том, что экономика функционирует без разбазаривания средств. После этого на смену ему приходит политик, чтобы сказать, какой из оптимумов будет хорошим”.

2. Задача (скалярной) минимизации $\mathcal{L}(x) \to \min,\ x \in G$, является простейшей задачей выпуклого программирования — задачей минимизации выпуклой функции на выпуклом множестве, так как $\mathcal{L}(x)$ — выпуклая функция из X в $\mathbb{R}$, а G — выпуклое множество в X.

Действительно, т. к. F — выпуклое отображение, то имеет место неравенство Иенсена $F(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \overset{K_Y}{\leqslant} \alpha F(x_1) + (1-\alpha)F(x_2)$, т. е.

$y_\alpha = \alpha F(x_1) + (1-\alpha)F(x_2) - F(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \overset{K_Y}{\geqslant} 0$, или $y_\alpha \in K_Y$. Но у нас $y' \in K'_Y$, значит, $\langle y',\ y_\alpha\rangle \geqslant 0$, т. е.

$$\langle y',\ \alpha F(x_1) + (1-\alpha)F(x_2) - F(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2)\rangle \overset{K_Y}{\geqslant} 0,$$

$$\text{или } \alpha\langle y',\ F(x_1)\rangle + (1-\alpha)\langle y',\ F(x_2)\rangle \overset{K_Y}{\geqslant} \langle y',\ F(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2)\rangle,$$

$$\text{т. е. } \alpha\mathcal{L}(x_1) + (1-\alpha)\mathcal{L}(x_2) \geqslant \mathcal{L}(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2),$$

а это означает, что $\mathcal{L}(x)$ — выпуклая функция из X в $\mathbb{R}$.

3. Отметим, что из условия минимума, или неравенства $\langle\ \bar{y}',\ F(x)\rangle \geqslant \langle\ \bar{y}',\ F(\bar{x})\rangle$, выполненного при всех $x \in G$, по обобщенной теореме Фань Цзи — Гликсберга — Гоффмана (см. статью С. В. Пухова в настоящем выпуске) следует, что не существует точки $\tilde{x} \in G$ такой, что $-(F(\tilde{x}) - F(\bar{x})) \in \operatorname{core} K_Y$ (такие точки $\bar{x}$ называются слабо оптимальными по Парето, или слабо эффективными, см. [9, с. 32]). С другой стороны, оптимальность по Парето влечет за собой слабую оптимальность по Парето, а небольшие изменения в доказательстве теоремы 4 приводят к тому же выводу — условию минимума, исходя из предпосылки о слабой оптимальности по Парето. Таким образом, условие минимума, сформулированное в теореме 4, является необходимым и достаточным условием слабой оптимальности по Парето и, значит, теорема 4 фактически обобщает на бесконечномерный случай теорему Гурвица и теорему Ю, изложенные в [9, с. 104 — 105] для конечномерного случая — многокритериальной оптимизации. В связи с теоремой 4 стоит обратить внимание также на теорему Джоффриона (см. [9, с. 107 — 108]), в которой критерием собственной эффективности (или эффективности по Джоффриону [9, с. 50]) является все то же условие минимума.

Рассмотрим теперь ВЗВО в полном объеме как задачу (1) — векторную задачу минимизации выпуклого векторного функционала $F(x)$ на выпуклом множестве при выпуклых ограничениях в виде включений и неравенств.

Теорема 5. *Пусть в* ВЗВО (1) *положительные конусы* K_Y *и* K_Z *имеют не пустые ядра,* $\operatorname{core} K_Y \neq \emptyset$ *и* $\operatorname{core} K_Z \neq \emptyset$.

Если $\bar{x}$ *— точка* АМП *в* ВЗВО (1), *то существуют не равные нулю одновременно* $y' \in K'_Y$ *и* $z' \in K'_Z$ *такие, что*

а) *для функции Лагранжа* ВЗВО (1)

$$\mathcal{L}(x) \overset{def}{=} \langle y',\ F(x)\rangle + \langle z',\ H(x)\rangle$$

выполнено условие минимума:

$$\min_{x\in G} \mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(\bar{x});$$

б) *выполнено условие дополняющей нежесткости*: $\langle z',\ H(\bar{x})\rangle = 0$.

