Вестник Ивановского государственного университета

Серия «Естественные, общественные науки»

Вып. 2 / 2009 С. 101 – 112

С. Р. Когаловский

РЕЗУЛЬТАТЫ ОБ УНИВЕРСАЛЬНО АКСИОМАТИЗИРУЕМЫХ КЛАССАХ АЛГЕБР В НОВОМ ОСВЕЩЕНИИ

Из простых топологических соображений выводятся прозрачные характеристики универсально аксиоматизируемых классов алгебр, а также известные модификации теоремы Биркгофа, дающей характеризацию многообразий алгебр, и аналогичные им характеристики квазимногообразий алгебр. Находятся характеристики классов, определимых инфинитарными универсальными предложениями.

From simple topological considerations are removed transparent characterizations of universal axiomatizable classes of algebras, as well as the known modifications of the theorem G. Birkhoff, giving characterization of varieties, and characterizations of quasivarieties of algebras. There are found characterizations of the classes of algebras, defined by infinitary universal sentences.

Ключевые слова: интервальная топология, порядковая топология, алгебраическая решетка подмножеств, индуцированная топология, универсально аксиоматизированный класс, квазимногообразие, многообразие, σ-универсально аксиоматизированный класс.

Key words: interval topology, order topology, algebraic lattice of subsets, universal axiomatizable class of algebras, quasivariety of algebras, variety, σ-universal axiomatizable class.

УДК 519.4, 512.57.

Топологию в полной решетке $\mathbf{L}$, в которой предбазой замкнутых множеств являются всевозможные замкнутые интервалы, будем, следуя [9, с. 250], называть интервальной топологией.

Нижним пределом направленности $\alpha = (a_i/i \in I)$ в $\mathbf{L}$ называется элемент $\underline{\lim}\ \alpha = \bigvee_i \bigwedge_{j \geqslant i} a_j$. Двойственным образом определяется ее верхний предел: $\overline{\lim}\ \alpha = \bigwedge_i \bigvee_{j \geqslant i} a_j$. Говорят, что α порядково сходится к элементу a, если ее нижний и верхний пределы равны a. Так определяемая сходимость задает топологию в $\mathbf{L}$, называемую порядковой топологией [9, с. 244].

Пусть M — непустое множество. Для всякого $a \in M$ будем обозначать через U_a^+ (через U_a^-) набор всех подмножеств M, содержащих (не содержащих) a. Наборы вида $\{X/A \subseteq X \subseteq B\}$ являются пересечениями наборов видов U_a^+ и U_a^-. Значит, последние образуют предбазу замкнутых множеств интервальной топологии в решетке $P(M)$ всех подмножеств множества M. Они же образуют предбазу открытых множеств этой топологии. А потому сходимость направленности $\alpha = (A_i/i \in I)$ к A в интервальной топологии в $P(M)$ равносильна тому, что для всякого набора U_a^+ (U_a^-), содержащего A, почти все A_i содержатся в нем, т. е. что для всякого $a \in A$ (для всякого $a \notin A$) *почти все* A_i содержат (не содержат) a, т. е. что существует такое $j \in I$, что $a \in A_i (a \notin A_j)$ для всех $i \geqslant j$. Иначе говоря, сходимость направленности $\alpha = (A_i/i \in I)$ к A в интервальной топологии в $P(M)$ равносильна тому, что всякий элемент a множества M либо принадлежит почти всем A_i, либо почти всем A_i не принадлежит.

Элемент a множества M принадлежит $\underline{\lim}\ \alpha = \bigcup\limits_{i \in I} \bigcap\limits_{j \geqslant i} A_j$ в точности тогда, когда он принадлежит почти всем A_i, и принадлежит $\overline{\lim}\ \alpha$ в точности тогда, когда он принадлежит всем членам какой-нибудь поднаправленности α. А значит, сходимость $\alpha = (A_i/i \in I)$ в порядковой топологии в $P(M)$ равносильна тому, что всякий элемент a множества M либо принадлежит почти всем A_i, либо почти всем A_i не принадлежит. А значит, порядковая топология в $P(M)$ совпадает с интервальной топологией.

Отсюда же следует, что сходимость направленности в порядковой топологии в $P(M)$ равносильна равенству нижних пределов всех ее поднаправленностей.

Пусть отображение $h : P(M) \to 2^M$ таково, что $h(A)$ — характеристическая функция A (на M) для всякого $A \subseteq M$. h-образом всякого набора U_a^+ (U_a^-) является множество всех функций $f \in 2^A$, для которых $f(a) = 1$ $(f(a) = 0)$. Эти множества образуют предбазу топологического пространства на 2^A, являющегося произведением простых двоеточий. Таким образом, порядковая топология в $P(M)$ гомеоморфна топологии обобщенного канторова дисконтинуума.

Наборы подмножеств какого-нибудь множества M, замкнутые относительно всевозможных пересечений (включая пустой поднабор, а значит, содержащие M) и объединений возрастающих цепей, являются алгебраическими решетками по включению. Такие наборы будем называть *алгебраическими решетками подмножеств* M. Всюду далее M будет обозначать произвольное множество, а $\mathbf{L}$ — алгебраическую решетку подмножеств M. Через $\mathbf{U}[\mathbf{L}]$ будем обозначать топологию в $\mathbf{L}$, индуцированную порядковой топологией в $P(M)$.

Для всякой направленности в $\mathbf{L}$ ее нижний предел в $\mathbf{L}$ совпадает с нижним пределом в $P(M)$. Отсюда (и из того, что множество всех таких пар $(\alpha, \underline{\lim}\ \alpha)$, что нижние пределы всех поднаправленностей α равны, образует класс сходимости для $\mathbf{U}[\mathbf{L}]$ в смысле [12, с. 107]), следует

1.1. *Сходимость направленности к A в* $\mathbf{U}[\mathbf{L}]$ *равносильна тому, что нижние пределы всех ее поднаправленностей равны A.*

Отсюда же следует, что $\mathbf{L}$ замкнута в интервальной (=порядковой) топологии в P(M), а значит, что $\mathbf{U}[\mathbf{L}]$ компактна.

Существуют алгебраические решетки, в которых интервальная топология не хаусдорфова, а порядковая не компактна. Таковы бесконечные решетки, у которых все элементы, отличные от нуля и единицы, являются атомами. Следовательно, $\mathbf{U}[\mathbf{L}]$, вообще говоря, не является ни интервальной, ни порядковой топологией.

