Вестник Ивановского государственного университета

Серия «Естественные, общественные науки»

Вып. 2 / 2009 С. 113 – 116

Д. И. Молдаванский

О ФИНИТНОЙ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ ОТНОСИТЕЛЬНО СОПРЯЖЕННОСТИ ОБОБЩЕННОГО ПРЯМОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ГРУПП

Получено достаточное условие финитной аппроксимируемости относительно сопряженности обобщенного прямого произведения двух групп.

The sufficient condition for generalized direct product of two groups to be conjugacy separable is obtained.

Ключевые слова: финитная аппроксимируемость, финитная аппроксимируемость относительно сопряженности, обобщенное прямое произведение групп.

Key words: residual finiteness, conjugacy separability, generalized direct product of groups.

УДК 512.543.

Напомним, что если A и B — некоторые группы, H — центральная подгруппа группы A, K — центральная подгруппа группы B и $\varphi : H \to K$ — изоморфизм группы H на группу K, то обобщенным прямым произведением групп A и B с подгруппами H и K, объединенными в соответствии с изоморфизмом φ, называется фактор-группа $\overline{G}$ прямого произведения $G = A \times B$ групп A и B по подгруппе N, состоящей из всевозможных элементов вида $h(h\varphi)^{-1}$, где $h \in H$. Непосредственная проверка показывает выполнимость в группе G равенств $A \cap N = B \cap N = 1$ и $AN \cap BN = HN = KN$. Поэтому подгруппы A и B естественным образом вложимы в группу $\overline{G}$ и пересечение их копий AN/N и BN/N в группе $\overline{G}$ совпадает с копией HN/N подгруппы H (равной копии KN/N подгруппы K).

Финитная аппроксимируемость обобщенных прямых произведений двух групп рассматривалась в работе [1], где было показано, что известные условия Г. Баумслага [4, предложение 2] финитной аппроксимируемости обобщенного свободного произведения двух групп практически дословно переносятся на обобщенные прямые произведения. В работе [1] был также построен пример, показывающий, что идущее от [4] достаточное условие финитной аппроксимируемости обобщенного прямого произведения не является необходимым, и основанный на следующем результате из работы [3]: если группы A и B финитно аппроксимируемы и в группе B финитно отделимы все ее подгруппы, лежащие в K и имеющие в K конечный индекс, то группа $\overline{G}$ финитно аппроксимируема.

В данной статье рассматриваются условия, при которых обобщенное прямое произведение групп будет группой, финитно аппроксимируемой относительно сопряженности (фас-группой). Напомним, что группа X называется фас-группой, если для любых двух не сопряженных элементов этой группы существует гомоморфизм ее на некоторую конечную группу, в которой образы этих элементов не сопряжены.

Легко видеть (см. предложение 2 ниже), что произвольные элементы a_1 и a_2 группы A сопряжены в A тогда и только тогда, когда определяемые ими элементы a_1N и a_2N группы $\overline{G}$ сопряжены в этой группе. То же справедливо для элементов группы B. Поэтому если группа $\overline{G}$ является фас-группой, то фас-группами должны быть группы A и B. В следующем частном случае это необходимое условие оказывается и достаточным.

Предложение 1. *Пусть группы A и B являются фас-группами. Если подгруппы H и K конечны, то и группа $\overline{G}$ будет фас-группой.*

Действительно, в этом случае группа $G = A \times B$ является фас-группой, а ее подгруппа N конечна, и потому требуемое утверждение следует из предложения 2 работы [2], где показано, в частности, что фактор-группа произвольной фас-группы по конечной нормальной подгруппе является фас-группой.

Основным результатом данной работы является

Теорема. *Пусть A и B — фас-группы, H — конечно порожденная центральная подгруппа группы A, K — конечно порожденная центральная подгруппа группы B и $\varphi : H \to K$ — изоморфизм группы H на группу K. Предположим также, что фактор-группа группы A по произвольной подгруппе, лежащей в H и имеющей в H конечный индекс, является фас-группой и фактор-группа группы B по произвольной подгруппе, лежащей в K и имеющей в K конечный индекс, является фас-группой. Тогда обобщенное прямое произведение $\overline{G}$ групп A и B с подгруппами H и K, объединенными в соответствии с изоморфизмом φ, будет фас-группой.*

Доказательство этой теоремы начнем с формулировки простого критерия сопряженности элементов группы $\overline{G}$.

