УДК 517.5

**А. С. Белов**

# НЕУЛУЧШАЕМОСТЬ НЕКОТОРЫХ КОЭФФИЦИЕНТНЫХ УСЛОВИЙ РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОГО РЯДА

## Введение

Если задан тригонометрический ряд

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\right), \tag{1}$$

то будем, как обычно, обозначать

$$S_n(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n}\left(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\right),$$

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k(x),$$

$\Delta a_n = a_n - a_{n+1}$ при всех $n \geqslant 0$. Если $f \in L_{2\pi}^{\infty}$, то $\|f\|_{\infty} = \operatorname{esssup}_x |f(x)|$.

В работе [2] доказана

**Теорема А.** *Пусть тригонометрический ряд* (1) *удовлетворяет условиям*

$$|a_n| + |b_n| \to 0 \quad \textit{при} \quad n \to \infty, \tag{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(|\Delta a_n| + |\Delta b_n|\right) < \infty \tag{3}$$

*и*

$$\sup_{n\geqslant 1}\Big(2^n\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}}\left(|\Delta a_k| + |\Delta b_k|\right)\Big) < \infty. \tag{4}$$

*Тогда справедливы следующие два утверждения.*

a) *Ряд* (1) *сходится равномерно на прямой тогда и только тогда, когда выполнены условия: ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \textit{сходится} \tag{5}$$

*и*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} kb_k \to 0 \quad \textit{при} \quad n \to \infty. \tag{6}$$

---



Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 08–01–00302).

*b) Частные суммы ряда* (1) *равномерно ограничены на прямой тогда и только тогда, когда выполнены условия:*

$$\sup_{n\geqslant 1}\Big|\sum_{k=1}^{n} a_k\Big| < \infty \quad \text{и} \quad \sup_{n\geqslant 1}\Big|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} kb_k\Big| < \infty\,.$$

Отметим, что условие (4) эквивалентно условию

$$\sup_{n\geqslant 1}\Big(n\sum_{k=n}^{\infty}\big(|\Delta a_k| + |\Delta b_k|\big)\Big) < \infty \tag{7}$$

и эквивалентно условию

$$\sup_{n\geqslant 1}\Big(n\sum_{k=n}^{2n-1}\big(|\Delta a_k| + |\Delta b_k|\big)\Big) < \infty\,.$$

В работе [2] без доказательства отмечалось, что в теореме A условие (4), или, что то же самое, условие (7), нельзя улучшить, заменив его на условие

$$\sum_{k=n}^{\infty}\big(|\Delta\, a_k| + |\Delta\, b_k|\big) \leqslant \frac{\Phi(n)}{n} \quad \text{при всех} \quad n\geqslant 1\,, \tag{8}$$

где последовательность положительных чисел $\{\Phi(n)\}_{n=1}^{\infty}$ стремится к бесконечности. Это показывает следующая

**Теорема 1.** *Для любой последовательности положительных чисел $\{\Phi(n)\}_{n=1}^{\infty}$, которая стремится к бесконечности, существуют такие две последовательности действительных чисел $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, что ряды*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k \tag{9}$$

*сходятся,*

$$\Big|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} ka_k\Big| + \Big|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} kb_k\Big| \to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty \tag{10}$$

*и верны условия* (2), (3) *и* (8), *но частные суммы и ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\,\cos(nx)\,, \tag{11}$$

*и ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n\,\sin(nx) \tag{12}$$

*не ограничены в метрике $C_{2\pi}$, и, в частности, и ряд* (11), *и ряд* (12) *не сходятся равномерно на прямой, хотя и сходятся всюду. Более того, если через $f(x)$ обозначить сумму любого из рядов* (11) *или* (12), *то функция $f$ окажется не ограниченной на прямой, но $f\in L^p_{2\pi}$ при всех $p\in[1\,,\infty)$.*

Теорема 1 допускает некоторое усиление, а именно верна

**Теорема 2.** *Для любой заданной неотрицательной и неубывающей на* $[0\,,+\infty)$ *функции* $\Psi$ *и любой стремящейся к бесконечности последовательности положительных чисел* $\{\Phi(n)\}_{n=1}^{\infty}$ *существуют последовательности* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *и* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *такие, что выполнены все утверждения теоремы 1 и, более того, сумма каждого из рядов* (11) *или* (12), *если обозначить рассматриваемую сумму через* $f(x)$, *будет удовлетворять условию*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Psi(\,|f(x)|\,)\,dx < \infty\,. \tag{13}$$

Заметим, что для удобства изложения через $f(x)$ мы обозначаем сумму любого произвольно выбранного из рядов (11) или (12) ряда, хотя суммы рядов (11) и (12), конечно, не обязаны совпадать.