Используя следующую естественную модификацию понятия предела направленности, получим удобную в ряде отношений характеризацию $\mathbf{U}[\mathbf{L}]$. Пусть $\lambda = (A_i/i \in I)$ — семейство в $\mathbf{L}$, $\mathbf{F}$ — фильтр на I. Множество A называется *пределом* λ по $\mathbf{F}$, если $\{i/A_i \in \mathbf{V}\} \in \mathbf{F}$ для всякой окрестности $\mathbf{V}$ множества A. Предел семейства λ по фильтру $\mathbf{F}$ будем обозначать через $\lim_{\mathrm{F}} \lambda$. Нетрудно убедиться, что $\lim_{\mathrm{F}} \lambda = \bigcup\limits_{J \in F} \bigcap\limits_{j \in J} A_j$.

Пусть $\alpha = (A_i/i \in I)$ — направленность в $\mathbf{L}$. Если $\mathbf{F}$ — фильтр на I, содержащий всевозможные подмножества $\{j/j \geqslant i\}$ $(i \in I)$, то $\lim_{\mathrm{F}} \alpha = \underline{\lim}\ \alpha$.

Пусть $\lambda = (A_i/i \in I)$ — семейство в $\mathbf{L}$, $\mathbf{F}$ — ультрафильтр на I. Покажем, что существует такая сходящаяся в $\mathbf{U}[\mathbf{L}]$ направленность α в $\mathbf{L}$, что $\lim_{\mathrm{F}} \lambda = \underline{\lim}\ \alpha$.

Пусть f — функция выбора на $\mathbf{F}$, $\geqslant$ — направление на $\mathbf{F}$, для которого $K_1 \geqslant K_2 \Leftrightarrow K_1 \subset K_2$. Рассмотрим направленность $\alpha = (A_{\mathrm{f(K)}}/K \in \mathbf{F})$. Убедимся в том, что она является сходящейся в $\mathbf{U}[\mathbf{L}]$. Пусть какой-нибудь элемент a множества M принадлежит $\lim_{\mathrm{F}} \lambda$. Это значит, что для некоторого $K \in \mathbf{F}$ этот элемент принадлежит всем таким A_k, что $k \in K$. Но тогда для всякого принадлежащего $\mathbf{F}$ множества $K_1 \geqslant K$ имеет место $a \in A_k$ для всех $k \in K_1$. Следовательно, $a \in \underline{\lim}\ \alpha$. Если a не принадлежит $\lim_{\mathrm{F}} \lambda$, то множество всех тех k, для которых $a \notin A_k$, не принадлежит $\mathbf{F}$. Но тогда дополнение K_0 этого множества принадлежит $\mathbf{F}$. Отсюда следует, что для всякого принадлежащего $\mathbf{F}$ множества $K \subset K_0$ имеет место $a \notin A_K$, а значит, что $a \notin \underline{\lim}\ \alpha$. Таким образом, α — сходящаяся направленность в M и $\lim_{\mathrm{F}} \lambda = \underline{\lim}\ \alpha$.

Этим доказано следующее:

1.2. *Пусть* $\mathbf{P}$ *— набор множеств из* $\mathbf{L}$. *Замыканию* $\mathbf{P}$ в $\mathbf{U}[\mathbf{L}]$ *принадлежат пределы по ультрафильтрам всевозможных семейств множеств из* $\mathbf{L}$ *и только они.*

Отметим, что для всякого набора $\mathbf{P}$ множеств из $\mathbf{L}$ его замыканию в $\mathbf{U}[\mathbf{L}]$ принадлежит всякое такое и только такое множество P, для которого выполняется следующее условие: для всяких конечных множеств A и B таких, что $A \subset P$ и $B \cap P = 0$, существует такое $S \in \mathbf{P}$, что $A \subset S$ и $B \cap S = 0$.

Каждому элементу a множества M соотнесем два знака — a^+ и a^-. Диаграммой множества $P \subset M$ назовем множество, состоящее из тех a^+, для которых $a \in P$, и тех a^-, для которых $a \notin P$. Всякое подмножество диаграммы P будем называть поддиаграммой этого множества. Будем говорить, что поддиаграмма P выполнима в наборе $\mathbf{P}$ множеств из $\mathbf{L}$, если она является поддиаграммой какого-нибудь множества из $\mathbf{P}$. Последнее предложение выразимо в следующей форме:

1.3. *Множество* P *тогда и только тогда принадлежит замыканию набора* $\mathbf{P}$ в $\mathbf{U}[\mathbf{L}]$, *когда всякая его конечная поддиаграмма выполнима в* $\mathbf{P}$.

Направленность $\alpha = (A_i/i \in I)$ в $\mathbf{L}$ будем называть возрастающей (убывающей), если $j > i \Rightarrow A_j \supseteq A_i$ $(j > i \Rightarrow A_j \subseteq A_i)$. Для всякого набора $\mathbf{P}$ множеств из $\mathbf{L}$ через $\Uparrow(\mathbf{P})$ $(\Downarrow(\mathbf{P}))$ будем обозначать набор, состоящий из нижних пределов возрастающих (убывающих) направленностей в $\mathbf{P}$. Всякая возрастающая (убывающая) направленность α сходится в $\mathbf{U}[\mathbf{L}]$ к

$\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ (к $\bigcap\limits_{i\in I} A_i$). Отсюда следует

1.4. *Если набор* $\mathbf{P}$ *замкнут в* $\mathbf{U}[\mathbf{L}]$, *то* $\Uparrow(\mathbf{P}) \cup \Downarrow(\mathbf{P}) \subseteq \mathbf{P}$.

Из 1.4 следует, что если набор $\mathbf{P}$, замкнутый в $\mathbf{U}[\mathbf{L}]$, является верхней подполурешеткой $\mathbf{L}$, то $\mathbf{P}$ — полная верхняя подполурешетка $\mathbf{L}$.

Действительно, пусть $\mathbf{R} \subseteq \mathbf{P}$, $\mathbf{S}$ — набор, состоящий из объединений всевозможных конечных поднаборов $\mathbf{R}$. По условию, $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{P}$. Упорядочивая $\mathbf{S}$ по включению, получаем возрастающую направленность в $\mathbf{P}$, сходящуюся (в $\mathbf{U}[\mathbf{L}]$) к множеству $\cup\ \mathbf{R}$, принадлежащему $\mathbf{P}$ в силу замкнутости $\mathbf{P}$ в $\mathbf{U}[\mathbf{L}]$.

Аналогично доказывается

1.5. *Если набор* $\mathbf{P}$, *замкнутый в* $\mathbf{U}[\mathbf{L}]$, *является нижней подполурешеткой* $\mathbf{L}$, то $\mathbf{P}$ — *полная нижняя подполурешетка* $\mathbf{L}$.

Для всякого набора $\mathbf{P}$ множеств из $\mathbf{L}$ через $\mathbf{H}(\mathbf{P})$ будем обозначать набор $\{R \in \mathbf{L}/(\exists S)(S \in \mathbf{P} \wedge S \subseteq R)\}$.

