Вестник Ивановского государственного университета

Серия «Естественные, общественные науки»

Вып. 2 / 2009 С. 117 – 120

С. В. Пухов

ТЕОРЕМА ФАНЬ ЦЗИ — ГЛИКСБЕРГА — ГОФФМАНА ДЛЯ ВЫПУКЛЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ СО ЗНАЧЕНИЯМИ В УПОРЯДОЧЕННЫХ ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Получено обобщение теоремы Фань Цзи — Гликсберга — Гоффмана о системах неравенств для выпуклых функций на случай выпуклых отображений со значениями в упорядоченных векторных пространствах.

We obtain the generalization of the Fan Ky — Glicksberg — Hoffman theorem about systems inequalities involving convex functions for the convex mappings from vector spaces into partially ordered vector spaces.

Ключевые слова: упорядоченное векторное пространство, положительный конус, выпуклое отображение, выпуклое множество, ядро множества.

Key words: partially ordered vector space, positive cone, convex mapping, convex set, core of a set.

УДК 519.6.

В работе рассматриваются векторные пространства только над полем вещественных чисел — вещественные векторные пространства (в.в.п.), а также упорядоченные векторные пространства (у.в.п.).

1. Пусть Z — у.в.п. с “положительным конусом”K, где $K \subseteq Z$. Порядок в Z будем обозначать $\overset{K}{\geqslant}$ (или $\overset{K}{\leqslant}$), т. е. $z_1 \overset{K}{\geqslant} z_2$ ($z_2 \overset{K}{\leqslant} z_1$), если $z_1 - z_2 \in K$. Известно [3, гл. V], что указанное бинарное отношение является (частичным) порядком в Z тогда и только тогда, когда K — *конус* ($\alpha K \subseteq K$, $\alpha > 0$, возможно умножение неравенства на положительные числа), причем K — *заостренный* конус ($0_Z \in K$, отношение рефлексивно), *выступающий* конус ($K \cap (-K) = \{0_Z\}$, поэтому K не является поглощающим множеством, отношение антисимметрично), *выпуклый* конус ($K + K \subseteq K$, отношение транзитивно, возможно почленное сложение неравенств одного знака).

Пусть теперь $H\colon X \to Z$, где X — в.в.п. Отображение H называется *выпуклым отображением*, если надграфик

$$\text{epi } H = \{(x, z) \in X \times Z : z \overset{K}{\geqslant} H(x), x \in X\}$$

является выпуклым множеством в $X \times Z$.

Легко проверить, что H — выпуклое отображение, если и только если выполнено *неравенство Иенсена*: при всех $x_1,\ x_2 \in X$ и всех $\alpha \in [0;1]$

$$\alpha H(x_1) + (1-\alpha)H(x_2) \overset{K}{\geqslant} H(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2).$$

Для обозначения (алгебраически) сопряженного к Z пространства мы используем символ Z', а для его элементов пишем $z' \in Z'$, действие $z' \in Z'$ на $z \in Z$ обозначаем $\langle z',\ z\rangle$. Как обычно, *сопряженным конусом* к конусу K называется множество

$$K' = \{z' \in Z' \colon \langle z',\ z\rangle \geqslant 0 \text{ при всех } z \in K\}.$$

2. В дальнейшем изложении нам потребуются некоторые свойства конусов и их ядер. Перечислим их. Как и выше, K — заостренный, выступающий, выпуклый конус в Z с непустым ядром, $\operatorname{core} K \neq \emptyset$.

1). $\operatorname{core} K$ — выпуклое множество в Z. Это общее свойство ядра: в вещественном векторном пространстве ядро выпуклого множества само является выпуклым множеством (см., например, [1, с. 128—129]).

2). $\operatorname{core} K$ — конус в Z.

Действительно, если $\hat z \in \operatorname{core} K$ и $\alpha > 0$, то для $\hat z_\alpha \overset{\text{def}}{=} \alpha \hat z$ имеем: в силу того, что $\hat z \in \operatorname{core} K$, для любого $z \in Z$ существует $\varepsilon = \varepsilon(z) > 0$ такое, что при всех $t, |t| < \varepsilon$, выполнено $\hat z + tz \in K$, а в силу того, что K — конус, имеем $\alpha \hat z + (\alpha t)z \in K$ или $\hat z_\alpha + \tau z \in K$ при $\tau, |\tau| < \varepsilon_\alpha = \alpha\varepsilon$. Итак, $\hat z_\alpha \in \operatorname{core} K$.

3). $K + \operatorname{core} K = \operatorname{core} K$.