Теоремы 1 и 2 показывают, что условие (4), или, что эквивалентно, условие (7), в теореме A неулучшаемо в том смысле, что условие (4) нельзя в теореме A заменить на условие (8) даже при сколь угодно медленном стремлении к бесконечности последовательности положительных чисел $\{\Phi(n)\}_{n=1}^{\infty}$, поскольку условия (5) и (6) в этом случае уже не являются достаточными для равномерной сходимости ряда (1).

Доказательство сформулированных теорем 1 и 2 и является основной целью этой статьи. В § 1 изложено доказательство теоремы 1, а в § 2 приведен вывод теоремы 2 из теоремы 1, хотя формально теорема 1 является частным случаем теоремы 2, причем для того, чтобы увидеть это, достаточно, например, взять $\Psi(x) = x$. Перейдем теперь к реализации этого плана.

## § 1. Доказательство теоремы 1

Пусть далее log берется по основанию 2 и квадратные скобки обозначают целую часть числа. Положим

$$\varphi(n) = \min\{\min\{\Phi(k) : k \geqslant n\}\,, 1 + \log n\}$$

при всех натуральных $n \geqslant 5$ и $\varphi(n) = \min\{\min\{\Phi(k) : k \geqslant 1\}\,, 1\}$ при $n = 1, 2, 3, 4$. Тогда положительная последовательность $\{\varphi(n)\}_{n=1}^{\infty}$ не убывает, стремится к бесконечности, $\varphi(1) = \varphi(2) = \varphi(3) = \varphi(4)$,

$$\varphi(n) \leqslant \Phi(n) \quad \text{при всех} \quad n \geqslant 1 \tag{14}$$

и

$$\varphi(n) \leqslant 1 + \log n \quad \text{при всех} \quad n \geqslant 1\,. \tag{15}$$

Положим

$$\delta = \varphi(1)\,2^{-14}\,. \tag{16}$$

Пусть

$$g(n) = \min\Big\{\,\frac{n-2}{2}\,,\,\frac{1}{3}\,\log\Big(\,\frac{\varphi(2^n)}{\varphi(1)}\,\Big)\,\Big\} \quad \text{при всех} \quad n \geqslant 2\,. \tag{17}$$

Тогда последовательность неотрицательных чисел $\{g(n)\}_{n=2}^{\infty}$ не убывает и стремится к бесконечности. Пусть $\nu_0 = 0$ и $\nu_k = [g(4k-2)]$ при всех натуральных $k$. Тогда последовательность целых неотрицательных чисел $\{\nu_k\}_{k=0}^{\infty}$ не убывает и стремится к бесконечности. Поэтому $\nu_k - \nu_{k-1} \geqslant 1$ для бесконечного числа номеров $k$. Положим $m_1 = 0$ и

$$m_{4k-2} = m_{4k-1} = m_{4k} = m_{4k+1} = \sum_{s=1}^{k} \min\{\nu_s - \nu_{s-1}\,, 1\} \qquad (18)$$

при всех натуральных $k$. Этим определена последовательность целых неотрицательных чисел $\{m_n\}_{n=1}^{\infty}$, которая, не убывая, стремится к бесконечности и

$$m_{n+4} - m_n \leqslant 1 \quad \text{для всех} \quad n \geqslant 1\,. \qquad (19)$$

Из (18) при натуральных $k$ имеем

$$m_{4k-2} = m_{4k-1} = m_{4k} = m_{4k+1} \leqslant \sum_{s=1}^{k} (\nu_s - \nu_{s-1}) = \nu_k \leqslant g(4k-2)\,.$$

Поэтому

$$m_n \leqslant g(n) \quad \text{при всех} \quad n \geqslant 2\,. \qquad (20)$$

При каждом натуральном $n \geqslant 2$ положим

$$j_n = 2^{m_n}\,, \quad x_n = \frac{2\pi j_n^2}{2^n}\,, \quad \gamma_n = \frac{\delta j_n}{2^n}\,; \qquad (21)$$

$$a_k = \gamma_n \cos(kx_n),\; b_k = \gamma_n \sin(kx_n) \quad \text{при} \quad k = 2^n, \ldots, 2^{n+1}-1\,. \qquad (22)$$