1.6. *Если набор* $\mathbf{P}$ *замкнут в* $\mathbf{U}[\mathbf{L}]$, то $\mathbf{H}(\mathbf{P})$ *замкнут в* $\mathbf{U}[\mathbf{L}]$.

В самом деле, пусть $\lambda = (A_i/i \in I)$ — семейство в $\mathbf{H}(\mathbf{P})$, $\mathbf{F}$ — ультрафильтр на I. Каждому A_i соотнесем какое-нибудь его подмножество B_i из $\mathbf{P}$. Рассмотрим семейство $\mu = (B_i/i \in I)$. Так как $\mathbf{P}$ замкнут в $\mathbf{U}[\mathbf{L}]$, то $\lim_{\mathrm{F}} \mu \in \mathbf{P}$. А так как $\lim_{\mathrm{F}} \mu \subseteq \lim_{\mathrm{F}} \lambda$, то $\lim_{\mathrm{F}} \lambda \in \mathbf{H}(\mathbf{P})$.

Для всякого набора $\mathbf{P}$ множеств из $\mathbf{L}$ через $\mathbf{P}_0(\mathbf{P})$ будем обозначать набор, состоящий из пересечений всевозможных поднаборов $\mathbf{P}$ (а значит, $M \in \mathbf{P}_0(\mathbf{P})$).

1.7. *Если набор* $\mathbf{P}$ *замкнут в* $\mathbf{U}[\mathbf{L}]$, то $\mathbf{P}_0(\mathbf{P})$ *замкнут в* $\mathbf{U}[\mathbf{L}]$.

Пусть D — поддиаграмма, все конечные поддиаграммы которой выполнимы в $\mathbf{P}_0(\mathbf{P})$. Покажем, что тогда D выполнима в $\mathbf{P}_0(\mathbf{P})$. Отсюда и из 1.3 будет следовать справедливость предложения 1.7. Пусть D^+ (D^-) — поддиаграмма, состоящая из всех знаков вида a^+ (a^-) из D. Все конечные поддиаграммы D^+ выполнимы в $\mathbf{P}$. Но тогда, в силу замкнутости $\mathbf{P}$ в $\mathbf{U}[\mathbf{L}]$, D^+ выполнима в $\mathbf{P}$. Для всякого a^- из D^- поддиаграмма $D_a = D^+ \cup \{a^-\}$ выполнима в $\mathbf{P}$. В противном случае некоторая конечная ее поддиаграмма $\{b^+, \dots, c^+, a^-\}$ была бы невыполнимой в $\mathbf{P}$, т. е. всякое множество из $\mathbf{P}$, содержащее $b, \dots, c$, содержало бы a. Но тогда пересечение всяких множеств из $\mathbf{P}$, содержащих $b, \dots, c$, содержало бы a, а значит, поддиаграмма $\{b^+, \dots, c^+, a^-\}$ была бы невыполнимой в $\mathbf{P}_0(\mathbf{P})$, вопреки предположению. Для каждой D_a выберем какое-нибудь множество S_a из $\mathbf{P}$, для которого D_a является поддиаграммой. Ясно, что D — поддиаграмма множества $\cap S_a$, принадлежащего $\mathbf{P}_0(\mathbf{P})$.

1.8. *Набор* $\mathbf{P} = \mathrm{P}_0(\mathbf{P})$ *замкнут в* $\mathbf{U}[\mathbf{L}]$ *в точности тогда, когда* $\mathbf{P}{=}\Uparrow(\mathbf{P})$.

Необходимость следует из 1.4. Достаточность следует из того, что если $\mathbf{P}{=}\ \mathbf{P}_0(\mathbf{P}){=}\Uparrow(\mathbf{P})$, то нижние пределы направленностей в $\mathbf{P}$ принадлежат $\mathbf{P}$.

Для всякого набора $\mathbf{P}$ множеств из $\mathbf{L}$ через $\mathbf{Q}(\mathbf{P})$ будем обозначать набор, состоящий из M и нижних пределов направленностей в $\mathbf{P}$. Легко видеть, что $\mathbf{Q}(\mathbf{P})$ замкнут в $\mathbf{U}[\mathbf{L}]$, а значит, $\Uparrow(\mathbf{P}) \subseteq \mathbf{Q}(\mathbf{P})$ и $\mathrm{P}_0(\mathbf{P}) \subseteq \mathbf{Q}(\mathbf{P})$. Очевидно также, что $\mathbf{Q}(\mathbf{P})$ состоит из M и пределов по фильтрам всевозможных семейств множеств из $\mathbf{P}$. Отсюда следует

1.9. $\mathbf{Q}(\mathbf{P}){=}\Uparrow(\mathbf{P}_0(\mathbf{P}))$ *для всякого набора* $\mathbf{P}$ *множеств из* $\mathbf{L}$.

1.10. *Операция, соотносящая всякому набору* $\mathbf{P}$ *множеств из* $\mathbf{L}$ *набор* $\mathbf{H}(\mathbf{P}_0(\mathbf{P}))$, *является операцией замыкания.*

Экстенсивность и изотонность этой операции очевидны. Пусть $(A_i/i \in I)$ — семейство множеств из $\mathbf{H}(\mathbf{P}_0(\mathbf{P}))$. Каждому A_i сопоставим какое-нибудь его подмножество B_i из $\mathbf{P}_0(\mathbf{P})$. Ясно, что $\bigcap\limits_{i\in I} B_i \in \mathbf{P}_0(\mathbf{P})$. А так как $\bigcap\limits_{i\in I} B_i \subseteq \bigcap\limits_{i\in I} A_i$, то $\bigcap\limits_{i\in I} A \in \mathbf{H}(\mathbf{P}_0(\mathbf{P}))$. Таким образом, $\mathbf{P}_0(\mathbf{H}(\mathbf{P}_0(\mathbf{P})))$ $\subseteq \mathbf{H}(\mathbf{P}_0(\mathbf{P}))$. Отсюда следует идемпотентность рассматриваемой операции.

***

Будем рассматривать универсальные алгебры произвольной фиксированной сигнатуры. Для всякой алгебры $\mathbf{A}$ решетку ее конгруэнций будем обозначать Con$\mathbf{A}$. Говоря о классах алгебр, будем иметь в виду классы, замкнутые относительно изоморфизмов. Класс алгебр K будем называть $\mathbf{U}$–замкнутым, если для всякой алгебры $\mathbf{A}$ множество ее K-конгруэнций, т. е. таких конгруэнций θ, что $\mathbf{A}/\theta \in$ K, замкнуто в $\mathbf{U}$(Con$\mathbf{A}$). Через $\mathbf{S}$(K) обозначим замыкание класса K относительно взятия подалгебр.