Доказательство

1. Введем в рассмотрение множество в $Y \times Z$

$$M = \{(y,\ z) \in Y \times Z\colon\ y \overset{K_Y}{>} F(x) - F(\bar{x}),\ z \overset{K_Z}{\geqslant} H(x),\ \ x \in G\}.$$

2. Покажем, что M — выпуклое множество в $Y \times Z$.

Если $\alpha \in (0;\ 1)$ и $m_1 = (y_1,\ z_1)$, $m_2 = (y_2,\ z_2) \in M$, то существуют $x_1, x_2 \in G$ такие, что $y_1 \overset{K_Y}{>} F(x_1) - F(\bar{x})$, $y_2 \overset{K_Y}{>} F(x_2) - F(\bar{x})$, $z_1 \overset{K_Z}{\geqslant} H(x_1)$, $z_2 \overset{K_Z}{\geqslant} H(x_2)$.

Тогда для $x = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \in G$ и $m = (y,\ z) = \alpha m_1 + (1-\alpha)m_2 = (\alpha y_1 + (1-\alpha)y_2,\ \alpha z_1 + (1-\alpha)z_2)$ имеем $y = \alpha y_1 + (1-\alpha)y_2 \overset{K_Y}{>} \alpha[F(x_1) - F(\bar{x})] + (1-\alpha)[F(x_2) - F(\bar{x})] \overset{K_Y}{\geqslant} F(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) - F(\bar{x}) = F(x) - F(\bar{x})$, а также $z = \alpha z_1 + (1-\alpha)z_2 \overset{K_Z}{\geqslant} \alpha H(x_1) + (1-\alpha)H(x_2) \overset{K_Z}{\geqslant} H(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) = H(x)$.

Таким образом, для $x \in G$ имеем $y \overset{K_Y}{>} F(x) - F(\bar{x})$ и $z \overset{K_Z}{\geqslant} H(x)$, т. е. $(y,\ z) \in M$. Следовательно, M — выпуклое множество в $Y \times Z$.

3. Отметим, что M можно представить в виде

$$M = \bigcup_{x \in G} (F(x) - F(\bar{x}) + K_Y^+,\ H(x) + K_Z),$$

где, как и выше, $K_Y^+ = \{y \in K_Y \colon\ y \overset{K_Y}{>} 0_Y\} = K_Y \setminus \{0_Y\}$.

Действительно, для $x \in G$

$$F(x) - F(\bar{x}) + K_Y^+ = \{y = F(x) - F(\bar{x}) + \hat{y} \colon\ \hat{y} \in K_Y^+\},$$

т. е. $y - (F(x) - F(\bar{x})) = \hat{y} \in K_Y^+$, следовательно, $y \overset{K_Y}{>} F(x) - F(\bar{x})$.

Аналогично, $H(x) + K_Z = \{z = H(x) + \hat{z} \colon\ \hat{z} \in K_Z\}$, следовательно, $z - H(x) = \hat{z} \in K_Z$, т. е. $z \overset{K_Z}{\geqslant} H(x)$.

4. Отметим, что $\operatorname{core} M \neq \emptyset$. Это вытекает из того, что $\operatorname{core} K_Z \subseteq K_Z$ и $\operatorname{core} K_Y \subseteq K_Y^+$. Последнее выполнено в силу определения: $\operatorname{core} K_Y \subseteq K_Y$ и $0_Y \neq \operatorname{core} K_Y$ (т. к. $K_Y - 0_Y = K_Y$, а это множество не является поглощающим по причине того, что K_Y предполагается выступающим, $K_Y \cap (-K_Y) = \{0_Y\}$). Поскольку $\operatorname{core} K_Y \neq \emptyset$ и $\operatorname{core} K_Z \neq \emptyset$, то и $\operatorname{core} M \neq \emptyset$.