Этим определена неубывающая последовательность натуральных чисел $\{j_n\}_{n=2}^{\infty}$, которая стремится к бесконечности, и определены последовательности действительных чисел $\{a_n\}_{n=4}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=4}^{\infty}$. Отметим, что из (19) вытекает оценка

$$j_{n+4} \leqslant 2j_n \quad \text{при всех} \quad n \geqslant 2\,. \qquad (23)$$

Действительные числа $a_1\,, a_2\,, a_3$ и $b_1\,, b_2\,, b_3$ выберем произвольным образом так, что выполнены условия

$$|a_1 - a_2| + |b_1 - b_2| \leqslant \frac{\varphi(1)}{4}\,, \qquad (24)$$

$$|a_2 - a_3| + |b_2 - b_3| \leqslant \frac{\varphi(1)}{8}\,, \qquad (25)$$

$$|a_3 - a_4| + |b_3 - b_4| \leqslant \frac{\varphi(1)}{8}\,. \qquad (26)$$

Например, можно взять $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$ и $b_1 = b_2 = b_3 = b_4$. Теперь докажем, что так определенные последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяют всем условиям теоремы 1. Из (17), (20) и (21) следует, что $2m_n \leqslant n-2\,,\; j_n^2 \leqslant 2^{n-2}$ и

$$0 < x_n \leqslant \frac{\pi}{2} \quad \text{при всех} \quad n \geqslant 2\,. \qquad (27)$$

Из (22), (27) и (21) имеем

$$\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} (a_k + ib_k) = \gamma_n \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} e^{ikx_n} = \frac{\gamma_n \sin(2^{n-1}x_n)}{\sin(x_n/2)}\, e^{i(3\,2^n-1)x_n/2} = 0\,,$$

т. е.

$$\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} a_k = 0 \quad \text{и} \quad \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} b_k = 0 \quad \text{при} \quad n \geqslant 2\,. \tag{28}$$

При натуральном $n \geqslant 2$ и $m = 2^n, \ldots, 2^{n+1}-1$ из (22), (27) и (21) выводим

$$\Big| \sum_{k=2^n}^{m} (a_k + ib_k) \Big| = \gamma_n \Big| \sum_{k=2^n}^{m} e^{ikx_n} \Big| = \gamma_n \Big| \frac{\sin((m+1-2^n)\,x_n/2)}{\sin(x_n/2)} \Big| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\gamma_n}{\sin(x_n/2)} < \frac{\pi\gamma_n}{x_n} = \frac{\delta}{2j_n}\,,$$

т. е.

$$\max_{m=2^n,\,\ldots,2^{n+1}-1} \Big( \Big| \sum_{k=2^n}^{m} a_k \Big| + \Big| \sum_{k=2^n}^{m} b_k \Big| \Big) < \frac{\delta}{j_n} \quad \text{при всех} \quad n \geqslant 2\,. \tag{29}$$

Поскольку $j_n \to \infty$ при $n \to \infty$, то из (29) и (28) вытекает сходимость рядов (9), а значит (см. [2, лемма 1.3]) и свойства (10) и (2). При натуральных $k \geqslant 2$ из (23) получаем

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{j_{k+4s}^3}{2^{k+4s}} \leqslant \sum_{s=0}^{\infty} \frac{j_k^3 2^{3s}}{2^{k+4s}} = \frac{2j_k^3}{2^k}\,.$$

Поэтому при каждом натуральном $N \geqslant 2$ имеем

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{j_n^3}{2^n} = \sum_{k=N}^{N+3} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{j_{k+4s}^3}{2^{k+4s}} \leqslant \sum_{k=N}^{N+3} \frac{2j_k^3}{2^k} \leqslant$$

$$\leqslant 2j_{N+4}^3 \sum_{k=N}^{N+3} \frac{1}{2^k} < \frac{4j_{N+4}^3}{2^N} \leqslant \frac{2^5 j_N^3}{2^N}\,,$$

где опять применено (23). Из (20), (21) и (17) видим, что

$$j_N^3 = 2^{3m_N} \leqslant 2^{3g(N)} \leqslant \frac{\varphi(2^N)}{\varphi(1)}\,.$$

Следовательно,

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{j_n^3}{2^n} \leqslant \frac{2^5\, \varphi(2^N)}{\varphi(1)\, 2^N} \quad \text{при всех} \quad N \geqslant 2\,. \tag{30}$$