Теорема 2.1. ([4, теорема 15]; см. также [5, лемма 5]). *Если* K $= \mathbf{U}$(K)*, то* K $= \mathbf{S}$(K).

Пусть $\mathbf{A}$ — алгебра из K с носителем A, $\mathbf{B}$ — ее подалгебра с носителем B, $(U_n/n = 1, 2, 3, \ldots)$ — последовательность попарно непересекающихся множеств, мощности которых не меньше A, $U = \cup U_n$, $\mathbf{U}$ — абсолютно свободная алгебра, U — множество ее свободных порождающих. Через h_1 обозначим какой-нибудь гомоморфизм $\mathbf{U}$ на $\mathbf{A}$, при котором U_1 отображается на B, через h_2 — гомоморфизм $\mathbf{U}$ на $\mathbf{A}$, совпадающий с h_1 на U_1 и такой, что U_2 отображается на B, через h_3 — гомоморфизм $\mathbf{U}$ на $\mathbf{A}$, совпадающий с h_2 на $U_1 \cup U_2$ и такой, что U_3 отображается на B, через h_4 — гомоморфизм $\mathbf{U}$ на $\mathbf{A}$, совпадающий с h_3 на $U_1 \cup U_2 \cup U_3$ и такой, что U_4 отображается на B, и т. д. Конгруэнции θ_{n} на $\mathbf{U}$, порождаемые отображениями h_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, образуют сходящуюся в $\mathbf{U}$(Con$\mathbf{A}$) направленность α такую, что $\mathbf{U}/\underline{\lim}\ \alpha \cong \mathbf{B}$.

Теорема 2.2. *Пусть каждая конечная поддиаграмма алгебры* $\mathbf{A}$ *выполнима в* K $= \mathbf{U}$(K)*. Тогда* $\mathbf{A} \in$ K.

Пусть D_0 — диаграмма алгебры $\mathbf{A}$**,** $\mathbf{U}$ — абсолютно свободная алгебра, свободными порождающими которой являются все индивидные константы из D_0. Каждой конечной поддиаграмме D соотнесем тройку $(\mathbf{A}_D, r, h_D)$, где $\mathbf{A}_D$ — какая-нибудь алгебра из K, реализующая D, r — какая-нибудь реализация D в $\mathbf{A}_D, h_D$ — такой гомоморфизм $\mathbf{U}$ на подалгебру $\mathbf{A}_D$, порожденную элементами, r-интерпретирующими индивидные константы, входящие в D, при котором каждая константа из D отображается на интерпретирующий ее элемент $\mathbf{A}_D$. Конгруэнция θ_D на $\mathbf{U}$, порождаемая гомоморфизмом h_D, является K-конгруэнцией, т. к. $\mathbf{A}_D \in$ K и, согласно теореме 2.1, всякая подалгебра $\mathbf{A}_D$ принадлежит K. Пусть D — множество всех конечных поддиаграмм $\mathbf{A}$, упорядоченное по включению. Направленность $\alpha = (\theta_D/D \in D)$ сходится в $\mathbf{U}$(Con$\mathbf{A}$) и $\mathbf{U}/\underline{\lim}\ \alpha \cong \mathbf{A}$, а значит, $\mathbf{A} \in$K.

Из теоремы 2.2 и теоремы Тарского — Лося [13], [16] следует

Теорема 2.3. *Класс алгебр* K *универсально аксиоматизируем тогда и только тогда, когда* K$=\mathbf{U}$(K).

Здесь уместно заметить, что всякое направленное "множество" элементарно аксиоматизируемых классов алгебр представимо использованием сколемизации как направленное "множество" обеднений универсально аксиоматизируемых классов алгебр (одной и той же сигнатуры). Отсюда и из теоремы компактности для универсально аксиоматизируемых классов следует теорема компактности для элементарно аксиоматизируемых классов.

Из 1.1, 1.2 и теоремы 2.3 вытекает

2.4 [3, теорема 9]. *Универсальная аксиоматизируемость класса алгебр* K *равносильна тому, что для всякой алгебры* $\mathbf{A}$, *всякого семейства* $\beta = (\theta_i/i \in \mathrm{I})$ K-*конгруэнций на* $\mathbf{A}$ *и всякого ультрафильтра* $\mathbf{F}$ на I $\lim_{\mathrm{F}} \beta$ есть K-*конгруэнция.*

Заметим, что фильтрованное произведение семейства алгебр $\lambda = (\mathbf{A}_i/i \in \mathrm{I})$ по фильтру $\mathbf{F}$ изоморфно факторалгебре их прямого произведения по конгруэнции, являющейся пределом семейства проекций $(\pi_i/i \in \mathrm{I})$ по $\mathbf{F}$. А так как эта конгруэнция определима (с помощью фильтра $\mathbf{F}$) только семейством носителей алгебр $\mathbf{A}_i$ (и этим фильтром), то отсюда и из 2.4 следует, что всякий класс алгебр, являющийся проекцией универсально аксиоматизируемого класса, замкнут относительно ультрапроизведений. В частности, всякий элементарно аксиоматизируемый класс замкнут относительно ультрапроизведений, т. е. ультрапроизведения сохраняют свойства алгебр, выразимые на языке логики первого порядка.

Из теоремы 2.3 и 1.5 следует

2.5. *Универсально аксиоматизируемый класс, замкнутый относительно прямых произведений конечных наборов алгебр, замкнут относительно прямых произведений любых наборов алгебр.*

Из теоремы 2.3 и 1.6 следует

2.6. *Гомоморфное замыкание универсально аксиоматизируемого класса есть универсально аксиоматизируемый класс.*

Из теоремы 2.3 и 1.7 следует

2.7. *Замыкание универсально аксиоматизируемого класса относительно подпрямых произведений есть универсально аксиоматизируемый класс.*

Для всякого класса алгебр K через $\Uparrow$(K) будем обозначать его замыкание относительно взятия пределов прямых спектров, через $\mathbf{P}_0$ (K) — замыкание относительно подпрямых произведений всевозможных наборов алгебр из K и через $\mathbf{Q}$(K) — такой класс K_1, что для всякой алгебры $\mathbf{A}$ множество K_1-конгруэнций на $\mathbf{A}$ есть $\mathbf{Q}$-замыкание (в решетке Con$\mathbf{A}$) множества K-конгруэнций.

Из 1.8 и 2.3 следует

2.8. *Класс алгебр* K$=\mathbf{P}_0$(K) *в точности тогда универсально аксиоматизируем, когда* K$=\Uparrow$(K).

Отсюда и из результата Р. Линдона ([15], см. также [14]) следует

2.8.1. *Класс алгебр* K$=\mathbf{P}_0$(K) *в точности тогда элементарно аксиоматизируем, когда* K$=\Uparrow$(K).