Включение $\operatorname{core} K \subseteq K + \operatorname{core} K$ очевидно в силу определения операции сложения множеств и того обстоятельства, что $0_Z \in K$. Покажем обратное включение. Пусть $z_1 \in K$ и $z_0 \in \operatorname{core} K$. Тогда для любого $z \in Z$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что при всех $t, |t| < \varepsilon$, выполнено $z_0 + tz \in K$. Но K — выпуклый конус, а $z_1 \in K$, значит, и $z_1 + z_0 + tz \in K$. Таким образом, $z_1 + z_0 \in \operatorname{core} K$, т. е. $K + \operatorname{core} K \subseteq \operatorname{core} K$.

3. **Теорема.** *Пусть Z — в.в.п. и G — выпуклое множество в X, а $H\colon\ X \to Z$ — выпуклое отображение, причем Z — у.в.п. с положительным конусом K, имеющим непустое ядро,* $\operatorname{core}\ K \neq \emptyset$.

Тогда имеет место один и только один из двух случаев:

(А) *существует точка $\tilde x \in G$ такая, что $(-H(\tilde x)) \in \operatorname{core} K$;*

(Б) *существует такой ненулевой линейный функционал $\bar z'$ из K' — алгебраически сопряженного к K конуса, что при всех $x \in G$ выполнено неравенство $\langle\ \bar z',\ H(x)\rangle \geqslant 0$.*

Доказательство. Пусть (А) выполнено. Покажем, что (Б) не выполнено.

Итак, пусть существует точка $\tilde x \in G$ такая, что $(-H(\tilde x)) \in \operatorname{core} K$. Так как по определению $\operatorname{core} K \subseteq K$, то для любого линейного функционала $z' \in K'$ следует, что $\langle\ z',\ -H(\tilde x)\rangle \geqslant 0$, или

$$\langle\ z',\ H(\tilde x)\rangle \leqslant 0 \text{ при всех } z' \in K'. \tag{1}$$

Пусть все же (Б) выполнено, т. е. существует ненулевой линейный функционал $\bar{z}' \in K'$ такой, что выполнено неравенство

$$\langle\, \bar{z}',\ H(x)\rangle \geqslant 0 \text{ при всех } x \in G. \tag{2}$$

Из (1) (при $z' = \bar{z}'$) и (2) (при $x = \tilde{x}$) получаем, что $\langle\, \bar{z}',\ H(\tilde{x})\rangle = 0$, или

$$\langle\, \bar{z}',\ -H(\tilde{x})\rangle = 0. \tag{3}$$

Далее, т. к. $(-H(\tilde{x})) \in \operatorname{core} K$, то для любого $z \in Z$ существует $\varepsilon = \varepsilon(z) > 0$ такое, что при всех $t, |t| < \varepsilon$, имеем, что $-H(\tilde{x}) + tz \in K$ и, значит, $\langle\, \bar{z}',\ -H(\tilde{x}) + tz\rangle \geqslant 0$. Отсюда в силу (3) получаем $t\langle\, \bar{z}',\ z\rangle \geqslant 0$ при всех $t, |t| < \varepsilon$, а, значит, $\langle\, \bar{z}',\ z\rangle = 0$ при всех $z \in Z$, т. е. $\bar{z}' = 0_{Z'}$, что противоречит предположению (Б) ($\bar{z}' \neq 0_{Z'}$). Итак, если (А) выполнено, то (Б) не выполнено.

Покажем теперь, что если (А) не выполнено, то (Б) выполнено.

Рассмотрим множество

$$M = \bigcup_{x \in G} \{H(x) + \operatorname{core} K\}.$$

1). Отметим, что M — выпуклое множество в Z.

Пусть $z_1, z_2 \in M$. Тогда для некоторых $x_1, x_2 \in G$

$$z_1 \in H(x_1) + \operatorname{core} K, \qquad z_2 \in H(x_2) + \operatorname{core} K$$

и, значит, для некоторых $\hat{z}_1, \hat{z}_2 \in \operatorname{core} K$ имеем

$$z_1 = H(x_1) + \hat{z}_1, \quad z_2 = H(x_2) + \hat{z}_2. \tag{4}$$

Для $\alpha \in (0;\ 1)$ рассмотрим точку $x_\alpha = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$, она принадлежит множеству G в силу его выпуклости, $x_\alpha \in G$. Аналогично, $\hat{z}_\alpha = \alpha\hat{z}_1 + (1-\alpha)\hat{z}_2 \in \operatorname{core} K$, т. к. $\operatorname{core} K$ — выпуклое множество (по причине того, что K — выпуклое множество). Обозначим

$$z_\alpha = \alpha z_1 + (1-\alpha)z_2.$$

Из (4) имеем

$$\alpha(z_1 - \hat{z}_1) = \alpha H(x_1),$$
$$(1-\alpha)(z_2 - \hat{z}_2) = (1-\alpha)H(x_2),$$

$$z_\alpha - \hat{z}_\alpha = \alpha(z_1 - \hat{z}_1) + (1-\alpha)(z_2 - \hat{z}_2) =$$
$$= \alpha H(x_1) + (1-\alpha)H(x_2) \overset{K}{\geqslant} H(\alpha x_1 + (1 - \alpha x_2)) = H(x_\alpha).$$