5. Отметим, что M не содержит нуля $(0_Y,\ 0_Z) \in Y \times Z$. Действительно, если $(0_Y,\ 0_Z) \in M$, то существует $x_0 \in G$ такая, что $H(x_0) \overset{K_Z}{\leqslant} 0_Z$, а также $0_Y = F(x_0) - F(\bar{x}) + \hat{y}$, где $\hat{y} \overset{K_Y}{>} 0_Y$, т. е. $F(x_0) - F(\bar{x}) \overset{K_Y}{<} 0_Y$ или $F(x_0) \overset{K_Y}{<} F(\bar{x})$. Получаем противоречие с тем, что $\bar{x}$ — точка АМП в ВЗВО (1).

6. Поскольку M — выпуклое множество в $Y \times Z$, $\operatorname{core} M \neq \emptyset$ и $(0_Y,\ 0_Z) \notin M$, то точку $(0_Y,\ 0_Z) \in Y \times Z$ и множество M можно отделить по теореме 1: существует ненулевой элемент $(y',\ z') \in (Y \times Z)' \cong Y' \times Z'$ такой, что для всех $(y,\ z) \in M$ будет выполнено

$$\langle (y',\ z'),\ (y,\ z) \rangle = \langle y',\ y \rangle + \langle z',\ z \rangle \geqslant 0 = \langle y',\ 0_Y \rangle + \langle z',\ 0_Z \rangle.$$

Таким образом, при всех $x \in G$, $y \in K_Y^+$, $z \in K_Z$ имеет место *неравенство отделимости* $\langle y',\ F(x) - F(\bar{x}) + y \rangle + \langle z',\ H(x) + z \rangle \geqslant 0$.

Отсюда, в частности, следует, что выполнены неравенства $\langle y',\ y\rangle \geqslant 0$ при всех $y \in K_Y^+$ и, значит, при всех $y \in K_Y$, а также $\langle z',\ z\rangle \geqslant 0$ при всех $z \in K_Z$, иначе левая часть неравенства отделимости не ограничена снизу. Последние два неравенства означают, что $y' \in K'_Y$ и $z' \in K'_Z$.

Из неравенства отделимости следует, что при всех $x \in G$

$$\langle y',\ F(x) - F(\bar{x})\rangle + \langle z',\ H(x)\rangle \geqslant 0.$$

Действительно, если это не так и существует $x_1 \in G$ такая, что

$$\langle y',\ F(x_1) - F(\bar{x})\rangle + \langle z',\ H(x_1)\rangle < 0,$$

то при фиксированных $y_1 \in K_Y^+$ и $z_1 \in K_Z$ для малых положительных α имеем $\alpha y_1 \in K_Y^+$, $\alpha z_1 \in K_Z$ и

$$\begin{aligned}&\langle y',\ F(x_1) - F(\bar{x}) + \alpha y_1\rangle + \langle z',\ H(x_1) + \alpha z_1\rangle = \\ &\qquad = \langle y',\ F(x_1) - F(\bar{x})\rangle + \langle z',\ H(x_1)\rangle + \alpha(\langle y',\ y_1\rangle + \langle z',\ z_1\rangle) < 0.\end{aligned}$$

А это противоречит неравенству отделимости.

Таким образом, при всех $x \in G$ выполнено неравенство

$$\langle y',\ F(x)\rangle + \langle z',\ H(x)\rangle \geqslant \langle y',\ F(\bar{x})\rangle. \tag{3}$$

7. Докажем *условие дополняющей нежесткости*: $\langle z',\ H(\bar{x})\rangle = 0$.

Из неравенства (3) при $x = \bar{x}$ имеем $\langle z',\ H(\bar{x})\rangle \geqslant 0$.

Точка $\bar{x}$ — допустимая в ВЗВО (1), следовательно, $H(\bar{x}) \leqslant 0_Z$, т. е. $-H(\bar{x}) \in K_Z$. Так как $z' \in K'_Z$, то $\langle z',\ -H(\bar{x})\rangle \geqslant 0$, или $\langle z',\ H(\bar{x})\rangle \leqslant 0$. Значит, $\langle z',\ H(\bar{x})\rangle = 0$.