Так как $\mathbf{Q}$-замыкание $\mathbf{U}$-замкнуто, то для всякого класса алгебр K его **Q**-замыкание есть универсально аксиоматизируемый класс. А так как этот класс замкнут относительно подпрямых произведений, то он является наименьшим квазимногообразием, включающим K. Таким образом, имеет место

Теорема 2.9. *Наименьшее квазимногообразие, включающее класс* K*, есть такой класс* K_1*, содержащий единичную алгебру, что для всякой алгебры* A *множество* K_1*-конгруэнций на* A *состоит из нижних пределов всевозможных направленностей* K*-конгруэнций.*

Отсюда и из 1.9 следует

Теорема 2.10 (ср. [3, теорема 10]). *Наименьшее квазимногообразие, включающее класс* K*, есть* $\Uparrow (\mathbf{P}_0(\mathrm{K}))$.

Теорема 2.11 (см. также [2] и [8]). *Наименьшее многообразие, включающее класс* K*, есть* $\mathbf{H}(\mathbf{P}_0(\mathrm{K}))$.

Очевидно, что класс $\mathrm{V}=\mathbf{H}(\mathbf{P}_0(\mathrm{K}))$ замкнут относительно гомоморфизмов. Из 1.10 следует, что он замкнут относительно подпрямых произведений. Пусть A — какая-нибудь алгебра, $\alpha = (\theta_i/i \in \mathrm{I})$ — направленность V-конгруэнций на A. $\bigcap\limits_{j\geqslant i}\theta_j$ является V-конгруэнцией для всякого $i \in \mathrm{I}$, т. к. V замкнут относительно подпрямых произведений. Но тогда $\underline{\lim}\ \alpha = \bigcup\limits_{i\in I}\bigcap\limits_{j\geqslant i}\theta_j$ является V-конгруэнцией, т. к. V замкнут относительно гомоморфизмов. Отсюда и из теоремы 2.9 следует, что V — квазимногообразие, а значит, что $\mathrm{V}=\mathbf{U}(\mathrm{V})$. Из последнего и из теоремы 2.1 следует, что $\mathrm{V}=\mathbf{S}(\mathrm{V})$. Таким образом, V замкнут относительно гомоморфизмов, прямых произведений и взятия подалгебр. А значит, он является многообразием [10]. Но всякое многообразие, включающее K, содержит всевозможные гомоморфные образы всевозможных подпрямых произведений алгебр из K. Отсюда ясно, что V — наименьшее из таких многообразий.

Из теоремы 2.11 следует, что для того, чтобы класс алгебр K был многообразием, необходимо, чтобы для всякой алгебры **A** множество K-конгруэнций на **A** было полной подрешеткой решетки Con**A.** В 1978 г. С. Д. Бродский установил, что это условие достаточно для групп. В [1] показано, что оно достаточно и в общем случае.

Из 1.4. вытекает следующее:

Пусть универсально аксиоматизируемый класс алгебр K *таков, что для всякой алгебры* A *множество* K*-конгруэнций на* A *является верхней подполурешеткой решетки* Con$A$*. Тогда эта подполурешетка полная.*

В действительности имеет место следующее намного более сильное предложение:

Пусть класс алгебр K *таков, что для всякой алгебры* **U** *множество* K*-конгруэнций на* **U** *является верхней подполурешеткой решетки* Con**U**. *Тогда* $\mathrm{K}=\mathbf{H}(\mathrm{K})$.

Это предложение является прямым следствием следующей теоремы:

Теорема 2.12 [1, теорема 3]. *Пусть алгебра* **B** *является гомоморфным образом алгебры* **A**. *Тогда существуют алгебра* **C** *и такие конгруэнции* θ_1 *и* θ_2 *на* **C**, *что* $\mathbf{C}/\theta_1 \cong \mathbf{C}/\theta_2 \cong \mathbf{A}$ *и* $\mathbf{C}/\theta_1 \vee \theta_2 \cong \mathbf{B}$.

Пусть h — гомоморфное отображение **A** на **B**, $\theta = \{(s_i, t_i)/i \in \mathrm{I}\}$ — конгруэнция на **A**, порождаемая этим отображением, **U** — абсолютно свободная алгебра с базой $\mathrm{A} \cup \mathrm{I}$, где A — множество элементов **A**. Обозначим через h_1 и h_2 гомоморфные отображения **U** на **A** такие, что $\mathrm{h}_1(a) = \mathrm{h}_2(a) = a$ для всякого $a \in A$ и $\mathrm{h}_1(i) = s_i$, $\mathrm{h}_2(i) = t_i$ для всякого $i \in \mathrm{I}$. Конгруэнции θ_1 и θ_2 на **U,** порождаемые этими отображениями, таковы, что $\mathbf{U}/\theta_1 \cong \mathbf{U}/\theta_2 \cong \mathbf{A}$ и $\mathbf{U}/\theta_1 \vee \theta_2 \cong \mathbf{B}$.

Из теорем 2.11 и 2.12 следует

Теорема 2.13 (см. [1, теорема 2])*. *Непустой класс алгебр* K *есть многообразие в точности тогда, когда для всякой алгебры* **U** *множество K-конгруэнций на* **U** *является верхней подполурешеткой и полной нижней подполурешеткой решетки Con***U**.

А значит,

K *есть многообразие в точности тогда, когда для всякой алгебры* **U** *множество* K-*конгруэнций на* **U** *является полной подрешеткой решетки* Con**U**.

И потому

Универсально аксиоматизируемый класс алгебр K *есть многообразие в точности тогда, когда для всякой алгебры* **U** *множество* K-*конгруэнций на* **U** *является подрешеткой решетки* Con**U**.

Теоремы 2.1 — 2.11 очевидным образом распространяются на алгебраические системы. Что же касается теорем 2.12 и 2.13, то они перестают быть истинными в случае моделей (реляционных систем). В этом легко убедиться, рассматривая классы одноэлементных моделей. Для алгебраических систем в [1] находится синтаксический эквивалент условия теоремы 2.13.

***

Класс всех конечных алгебр, принадлежащих классу K, условимся обозначать через **Fin**(K). Будем рассматривать алгебры какой-нибудь конечной сигнатуры. Пусть K — какой-нибудь класс конечных алгебр, **A** — конечная алгебра из **U**(K). Тогда для некоторой алгебры **B** и некоторой конгруэнции θ на **B** имеет место $\mathbf{B}/\theta \cong \mathbf{A}$ и $\theta = \underline{\lim}\ \alpha$ для сходящейся в **U**(Con **B**) направленности $\alpha = (\theta_i/i \in \mathrm{I})$ K-конгруэнций. А так как диаграмма **A** конечна, то она реализуется в некоторой θ_i. Значит, **A** — подалгебра конечной алгебры $\mathbf{B}/\theta_i$ из K и потому **A**∈**S**(K). Таким образом, справедливо

Замечание 3.1. K=**Fin**(K)⇒**Fin(U**(K))=**S**(K).