Предложение 2. *Пусть $f_1 = a_1b_1$ и $f_2 = a_2b_2$, где $a_i \in A$, $b_i \in B$ $(i = 1, 2)$, — произвольные элементы группы $G = A \times B$. В группе $\overline{G}$ элементы f_1N и f_2N сопряжены тогда и только тогда, когда существует $h \in H$ такой, что элементы a_1 и a_2h сопряжены в группе A и элементы b_1 и $b_2(h\varphi)^{-1}$ сопряжены в группе B.*

Действительно, элементы f_1N и f_2N сопряжены в группе $\overline{G}$ тогда и только тогда, когда $(gN)^{-1}(f_1N)(gN) = f_2N$ для некоторого $g \in G$, $g = cd$, где $c \in A$ и $d \in B$, т. е. тогда и только тогда, когда $g^{-1}f_1g = f_2n$ для подходящего $n \in N$, $n = h(h\varphi)^{-1}$, где $h \in H$. А это равносильно одновременной выполнимости равенств $c^{-1}a_1c = a_2h$ и $d^{-1}b_1d = b_2(h\varphi)^{-1}$.

Ввиду предложения 1 для доказательства теоремы достаточно для любой пары несопряженных элементов группы $\overline{G}$ указать такой гомоморфизм этой группы на некоторое обобщенное прямое произведение двух фас-групп с объединенными конечными подгруппами, при котором образы этих элементов не будут сопряженными. Воспользуемся следующим способом построения гомоморфных образов группы $\overline{G}$, являющихся обобщенными прямыми произведениями двух групп.

Выберем произвольную подгруппу R группы H, положим $S = R\varphi$ и обозначим через $\widehat{\varphi}$ изоморфизм подгруппы H/R группы A/R на подгруппу K/S группы B/S, при котором элемент hR переходит в $(h\varphi)S$ $(h \in H)$. Пусть $\overline{G}(R)$ — обобщенное прямое произведение групп A/R и B/S с подгруппами H/R и K/S, объединенными в соответствии с изоморфизмом $\widehat{\varphi}$. Таким образом, группа $\overline{G}(R)$ является фактор-группой группы $A/R \times B/S$ по ее подгруппе $\widehat{N}$, состоящей из элементов $(hR)((hR)\widehat{\varphi})^{-1}$ (где $h \in H$), и потому изоморфна фактор-группе группы G/RS по ее подгруппе NRS/RS. Поскольку $(G/RS)\,/\,(NRS/RS) \simeq G/NRS \simeq (G/N)\,/\,(NRS/N)$, существует гомоморфизм $\rho(R)$ группы $\overline{G}$ на группу $\overline{G}(R)$, при котором элемент fN группы $\overline{G}$, определяемый элементом $f = ab \in G$, переходит в элемент $\widehat{f}\widehat{N}$, определяемый элементом $\widehat{f} = (aR)(bS) \in A/R \times B/S$. Ядро этого гомоморфизма совпадает, как легко видеть, с подгруппой $RN/N = SN/N$.

В частности, фактор-группа группы $\overline{G}$ по подгруппе HN/N изоморфна группе $\overline{G}(H)$, которая является обычным прямым произведением фактор-групп A/H и B/K. Так как группы A/H и B/K являются в силу условия теоремы фас-группами, фактор-группа группы $\overline{G}$ по подгруппе HN/N есть фас-группа. Поэтому если элементы f_1N и f_2N (где, как и выше, $f_i = a_ib_i \in G$, $a_i \in A$, $b_i \in B$) группы $\overline{G}$ не сопряжены по модулю подгруппы HN/N, то гомоморфизм $\rho(H)$ является для этих элементов искомым. Следовательно, остается рассмотреть случай, когда элементы f_1N и f_2N сопряжены по модулю подгруппы HN/N, т. е. когда элементы a_1 и a_2 сопряжены в группе A по модулю подгруппы H и элементы b_1 и b_2 сопряжены в группе B по модулю подгруппы K. Заменив один из элементов f_1 и f_2 на сопряженный, мы сведем этот случай к рассмотрению пары несопряженных элементов группы $\overline{G}$, определяемых элементами группы G вида $f = ab$ и $g = ah \cdot bk$, где $a \in A$, $h \in H$, $b \in B$ и $k \in K$.

Введем в рассмотрение следующие подгруппы групп H и K:

$$U_a = \left\{x \in H \mid (\exists y \in A)(y^{-1}ay = ax\right\},$$
$$U_b = \left\{x \in K \mid (\exists y \in B)(y^{-1}ay = ax\right\}.$$

Полагаем также $V_b = U_b\varphi^{-1}$. Имеет место

Предложение 3. *Пусть $f = ab$ и $g = ah \cdot bk$ такие, как выше. Элементы fN и gN сопряжены в группе $\overline{G}$ тогда и только тогда, когда элемент $h(k\varphi^{-1})$ принадлежит подгруппе U_aV_b.*

Для доказательства предположим сначала, что элементы fN и gN сопряжены в группе $\overline{G}$. Тогда в силу предложения 2 существует такой элемент $c \in H$, что для подходящих элементов $x \in A$ и $y \in B$ выполнены равенства $x^{-1}ax = ahc$ и $y^{-1}by = bk(c\varphi)^{-1}$. Тогда имеют место включения $hc \in U_a$ и $k(c\varphi)^{-1} \in U_b$, т. е. $(k\varphi^{-1})c^{-1} \in V_b$. Следовательно, $h(k\varphi^{-1}) = hc \cdot (k\varphi^{-1})c^{-1} \in U_aV_b$.