8. Теперь, добавляя это нулевое слагаемое в правую часть неравенства (3), получаем для всех $x \in G$

$$\langle\ y',\ F(x)\rangle + \langle z',\ H(x)\rangle \geqslant \langle y',\ F(\bar{x})\rangle + \langle z',\ H(\bar{x})\rangle,$$

т. е. для функции Лагранжа $\mathcal{L}(x) \overset{def}{=} \langle y',\ F(x)\rangle + \langle z',\ H(x)\rangle$ выполнено *условие минимума* $\min\limits_{x\in G} \mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(\bar{x})$. Теорема доказана.

Замечание. Как и в замечании 2 к теореме 4, можно показать, что и в теореме 5 функция Лагранжа $\mathcal{L}(x)$ — это выпуклая функция из X в $\mathbb{R}$. Это также следует из того, что $y' \in K'_Y$, $z' \in K'_Z$ и F, G — выпуклые отображения из X в Y и Z соответственно.

Получим из теоремы 5 классическую теорему Куна — Таккера (1951).

Пусть в ВЗВО (1): X — в.в.п.; $Y = \mathbb{R}$; $Z = \mathbb{R}^n$; G — выпуклое множество в X; $K_Y = [0;\ +\infty)$; $K_Z = \mathbb{R}^n_+ = \{z = (z_1, ..., x_n)\colon\ z_j \geqslant 0, j = \overline{1,\ n}\}$; $F(x) = f_0(x)\colon\ X \to \mathbb{R}$; $H(x) = (f_1(x), ..., f_n(x))\colon\ X \to \mathbb{R}^n$.

Тогда

$K'_Y = [0;\ +\infty)$; $K'_Z = \mathbb{R}^n_+ = \{z' = (z'_1, ..., z'_n)\colon\ z'_j \geqslant 0, j = \overline{1,\ n}\}$;
$y' \in K'_Y \ \Leftrightarrow\ y' = \lambda_0 \geqslant 0$; $z' \in K'_Z \ \Leftrightarrow\ z' = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$, $\lambda_j \geqslant 0$, $j = \overline{1,\ n}$;
$\mathcal{L}(x) = \langle y',\ F(x)\rangle + \langle z',\ H(x)\rangle = \lambda_0 f_0(x) + \sum_{j=1}^n \lambda_j f_j(x) = \sum_{j=0}^n \lambda_j f_j(x)$;

$\langle z',\ H(\bar{x})\rangle = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_j(\bar{x}) = 0 \ \Leftrightarrow\ \lambda_j f_j(\bar{x}) = 0$, т. к. $f_j(\bar{x}) \leqslant 0$, $\lambda_j \geqslant 0$, $j = \overline{1,\ n}$.

Теорема 6. *Пусть X — в.в.п., G — выпуклое множество в X, $f_j(x)$: $X \to \mathbb{R}$ — выпуклые функции, $j = \overline{0,\ n}$.*

Если $\bar{x}$ — точка абсолютного минимума в задаче выпуклого программирования (ЗВП)

$$\begin{gathered} f_0(x) \to \min, \\ f_j(x) \leqslant 0,\ j = \overline{1,\ n}, \\ x \in G, \end{gathered} \tag{4}$$

то существуют не равные нулю одновременно числа $\lambda_0 \geqslant 0$, $\lambda_1 \geqslant 0$, $\ldots, \lambda_n \geqslant 0$ (так называемые множители Лагранжа) такие, что

а) *для функции Лагранжа* ЗВП (4)

$$\mathcal{L}(x) \overset{def}{=} \sum_{j=0}^{n} \lambda_j f_j(x)$$

выполнено условие минимума:

$$\min_{x \in G} \mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(\bar{x});$$

б) *выполнено условие дополняющей нежесткости*:

$$\lambda_j f_j(\bar{x}) = 0,\ j = \overline{1,\ n}.$$

Замечания

1. Выпуклость F означает, что f_0 — выпуклая функция, определенная на X, а выпуклость H означает, что все f_j — выпуклые функции из X в $\mathbb{R}$, $j = \overline{1,\ n}$.