Для всякого класса алгебр K через $\mathbf{P_0}^\omega$(K) будем обозначать класс всевозможных конечных подпрямых произведений алгебр из K, через **Q**(K) — наименьшее квазимногообразие, включающее K, а через **V**(K) — наименьшее многообразие, включающее K.

Замечание 3.2. K=**Fin**(K)⇒**Fin**(**Q**(K))=**S**($\mathbf{P_0}^\omega$(K)).

Включение **S**($\mathbf{P_0}^\omega$(K))⊆**Fin**(**Q**(K)) очевидно. Допустим, что обратное включение не имеет места, т. е. что в **Fin**(**Q**(K)) существует алгебра **A**, не принадлежащая **S**($\mathbf{P_0}^\omega$(K)). Но тогда некоторая поддиаграмма **A** не реализуема ни в какой алгебре из **S**($\mathbf{P_0}^\omega$(K)). Пусть D — минимальная поддиаграмма **A**, не реализуемая в **S**($\mathbf{P_0}^\omega$(K)). Это означает, что в

*Эта теорема вместе с теоремой 2.12 была “переоткрыта”в [11].

$\mathbf{S}(\mathbf{P}_0{}^\omega(\mathrm{K}))$

I. либо не выполняется некоторое выполняющееся в $\mathrm{Fin}(\mathbf{Q}(\mathrm{K}))$ предложение (*):

$$\exists x \cdots \exists y(\gamma_1(x, \ldots, y)) \wedge \ldots \wedge \gamma_m(x, \ldots, y) \wedge \neg\, \eta(x, \ldots, y)),$$

II. либо не выполняется некоторое выполняющееся в $\mathrm{Fin}(\mathbf{Q}(\mathrm{K}))$ предложение (**):

$$\exists x \cdots \exists y(\gamma_1(x, \ldots, y)) \wedge \ldots \wedge \gamma_m(x, \ldots, y) \wedge \neg\, \eta_1(x, \ldots, y) \wedge \ldots \\ \wedge \neg\, \eta_n(x, \ldots, y)),$$

тогда как в $\mathbf{S}(\mathbf{P}_0{}^\omega(\mathrm{K}))$ выполнимо каждое из предложений

$$\phi_i \ : \ \exists x \cdots \exists y(\gamma_1(x, \ldots, y) \wedge \ldots \wedge \gamma_m(x, \ldots, y) \wedge \neg\, \eta_1(x, \ldots, y) \wedge \ldots \\ \wedge\, \eta_{i-1}(x, \ldots, y) \wedge \eta_{i+1}(x, \ldots, y) \wedge \ldots \wedge \neg\, \eta_n(x, \ldots, y)) \quad (i = 1, \ldots, n),$$

где $\gamma_i(x, \ldots, y)$, $\eta_j(x, \ldots, y)$ — атомарные формулы.

Допустим, что имеет место случай I. Тогда $\mathbf{S}(\mathbf{P}_0{}^\omega(\mathrm{K}))$ удовлетворяет предложению

$$\forall x \cdots \forall y(\neg\, \gamma_1(x, \ldots, y) \vee \ldots \vee\ \neg\, \gamma_m(x, \ldots, y) \vee\ \eta(x, \ldots, y)),$$

преобразуемому в квазитождество, а потому и класс $\mathbf{Q}(\mathrm{K})$ ему удовлетворяет. Значит, этот класс не удовлетворяет предложению (*). Пришли к противоречию. Таким образом, случай I невозможен.

Допустим, что имеет место случай II. Пусть $\mathbf{A}_i$ — такая алгебра из $\mathbf{S}(\mathbf{P}_0{}^\omega(\mathrm{K}))$, что для ее элементов $x^i, \ldots, y^i$ справедливо следующее:

$$\gamma_1(x^i, \ldots, y^i) \wedge \ldots \wedge \quad \gamma_m(x^i, \ldots, y^i) \wedge \neg\, \eta_1(x^i, \ldots, y^i) \wedge \ldots \\ \wedge \neg\, \eta_{i-1}(x^i, \ldots, y^i) \wedge \neg\, \eta_{i+1}(x^i, \ldots, y^i) \wedge \ldots \wedge \neg\, \eta_n(x^i, \ldots, y^i) \quad (i \in I).$$

Элементы $\mathbf{x}^0 = \langle x^1, \ldots, x^n \rangle$, $\mathbf{y}^0 = \langle y^1, \ldots, y^n \rangle$ алгебры $\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2 \times \ldots \times \mathbf{A}_n$ таковы, что

$$\gamma_1(\mathbf{x}^0, \ldots, \mathbf{y}^0) \wedge \ldots \wedge \gamma_m(\mathbf{x}^0, \ldots, \mathbf{y}^0) \wedge \\ \neg\, \eta_1(\mathbf{x}^0, \ldots, \mathbf{y}^0) \wedge \ldots \wedge \neg\, \eta_n(\mathbf{x}^0, \ldots, \mathbf{y}^0).$$

Значит, $\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2 \times \ldots \times \mathbf{A}_n$ удовлетворяет (**) вопреки предположению.

Замечание 3.3. *Пусть* K — *класс, состоящий из конечного множества конечных алгебр. Тогда* $\mathbf{Fin}(\mathbf{V}(\mathrm{K}))$=$\mathbf{H}(\mathbf{S}(\mathbf{P}_0{}^\omega(\mathrm{K})))$.

Пусть $\mathbf{A}$ — алгебра из $\mathbf{Fin}(\mathbf{V}(\mathrm{K}))$. Она является гомоморфным образом некоторой алгебры **B,** являющейся подпрямым произведением множества $\{\mathbf{A}_i / i \in \mathrm{I}\}$ алгебр из K. Если I конечно, то, очевидно, $\mathbf{A} \in \mathbf{H}(\mathbf{S}(\mathbf{P}_0{}^\omega(\mathrm{K})))$.

Рассмотрим случай, когда I бесконечно. Пусть $\{a, \ldots, b\}$ — множество всех элементов $\mathbf{A}$, h — гомоморфизм $\mathbf{B}$ на $\mathbf{A}$, a_0 — какой-нибудь h-прообраз a, ... , b_0 — какой-нибудь h-прообраз b, $\mathbf{C}$ — подалгебра $\mathbf{B}$, порожденная множеством $M = \{a_0, \ldots, b_0\}$. Она конечна, т. к. $\mathbf{A}$ — ее гомоморфный образ и класс $\mathbf{V}(\mathrm{K})$ локально конечен.