Итак, $z_\alpha - H(x_\alpha) \overset{K}{\geqslant} \hat{z}_\alpha$, следовательно, $z_\alpha - H(x_\alpha) \in \hat{z}_\alpha + K$, т. е. $z_\alpha - H(x_\alpha) \in \operatorname{core} K + K = \operatorname{core} K$ или $z_\alpha \in H(x_\alpha) + \operatorname{core} K$. Значит, $z_\alpha \in M$.

2). Теперь отметим, что $M\cap(-K)=\emptyset$. Действительно, если существует $-\tilde z\in -K$ (т. е. $\tilde z\in K$) такая, что $-\tilde z\in M$, то при некотором $\hat x\in G$ имеем

$$-\tilde z\in H(\hat x)+\operatorname{core}K,$$

т. е. $-H(\hat x)\in\tilde z+\operatorname{core}K\subseteq K+\operatorname{core}K=\operatorname{core}K$. А последнее означает, что (А) выполнено. Это противоречит нашему предположению (что (А) не выполнено). Поэтому $M\cap(-K)=\emptyset$.

3). Поскольку $\operatorname{core}M\supset\operatorname{core}K\neq\emptyset$, M и K — выпуклые множества и $M\cap(-K)=\emptyset$, то M и $(-K)$ можно отделить [1, с. 138]: существует $\bar z'\in Z'$, $\bar z'\neq 0_Z$ такой, что при всех $x\in G$, $z\in K$ и $\hat z\in\operatorname{core}K$ выполнено неравенство отделимости

$$\langle\ \bar z',\ -z\rangle\leqslant\langle\ \bar z',\ H(x)+\hat z\rangle. \tag{5}$$

Отсюда следует, что

$$\langle\ \bar z',\ z\rangle\geqslant 0 \text{ при всех } z\in K \tag{6}$$

$$\text{и}\quad\langle\ \bar z',\ H(x)+\hat z\rangle\geqslant 0 \text{ при всех } x\in G \text{ и всех } \hat z\in\operatorname{core}K, \tag{7}$$

иначе при невыполнении (6) левая часть в (5) не ограничена сверху и правая часть в (5) не ограничена снизу.

Из (6) сразу получаем, что $\bar z'\in K'$, а из (7) при фиксированных $x\in G$ и $\hat z_1\in\operatorname{core}K$ и малых положительных α получаем $\alpha\hat z_1\in\operatorname{core}K$ (т. к. $\operatorname{core}K$ — тоже конус), и, значит, в силу (7) $\langle\ \bar z',\ H(x)+\alpha\hat z_1\rangle\geqslant 0$. Откуда при $\alpha\to+0$ получаем при всех $x\in G$ неравенство

$$\langle\ \bar z',\ H(x)\rangle\geqslant 0.$$

Итак, если (А) не выполнено, то (Б) выполнено.

В итоге: в силу первой части доказательства (А) $\Rightarrow\neg$(Б) и, значит, (Б) $\Rightarrow\neg$(А), а также в силу второй части доказательства $\neg$(А) $\Rightarrow$(Б), т. е. (А) $\Leftrightarrow\neg$(Б), (Б) $\Leftrightarrow$ $\neg$(А). Теорема доказана.

4. **Замечания**

а). В конечномерном случае ($X=\mathbb{R}^n$, $Z=\mathbb{R}^m$,

$$K=\{z=(z_1,...,z_m)\in\mathbb{R}^m\colon z_j\geqslant 0, j=\overline{1,\ m}\},$$

$F(x)=(f_1(x),...,f_m(x))$, f_i — выпуклые функции) теорема Фань Цзи — Гликсберга — Гоффмана (ФГГ) доказана в [2, с. 203—205], см. также [4].

б). Наше доказательство для бесконечномерного случая не является простым переносом доказательства в конечномерном случае.

в). Теоремы об альтернативе (или совместности) для систем линейных и выпуклых неравенств играют важную роль при изучении экстремальных задач, в том числе теорема ФГГ для систем выпуклых неравенств, а также теоремы Моцкина и Таккера и других для систем линейных неравенств.

Библиографический список

1. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 544 с.
2. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 472 с.
3. *Шефер Х.* Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1971. 360 с.
4. *Fan Ky, Glicksberg I., Hoffman A. J.* Systems of inequalities involving convex functions // Proc. Amer. Math. Soc. Vol. 8 (1957). P. 617—622.