УДК 512.543

Д. Н. Азаров

О ПОЧТИ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ КОНЕЧНЫМИ p–ГРУППАМИ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

Пусть $\mathcal{K}$ — абстрактный класс групп. Напомним, что группа G называется аппроксимируемой группами из класса $\mathcal{K}$ (или, короче, $\mathcal{K}$-аппроксимируемой), если для любого неединичного элемента a группы G существует гомоморфизм группы G на некоторую группу из класса $\mathcal{K}$, при котором образ элемента a отличен от 1. Группа G называется почти аппроксимируемой классом $\mathcal{K}$, если она содержит $\mathcal{K}$-аппроксимируемую подгруппу конечного индекса.

Если $\mathcal{F}$ обозначает класс всех конечных групп, то понятие $\mathcal{F}$-аппроксимируемости совпадает с классическим понятием финитной аппроксимируемости. Наряду с финитной аппроксимируемостью изучается также свойство $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости, где p — простое число, $\mathcal{F}_p$ — класс всех конечных p-групп. Здесь будет рассмотрено свойство почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости. Очевидно, что произвольная $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемая группа является почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой. С другой стороны, любая почти $\mathcal{F}$-аппроксимируемая (и, в частности, любая почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемая) группа является $\mathcal{F}$-аппроксимируемой. Таким образом, свойство почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости является промежуточным между $\mathcal{F}$-аппроксимируемостью и $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемостью.

Как заметил А. И. Мальцев, абелева группа G финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда она не содержит полных элементов, отличных от 1 (*Мальцев А. И.* О гомоморфизмах на конечные группы // Учен. зап. Иван. гос. ин-та. 1958. Т. 18, № 5. С. 49—60). Напомним, что элемент a группы G называется полным, если уравнение $x^n = a$ разрешимо в группе G для любого целого положительного числа n.

Рассмотрим теперь вопрос об $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости абелевой группы G. Элемент a группы G будем называть p-полным, если уравнение $x^{p^s} = a$ разрешимо в группе G для любого целого положительного числа s. Абелева группа G $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда она не содержит p-полных элементов, отличных от 1. Этот p-аналог упомянутого выше результата А. И. Мальцева является частным случаем следующего простого утверждения:

Теорема 1. *Пересечение всех подгрупп конечного p-индекса абелевой группы G совпадает с множеством $\omega_p(G)$ всех p-полных элементов группы G.*

Основным результатом настоящей работы является следующее утверждение:

Теорема 2. *Пусть G — абелева группа, p — простое число. И пусть T — p'-компонента группы G, т. е. множество всех элементов группы G, порядки которых конечны и взаимно просты с p. Тогда следующие три утверждения равносильны между собой:*

(1) *группа G почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема;*
(2) *подгруппа T конечна и фактор-группа G/T $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема;*
(3) *подгруппа T конечна и совпадает с множеством $\omega_p(G)$ всех p-полных элементов группы G.*

Доказательства теорем 1 и 2 приведены ниже. В качестве следствия из теоремы 2 приведем следующее утверждение, дающее полную информацию о месте $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемых абелевых групп среди почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемых абелевых групп.

Следствие. *Абелева группа G является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой тогда и только тогда, когда она почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема и не имеет p'-кручения.*

Необходимость в этом утверждении очевидна. Для доказательства достаточности предположим, что G — абелева почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемая группа без p'-кручения. Последнее условие означает, что $T = 1$. По теореме 2 группа G/T $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема. Отсюда и из того, что $T = 1$, следует, что группа G $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема.

Перейдем теперь к доказательству теорем. Пусть G — абелева группа. Очевидно, что любой p-полный элемент группы G содержится в любой подгруппе конечного p-индекса группы G. Поэтому $\omega_p(G)$ содержится в пересечении всех подгрупп конечного p-индекса группы G.