Будем обозначать через ρ_i конгруэнцию на **C**, определяемую ее i-й проекцией π_i. Для всякого множества $J \subset I$ будем обозначать через ρ_J конгруэнцию $\bigcap_{j\in J}\rho_j$. Алгебра **C** изоморфна $\mathbf{C}/\bigcap_{j\in J}\rho$, где J — некоторое конечное подмножество I. Действительно, для каждой позитивной формулы $\phi(c, \ldots, d)$ из диаграммы **C** и для всякого множества $J \subset I$ формула $\phi(\rho_J(\mathrm{c}), \ldots, \rho_J(d))$ выполняется в $\mathbf{C}/\bigcap_{j\in J}\rho$. Для всякой негативной формулы $\neg\ \phi(c, \ldots, d)$ из диаграммы **C** формула $\neg\ \phi(\rho_J(\mathrm{c}), \ldots, \rho_J(d))$ выполняется в $\mathbf{C}/\pi_i$ для некоторого $i \in I$. Выбирая для каждой негативной формулы из диаграммы **C** такое i, получим конечное множество $J \subset I$ такое, что $\mathbf{C}/\bigcap_{j\in J}\rho \cong \mathbf{C}$. Отсюда следует, что $\mathbf{C}\in\mathbf{S}(\mathbf{P}_0{}^{\omega}(\mathrm{K}))$. Но тогда $\mathbf{A}\in\mathbf{H}(\mathbf{S}(\mathbf{P}_0{}^{\omega}(\mathrm{K})))$.

***

Будем рассматривать алгебры какой-нибудь фиксированной сигнатуры и соответствующие этой сигнатуре инфинитарные (замкнутые) формулы вида

$$(\forall\mathbf{X})(\bigvee_{i\in I}\phi_i), \tag{*}$$

где **X** — не более чем счетный кортеж индивидных переменных, I — не более чем счетное множество, ϕ_i — атомарные формулы или отрицания атомарных формул. Такие формулы будем называть *σ-универсальными.* Классы алгебр, определимые множествами таких формул, будем называть *σ-универсально аксиоматизируемыми* классами. Очевиден следующий аналог теоремы Тарского — Лося:

4.1. *Следующие условия равносильны:*

1. класс алгебр K *σ-универсален,*

2. алгебра принадлежит K *в точности тогда, когда всякая не более чем счетная ее поддиаграмма выполнима в* K.

Частично упорядоченное множество будем называть *σ-направленным*, если всякое его (не более чем) счетное подмножество имеет мажоранту (ограничено сверху). Направленность $\alpha = (a_i/i \in \mathrm{I})$ будем называть *σ-направленностью*, если I *σ-направленно.*

Пусть **L** — полная решетка, $\alpha = (a_i/i \in \mathrm{I})$ — σ-направленность в **L**. Для всякого (непустого) множества P элементов **L** через $\mathbf{U}_\sigma(\mathrm{P})$ будем обозначать множество, состоящее из нижних пределов всех **U**-сходящихся σ-направленностей на P, а через $\mathbf{Q}_\sigma(\mathrm{P})$ — множество, состоящее из единицы **L** и нижних пределов всех σ-направленностей в P. Легко видеть, что $\mathbf{U}_\sigma$ и $\mathbf{Q}_\sigma$ — операции замыкания и что $\mathbf{U}_\sigma$ — топологическая операция замыкания.

Класс алгебр K будем называть $\mathbf{U}_\sigma$-замкнутым ($\mathbf{Q}_\sigma$-замкнутым), если для всякой алгебры **A** множество ее K-конгруэнций является $\mathbf{U}_\sigma$-замкнутым ($\mathbf{Q}_\sigma$-замкнутым) подмножеством Con**A**.

4.2. *Если* $\mathrm{K}=\mathbf{U}_\sigma(\mathrm{K})$, *то* $\mathrm{K}=\mathbf{S}(\mathrm{K})$.

Пусть **A** — алгебра из K с носителем A, **B** — ее подалгебра с носителем B, $(\mathrm{U}_\alpha/\alpha \prec \beta)$ — возрастающая последовательность множеств, включающих A, β — какой-нибудь начальный несчетный ординал, $\mathrm{U}=\cup\mathrm{U}_\alpha$, **U** — свободная алгебра, порожденная U. Через h_0 обозначим какой-нибудь гомоморфизм **U** на **A**, при котором U_0 отображается на B, через h_1 — какой-нибудь гомоморфизм **U** на **A**, совпадающий с h_0 на U_0 и такой, что U_1 отображается на B, и т. д. Пусть определены h_α для всех $\alpha \prec \gamma(\gamma \prec \beta)$. Тогда h_γ определяем как гомоморфизм **U** на **A**, совпадающий с h_α на U_α для всех $\alpha \prec \gamma$ и такой, что U_γ отображается на B. Конгруэнции θ_α на **U**, порождаемые отображениями h_α $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, образуют сходящуюся σ-направленность λ такую, что $\mathbf{U}/\underline{\lim}\lambda \cong \mathbf{B}$.

Так как всякий **U**-замкнутый класс $\mathbf{U}_\sigma$-замкнут, то 4.2 усиливает теорему 2.1.

4.3. *Класс алгебр* K *σ-универсально аксиоматизируем тогда и только тогда, когда* K$=\mathbf{U}_\sigma$(K).

Пусть K определяется системой Σ σ-универсальных формул. Покажем, что тогда K$=\mathbf{U}_\sigma$(K). Пусть **A** — какая-нибудь алгебра, $\lambda = (\theta_i/i \in I)$ — **U**-сходящаяся σ-направленность K-конгруэнций на **A**. Тогда $\underline{\lim}\lambda$ — K-конгруэнция. Допустим противное, т. е. что алгебра $\mathbf{A}/\underline{\lim}\lambda$ не принадлежит K. Тогда, согласно 4.1, некоторая конечная или счетная поддиаграмма D этой алгебры не выполняется в K. Пусть Δ — подмножество $\underline{\lim}\lambda$ такое, что соответствующая ему часть алгебры $\mathbf{A}/\underline{\lim}\lambda$ представляет эту поддиаграмму. Для каждой пары $p \in \underline{\lim}\lambda$ существует $i \in I$ такое, что для всякого $j \geqslant i$ p входит в θ_j. А так как Δ не более чем счетно и λ — σ-направленность, то существует такое i_0, что для всякого $j \geqslant i_0$ имеет место $\Delta \subset \theta_j$. Следовательно, для всякого $j \geqslant i_0$ алгебра $\mathbf{A}/\theta_j$ выполняет поддиаграмму D и потому θ_j не является K-конгруэнцией вопреки условию.