2. В ЗВП точка АМП — это обычная точка абсолютного минимума числовой функции f_0 при ограничениях в виде неравенств и включений.

Получим из теоремы 5 теорему о седловой точке. Для этого воспользуемся вспомогательным предложением.

Предложение 2. *Пусть в простейшей линейной задаче выпуклой оптимизации* (ПЛЗВО)

$$\varphi(z') = \langle z',\ z\rangle \to \max, \quad z' \in K'_Z,$$

где z — фиксирован, $z \in Z$, Z — в.в.п., K_Z — конус в Z, и выполнены условия

а) $(-z) \in K_Z$,

б) $\langle\ \bar{z}',\ z\rangle = 0$,

тогда точка $z' = \bar{z}' \in K'_Z$ является точкой абсолютного максимума в ПЛЗВО.

Доказательство. По определению сопряженного конуса имеем $\langle\ z',\ -z\rangle \geqslant 0$ для всех $z' \in K'_Z$ или $\langle z',\ z\rangle \leqslant 0$. Но по условию б) $\langle \bar{z}',\ z\rangle = 0$. Значит, для всех $z' \in K'_Z$ $\langle z',\ z\rangle \leqslant \langle \bar{z}',\ z\rangle$, т. е. $\varphi(z') \leqslant \varphi(\bar{z}')$.

Следовательно, $z = \bar{z}'$ является точкой абсолютного максимума в ПЛЗ-ВО. Предложение доказано.

Теорема 7 (теорема о седловой точке). *Пусть в* ВЗВО (1) $\operatorname{core} K_Y \neq \emptyset$, $\operatorname{core} K_Z \neq \emptyset$ *и* $\bar{x}$ *— точка* АМП. *Тогда существуют не равные нулю одновременно* $\bar{y}' \in K'_Y$ *и* $\bar{z}' \in K'_Z$ *такие, что для функции Лагранжа* ВЗВО (1)

$$\mathcal{L}(x,\ z') = \mathcal{L}(x,\ \bar{y}',\ z') \stackrel{def}{=} \langle\ \bar{y}',\ F(x)\rangle + \langle\ z',\ H(x)\rangle$$

точка $(x,\ z') = (\bar{x},\ \bar{z}')$ *является седловой*:

$$\min_{x \in G} \mathcal{L}(x,\ \bar{z}') \stackrel{(*)}{=} \mathcal{L}(\bar{x},\ \bar{z}') \stackrel{(**)}{=} \max_{z' \in K'_Z} \mathcal{L}(\bar{x},\ z'),$$

т. е.

$$\mathcal{L}(x,\ \bar{z}') \geqslant \mathcal{L}(\bar{x},\ \bar{z}') \geqslant \mathcal{L}(\bar{x},\ z') \text{ для всех } x \in G, z' \in K'_Z.$$

Доказательство. Если $\bar{x}$ — точка АМП в ВЗВО (1), то по теореме 5 существуют не равные нулю одновременно $\bar{y}' \in K'_Y$ и $\bar{z}' \in K'_Z$ такие, что для

$$\mathcal{L}(x) \stackrel{def}{=} \langle\ \bar{y}',\ F(x)\rangle + \langle\ \bar{z}',\ H(x)\rangle$$

выполнено условие минимума

$$\min_{x \in G} \mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(\bar{x}), \text{ а также } \langle \bar{z}',\ H(\bar{x})\rangle = 0.$$

Следовательно, (*) доказано, т. к. $\mathcal{L}(x,\ \bar{z}') = \mathcal{L}(x)$.

Отметим, что (**) равносильно

$$\langle \bar{y}',\ F(\bar{x})\rangle + \langle \bar{z}',\ H(\bar{x})\rangle = \max_{z' \in K'_Z} (\langle \bar{y}',\ F(\bar{x})\rangle + \langle z',\ H(\bar{x})\rangle),$$

или

$$\langle \bar{z}',\ H(\bar{x})\rangle = \max_{z' \in K'_Z} \langle z',\ H(\bar{x})\rangle.$$

Таким образом, точка $z' = \bar{z}'$ должна являться точкой абсолютного максимума на K'_Z функционала $\langle z',\ z\rangle$, где $z = H(\bar{x})$.