Теперь для доказательства теоремы 1 остается проверить, что любой элемент a группы G, не принадлежащий $\omega_p(G)$, не принадлежит и некоторой подгруппе конечного p-индекса группы G. Так как элемент a не является p-полным, то он не принадлежит некоторой степенной подгруппе $H = G^{p^s}$ группы G. По теореме Прюфера группа G/H раскладывается в прямое произведение циклических p-подгрупп. Поэтому группа G/H $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема. Отсюда и из того, что aH — неединичный элемент группы G/H, следует, что в группе G/H существует подгруппа F/H конечного p-индекса, не содержащая элемент aH. Тогда F — подгруппа конечного p-индекса группы G, не содержащая a.

Докажем теперь теорему 2. Пусть G — абелева группа, p — простое число и T — p'-компонента группы G.

Предположим сначала, что выполняется условие (1), т. е. что G почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема. Обозначим через P какую-нибудь $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемую подгруппу конечного индекса группы G. Так как в любой $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группе, очевидно, нет p'-кручения, то $T \cap P = 1$. Отсюда и из того, что индекс подгруппы P в группе G конечен, следует, что подгруппа T конечна. Поскольку порядок любого элемента из T взаимно прост с p, то все элементы из T являются p-полными, т. е. $T \subseteq \omega_p(G)$.

Для доказательства обратного включения обозначим через L подгруппу группы G, содержащую P и такую, что индекс $l = [G : L]$ взаимно прост с p, а индекс $[L : P]$ является степенью числа p. Из последнего обстоятельства и $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости группы P следует $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемость группы L. Пусть a — произвольный элемент из $\omega_p(G)$. Так как a — p-полный элемент группы G и L — подгруппа группы G индекса l, то a^l — p-полный элемент группы L. Отсюда и из $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости группы L следует, что $a^l = 1$. Поскольку l взаимно просто с p, то последнее равенство означает, что $a \in T$. Тем самым доказано, что $\omega_p(G)$ содержится в T. Мы видим, таким образом, что подгруппа T конечна и $\omega_p(G) = T$. Иными словами, выполняется условие (3).

Пусть теперь выполняется условие (3), т. е. подгруппа T конечна и совпадает с $\omega_p(G)$. Тогда по теореме 1 подгруппа T совпадает с пересечением всех подгрупп конечного p-индекса группы G. Отсюда следует, что фактор-группа G/T $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема. Мы видим, что выполняется условие (2).

Предположим теперь, что выполняется условие (2), т. е. что подгруппа T конечна и фактор-группа G/T $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема. Обозначим через m порядок подгруппы T. Пусть $t \in T \cap G^m$. Поскольку $t \in T$ и $|T| = m$, то $t^m = 1$. Так как $t \in G^m$, то $t = g^m$ для некоторого элемента g из G. Из последних двух равенств следует, что $g^{m^2} = 1$. Отсюда и из того, что число $m = |T|$ взаимно просто с p, следует, что $g \in T$. Но тогда $g^m = 1$, т. е. $t = 1$. Таким образом,

$$T \cap G^m = 1.$$

По теореме Прюфера фактор-группа G/G^m раскладывается в прямое произведение циклических подгрупп и поэтому является $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группой. Поскольку $T \cap G^m = 1$, то естественный гомоморфизм ε группы G на фактор-группу G/G^m инъективен на подгруппе T. Так как $T\varepsilon$ — конечная подгруппа $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группы G/G^m, то существует гомоморфизм φ группы G/G^m на конечную группу K, инъективный на $T\varepsilon$. Тогда произведение $\varepsilon\varphi$ является гомоморфизмом группы G на конечную группу K, инъективным на T. Поэтому ядро N гомоморфизма $\varepsilon\varphi$ является подгруппой конечного индекса группы G и при этом $N \cap T = 1$. Отсюда следует, что естественный гомоморфизм ρ группы G на фактор-группу G/T инъективен на N. Поэтому группа N вложима в группу G/T. Отсюда и из того, что G/T $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема, следует, что N $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема. Таким образом, N — $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемая подгруппа конечного индекса группы G. Следовательно, G почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема, т. е. выполняется условие (1). Теорема 2 доказана.