Обратно, предположим, что $h(k\varphi^{-1}) = uv$ для некоторых $u \in U_a$ и $v \in V_b$. Тогда $x^{-1}ax = au$ для подходящего $x \in A$ и, т. к. $v\varphi \in U_b$,

$y^{-1}by = b(v\varphi)$ для подходящего $y \in B$. Поскольку для любого $h \in H$ выполнено сравнение $h \equiv h\varphi \pmod N$, имеем

$$(xy)^{-1}f(xy) = au \cdot b(v\varphi) \equiv a(uv) \cdot b = a(h(k\varphi^{-1})) \cdot b \equiv ah \cdot bk = g \pmod N.$$

Предложение 4. *Пусть X — группа, Z — центральная подгруппа группы X и для элемента $a \in X$ подгруппа U_a группы X состоит из всех таких элементов $z \in Z$, что элементы a и az сопряжены в группе X. Пусть еще R — подгруппа группы Z и пусть, аналогично, подгруппа U_{aR} фактор-группы X/R состоит из всех таких смежных классов $zR \in Z/R$, что элементы aR и $aR \cdot zR$ сопряжены в группе X/R. Тогда $U_{aR} = U_aR/R$.*

В самом деле, включение $U_aR/R \subseteq U_{aR}$ просто очевидно. Если для некоторого $z \in Z$ смежный класс zR принадлежит подгруппе U_{aR}, то для подходящего элемента $x \in X$ выполнено равенство $(xR)^{-1} \cdot aR \cdot xR = aR \cdot zR$, равносильное тому, что $x^{-1}ax = azr$ для некоторого $r \in R$. Так как $R \subseteq Z$, это означает, что $zr \in U_a$, откуда $z \in U_aR$, т. е. $zR \in U_aR/R$.

Пусть теперь элементы $f = ab$ и $g = ah \cdot bk$ группы G таковы, что элементы fN и gN не сопряжены в группе $\overline{G}$. Тогда в силу предложения 3 в группе A элемент $h(k\varphi^{-1})$ не принадлежит подгруппе U_aV_b. Так как в группе H все подгруппы финитно отделимы, найдется подгруппа R конечного индекса группы H такая, что элемент $h(k\varphi^{-1})$ не входит в подгруппу U_aV_bR, т. е. смежный класс $h(k\varphi^{-1})R$ не принадлежит подгруппе U_aV_bR/R фактор-группы H/R.

Пусть $\overline{G}(R)$ — введенное выше обобщенное прямое произведение групп A/R и B/S с подгруппами H/R и K/S, объединенными в соответствии с изоморфизмом $\widehat{\varphi}$, и $\rho(R)$ — соответствующий гомоморфизм группы $\overline{G}$ на группу $\overline{G}(R)$. Покажем, что $\rho(R)$-образы элементов fN и gN не сопряжены в группе $\widehat{G}(R)$. Так как эти образы определяются элементами $fRS = aR \cdot bS$ и $gRS = (ah)R \cdot (bk)S$ соответственно, предположение противного будет означать, в силу предложения 3, что элемент $hR \cdot (kS)\widehat{\varphi}^{-1} = h(k\varphi^{-1})R$ принадлежит подгруппе $U_{aR}V_{bS}$. Но в силу предложения 4 $U_{aR} = U_aR/R$. Кроме того, аналогично, $U_{bS} = U_bS/S$ и потому $V_{bS} = V_bR/R$. Таким образом, $U_{aR}V_{bS} = U_aV_bR/R$, так что элемент $h(k\varphi^{-1})$ оказывается принадлежащим подгруппе U_aV_bR, а это противоречит выбору R.

Поскольку фактор-группы A/R и B/S являются по условию фас-группами и потому группа $\overline{G}(R)$ в силу предложения 1 является фас-группой, доказательство теоремы закончено.

Библиографический список

1. *Агафонова А. В., Молдаванский Д. И.* О финитной аппроксимируемости обобщенных прямых произведений групп // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. Вып. 6 (2008). С. 3—8.
2. *Иванова Е. А., Молдаванский Д. И.* Об аппроксимируемости относительно сопряженности конечно порожденных нильпотентных групп // Вестн. Иван. гос. ун-та. 2004. Вып. 3. С. 125—130.

3. *Молдаванский Д. И.* О пересечении подгрупп конечного индекса в некоторых обобщенных свободных произведениях групп // Там же. Естеств., обществ. науки. 2008. Вып. 2. С. 114—122.
4. *Baumslag G.* On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. Vol. 106. № 2. P. 193—209.