Поэтому если в предложении 2 положим $z = H(\bar{x})$, то

а) в силу того, что $\bar{x}$ — допустимая точка в ВЗВО (1) и $H(\bar{x}) \overset{K_Z}{\leqslant} 0_Z$, получаем $(-z) \overset{K_Z}{\geqslant} 0_Z$, т. е. $(-z) \in K_Z$;

б) $0 = \langle \bar{z}',\ z\rangle = \langle \bar{z}',\ H(\bar{z})\rangle$ — это условие дополняющей нежесткости в теореме 5.

А в силу предложения 2 точка $z' = \bar{z}'$ является точкой абсолютного максимума функции $\langle z',\ z\rangle$ на K'_Z, когда выполнены условия а) $(-z) \in K_Z$, б) $\langle \bar{z}',\ z\rangle = 0$.

Таким образом, точка $z' = \bar{z}'$ — это действительно точка абсолютного максимума функции $\langle z',\ z\rangle$ на K'_Z , т. е. (**) верно. Теорема доказана.

Замечания

1. Если дополнительно к условиям теоремы 7 (или теоремы 5) потребовать выполнения *условия регулярности* (существует точка $\tilde{x} \in G$ такая, что $-H(\tilde{x}) \in \operatorname{core} K_Z$; для задачи выпуклого программирования — это так называемое *условие Слейтера*), то среди не равных нулю одновременно $\bar{y}' \in K'_Y$, $\bar{z}' \in K'_Z$ (в теореме 5: y', z') обязательно $\bar{y}' \neq 0_{Y'}$. Действительно, т. к. $-H(\tilde{x}) \in \operatorname{core} K_Z$, а $\bar{z}' \in K'_Z$, то $\langle \bar{z}',\ -H(\tilde{x})\rangle \geqslant 0$. Далее, если $\langle \bar{z}',\ -H(\tilde{x})\rangle = 0$, то, поскольку $-H(\tilde{x}) \in \operatorname{core} K_Z$, для любого $z \in Z$ существует $\varepsilon = \varepsilon(z) > 0$ такая, что при всех $t, |t| < \varepsilon$, получаем $-H(\tilde{x}) + tz \in K_Z$ и, значит, $\langle \bar{z}',\ -H(\tilde{x}) + tz\rangle = t\langle \bar{z}',\ z\rangle \geqslant 0$. Поэтому $\langle \bar{z}',\ z\rangle = 0$ при всех $z \in Z$, т. е. $\bar{z}' = 0_{Z'}$, и тогда сразу получаем, что $\bar{y}' \neq 0_{Y'}$. Если же $\langle \bar{z}',\ H(\tilde{x})\rangle < 0$, то, предположив $\bar{y}' = 0_{Y'}$, имеем $\mathcal{L}(\tilde{x},\ \bar{z}') = \langle \bar{y}',\ F(\tilde{x})\rangle + \langle \bar{z}',\ H(\tilde{x})\rangle = \langle \bar{z}',\ H(\tilde{x})\rangle < 0 = \langle \bar{y}',\ F(\bar{x})\rangle + \langle \bar{z}',\ H(\bar{x})\rangle = \mathcal{L}(\bar{x},\ \bar{z}')$, что противоречит условию (*) в теореме 7 (условию минимума а) в теореме 5).

2. Если в ВЗВО (1) считать, что X — в.в.п., а Y и Z — т.в.п., K_Y и K_Z соответственно положительные конусы, задающие порядки $\overset{K_Y}{\geqslant}$ и $\overset{K_Z}{\geqslant}$, причем $\operatorname{int} K_Y \neq \emptyset$ и $\operatorname{int} K_Z \neq \emptyset$, то, заменяя в доказательствах теорем 4 и 5 core на int и при отделимости теорему 1 на теорему 2, мы приходим к аналогам теорем 4 и 5 для т.в.п. Y и Z (и в.в.п. X), формулировки которых выглядят точно так же, с одной лишь особенностью, что вместо существования $y' \in K'_Y$ (и $z' \in K'_Z$) можно гарантировать, что это непрерывные функционалы, т. е. $y' \in K^*_Y$ (и $z' \in K^*_Z$). При указанных изменениях верна также и теорема 7.