Пусть K$=\mathbf{U}_\sigma$(K). Покажем, что K определяется системой Σ всех σ-универсальных формул, истинных в K. Пусть **A** — алгебра из класса K_1, определяемого этой системой, и ее диаграмма конечна или счетна. Допустим, что $\mathbf{A}\notin$K. Это, в силу 4.2, равносильно тому, что K удовлетворяет некоторой σ-универсальной формуле, выражающей невыполнимость диаграммы **A**. Но тогда $\mathbf{A}\notin\mathrm{K}_1$.

Пусть диаграмма **A** несчетна. Невыполнимость в K какой-нибудь ее конечной или счетной поддиаграммы выражалась бы некоторой σ-универсальной формулой, входящей в Σ. Но тогда алгебра **A** не входила бы и в K_1. Таким образом, всякая не более чем счетная поддиаграмма **A** выполнима в K. Покажем, что $\mathbf{A}\in$K.

Каждой не более чем счетной поддиаграмме D алгебры **A** соотнесем какую-нибудь алгебру $\mathbf{A}_D$ из K, ее выполняющую и порождаемую теми ее элементами, которые интерпретируют индивидные константы из D. Так как объединение счетного множества счетных множеств счетно, то множество **D** всех таких поддиаграмм является σ-направленным по включению. Пусть **U** — абсолютно свободная алгебра, равномощная **A**, f — взаимно однозначное отображение ее базы на множество индивидных констант, входящих в диаграмму **A**. Для каждой из алгебр $\mathbf{A}_D$ обозначим через h_D какое-нибудь отображение базы **U** на множество элементов этой алгебры такое, что для всякой индивидной константы a, входящей в D, $f^{-1}(a)$ отображается в тот элемент $\mathbf{A}_D$, который интерпретирует a. Через $\mathbf{h}_D$ будем обозначать гомоморфизм **U** на $\mathbf{A}_D$, определяемый отображением h_D, а через θ_D — конгруэнцию на **U**, определяемую $\mathbf{h}_D$. Направленность $\lambda = (\theta_D/D \in \mathbf{D})$ является U-сходящейся σ-направленностью и $\mathbf{U}/\underline{\lim}\lambda \cong \mathbf{A}$.

Для σ-универсально аксиоматизируемых классов справедливы аналоги предложений 2.5 — 2.8. Доказательства следующих предложений аналогичны доказательствам теорем 2.9 и 2.10.

Формулы вида (*), в которых все ϕ_i, кроме одной, являются отрицаниями атомарных формул, будем называть *σ-квазитождествами.* Классы алгебр, определимые системами σ-квазитождеств, будем называть *σ-квазимногообразиями.*

4.4. *Класс алгебр* K *является σ-квазимногообразием в точности тогда, когда он замкнут относительно подпрямых произведений и таков, что* $\underline{\lim}\ \alpha$ *является* K*-конгруэнцией для всякой алгебры* **A** *и всякой возрастающей σ-направленности* α K*-конгруэнций на* **A**.

Множество P элементов полной решетки **L** будем называть $\mathbf{Q}_\sigma$-замкнутым в **L**, если оно состоит из единицы **L** и пределов по всевозможным σ-полным фильтрам направленностей в P.

Класс алгебр K будем называть $\mathbf{Q}_\sigma$-замкнутым, если для всякой алгебры **A** множество ее K-конгруэнций $\mathbf{Q}_\sigma$-замкнуто в Con**A.**

4.5. *Класс алгебр* K *является σ-квазимногообразием в точности тогда, когда он* $\mathbf{Q}_\sigma$*-замкнут.*

Пусть $\mathcal{N}$ – какой-нибудь кардинал. Инфинитарные формулы вида $(\forall \mathbf{X})(\bigvee\limits_{i\in I}\phi_i)$, где **X** — набор индивидных переменных какой-нибудь мощности $\leqslant \mathcal{N}$, I — множество мощности $\leqslant \mathcal{N}$, ϕ_i — атомарные формулы или отрицания атомарных формул, будем называть *$\mathcal{N}$-универсальными.* Классы алгебр, определимые множествами таких формул, будем называть *$\mathcal{N}$-универсально аксиоматизируемыми* классами. Для таких классов справедливы предложения, аналогичные 4.1 — 4.5. Заметим также, что эти предложения допускают естественные обобщения на классы алгебраических систем с бесконечноместными операциями.

Библиографический список

1. *Бродский С. Д., Когаловский С. Р.* Замечания о многообразиях алгебраических систем // Acta Sci. Math. 1981. T. 43. Fasc. 3/4. P. 263—266.
2. *Когаловский С. Р.* К теореме Биркгофа // Успехи мат. наук. 1965. Т. 20. Вып. 5. С. 206—207.
3. *Когаловский С. Р.* О квазипроективных классах моделей // Докл. АН СССР. 1963. Т. 148. № 3. С. 505—507.
4. *Когаловский С. Р.* Структурные характеристики универсальных классов // Сиб. мат. журн. 1963. Т. 4. № 1. С. 97—119.
5. *Когаловский С. Р.* Универсальные классы моделей // Докл. АН СССР. 1959. Т. 124. № 2. С. 260—263.
6. *Мальцев А. И.* Алгебраические системы. М.: Наука, 1970. 392 с.
7. *Мальцев А. И.* Подпрямые произведения моделей // Докл. АН СССР. 1956. Т. 109. № 2. С. 264—266.
8. *Шайн Б. М.* К теореме Биркгофа — Когаловского // Успехи мат. наук. 1965. Т. 20. Вып. 6. С. 173—174.
9. *Birkhoff G.* Lattice Theory. 3d ed. Providence (Rhode Island), 1973. 418 p.
10. *Birkhoff G.* On the structure of abstract algebras // Proc. Cambr. Phil. Soc. 1935. Vol. 31. P. 433—454.

11. *Ćiric M., Bogdanović S.* Posets of C-congruences // Algebra Univ. 1996. Vol. 36 P. 423—424.
12. *Kelley J. L.* General Topology. Toronto; London; New York, 1957. 384 p.
13. *Lós J.* Quelques rémarques, théorèmes et problèmes sur les classes définissables d'algèbres // Math. Interpretation of Formal Systems. Amsterdam, 1955. S. 98—113.
14. *Lyndon R.* Properties preserved under homomorphisms // Pacific J. Math. 1959. Vol. 9. P. 143—154.
15. *Lyndon R.* Properties preserved under subdirect products // Ibid. P. 155—164.
16. *Tarski A.* Contributions to the theory of models // Indag. Math. 1954. Vol. 16. P. 572—588; 1955. Vol. 17. P. 56—64.