3. Для случая топологических векторных пространств теорема, близкая к теореме 7, приведена в работе [2, теорема 5.3.1], но в доказательстве “автор допустил неточности, которые были устранены при редактировании перевода”(примеч. ред. см.: [2, с. 141). Однако, учитывая нечеткое изложение автора статьи [2], это “устранение” неточностей слабо повлияло на улучшение доказательства теоремы 5.3.1. О существовании этой теоремы нам стало известно уже после того, как нами были получены результаты, приведенные в данной статье.

Аналогичные замечания (о неточностях и примечаниях редактора) можно высказать и по поводу работы [3] (примеч. ред. см.: [3, с. 164, 165]). Отметим, что авторами статей [2] и [3] не был сделан решающий шаг по очищению ситуации от случайных примесей и, таким образом, получению общего результата: они действовали в рамках т.в.п. и использовали основной инструмент — первую и вторую теоремы об отделимости в т.в.п., но по какой-то причине упустили, что и для в.в.п. есть теоремы отделимости (см. теорему 1 из § 3 настоящей статьи). Хотя поиск подходящей более общей ситуации, чем рассматривается в [2] и [3], занимает там же значительное их внимание.

4. Конечномерный вариант, близкий к теореме 7, появляется в [8, § 17.1] и в [5, § 9.1] при обсуждении традиционной экономической теории благосостояния в терминах справедливого дележа, конкурентного равновесия и вектора оптимальных цен. Для экономики с континуумом участников дележи, эффективные по Парето, обсуждаются в [1]. См. также [7].

5. Сама тематика векторной оптимизации, точнее, многокритериальной оптимизации, составляет содержание курса лекций “Дополнитель-

ные главы теории экстремальных задач: задачи многокритериальной оптимизации", который один из авторов данной статьи (С. В. Пухов) читает в течение ряда лет в магистратуре математического факультета ИвГУ. Цель этого курса — продемонстрировать возможности метода Дубовицкого — Милютина в выпуклых и нелинейных (гладких) задачах многокритериальной оптимизации. Приведенные в данной статье результаты дают научно-методические возможности для внесения дополнений в упомянутый выше курс.

6. Наконец, может показаться, что изложение результатов в нашей статье излишне подробно. Но тут мы полностью согласны со словами профессора В. Г. Дурнева из Ярославского государственного университета о том, что "пока результат не проверен по шагам — это не результат". Тем более что перед нами имеются результаты и их представление в статьях [2] и [3], потребовавшие устранения неточностей переводчиком.

Библиографический список

1. *Гильденбранд В.* Ядро и равновесие в большой экномике. М.: Наука, 1986. 200 с.
2. *Гурвиц Л.* Программирование в линейных пространствах // Исследования по линейному и нелинейному программированию. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. С. 65—155.
3. *Гурвиц Л., Удзава Х.* Заметка о седловых точках функции Лагранжа // Там же. С. 156—172.
4. *Дэй М.* Нормированные линейные пространства. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. 236 с.
5. *Карлин С.* Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М.: Мир, 1964. 840 с.
6. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 544 с.
7. *Левин В. Л.* Выпуклый анализ в пространствах измеримых функций и его применение в математике и экономике. М.: Наука, 1985. 352 с.
8. *Никайдо Х.* Выпуклые структуры и математическая экономика. М.: Мир, 1972. 520 с.
9. *Подиновский В. В., Ногин В. Д.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука, 1982. 256 с.
10. *Райков Д. А.* Векторные пространства. М.: ГИФМЛ, 1962. 212 с.
11. *Шефер Х.* Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1971. 360 с.
12. *Экланд И.* Элементы математической экономики. М.: Мир, 1983. 248 с.