При каждом натуральном $n \geqslant 2$ из (22), (27), (21) имеем

$$\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} |\Delta a_k + i\Delta b_k| = \gamma_n \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-2} |e^{ikx_n} - e^{i(k+1)x_n}| +$$
$$+ |\gamma_n\, e^{i(2^{n+1}-1)x_n} - \gamma_{n+1}\, e^{i2^{n+1}x_{n+1}}| \leqslant \gamma_n\, (2^n - 1)|1 - e^{ix_n}| +$$
$$+ \gamma_n + \gamma_{n+1} = \frac{\delta j_n}{2^n}\, (2^n - 1)\, 2\, \sin\Big(\frac{x_n}{2}\Big) + \frac{\delta j_n}{2^n} + \frac{\delta j_{n+1}}{2^{n+1}} <$$
$$< \delta j_n\, x_n + \frac{\delta j_n^3}{2^n} + \frac{\delta j_{n+1}^3}{2^{n+1}} = \delta\left(\frac{(2\pi+1) j_n^3}{2^n} + \frac{j_{n+1}^3}{2^{n+1}}\right).$$

Значит,

$$\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} (|\Delta a_k| + |\Delta b_k|) < 2\delta\left(\frac{(2\pi+1) j_n^3}{2^n} + \frac{j_{n+1}^3}{2^{n+1}}\right).$$

Поэтому при натуральном $N \geqslant 2$ из (30) и (16) имеем

$$\sum_{k=2^N}^{\infty} (|\Delta a_k| + |\Delta b_k|) = \sum_{n=N}^{\infty} \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} (|\Delta a_k| + |\Delta b_k|) <$$
$$< 2\delta \sum_{n=N}^{\infty}\left(\frac{(2\pi+1) j_n^3}{2^n} + \frac{j_{n+1}^3}{2^{n+1}}\right) = 2\delta \sum_{n=N}^{\infty} \frac{(2\pi+1) j_n^3}{2^n} + 2\delta \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{j_n^3}{2^n} <$$
$$< 2\delta\, (2\pi+2)\, \frac{2^5\, \varphi(2^N)}{\varphi(1)\, 2^N} = (2\pi+2)\, \frac{\varphi(2^N)}{2^8\, 2^N} < \frac{\varphi(2^N)}{2^4\, 2^N}.$$

Пусть теперь натуральное $N \geqslant 2$ и $2^N \leqslant n < 2^{N+1}$. Тогда

$$\sum_{k=n}^{\infty} (|\Delta a_k| + |\Delta b_k|) \leqslant \sum_{k=2^N}^{\infty} (|\Delta a_k| + |\Delta b_k|) < \frac{\varphi(2^N)}{2^4\, 2^N} \leqslant \frac{\varphi(n)}{2^4\, 2^N} < \frac{\varphi(n)}{8\, n}.$$

Таким образом,

$$\sum_{k=n}^{\infty} (|\Delta a_k| + |\Delta b_k|) < \frac{\varphi(n)}{8n} \quad \text{при всех} \quad n \geqslant 4. \tag{31}$$

Из (31) при $n = 4$, (26), (25) и (24) имеем

$$\sum_{k=3}^{\infty} (|\Delta a_k| + |\Delta b_k|) < \frac{\varphi(1)}{8} + \frac{\varphi(4)}{32} < \frac{\varphi(3)}{3},$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} (|\Delta a_k| + |\Delta b_k|) < \frac{\varphi(1)}{4} + \frac{\varphi(4)}{32} < \frac{\varphi(2)}{2},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (|\Delta a_k| + |\Delta b_k|) < \frac{\varphi(1)}{2} + \frac{\varphi(4)}{32} < \frac{\varphi(2)}{1},$$

т. е. в силу (31) верна оценка

$$\sum_{k=n}^{\infty} (|\Delta\, a_k| + |\Delta\, b_k|) < \frac{\varphi(n)}{n} \quad \text{при всех} \quad n \geqslant 1\,. \tag{32}$$

Отсюда и из (14) вытекает (8). Поскольку из (21) и (27) следует

$$\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} e^{i2kx_n} = \frac{\sin(2^n x_n)}{\sin x_n}\, e^{i(3\,2^n-1)x_n} = 0\,,$$

то

$$\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \cos(2kx_n) = 0 \quad \text{при всех} \quad n \geqslant 2\,.$$

Следовательно, при $n \geqslant 2$ из (22) и (21) имеем

$$\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} a_k \cos(kx_n) = \gamma_n \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \cos^2(kx_n) =$$

$$= \frac{\delta j_n}{2^{n+1}} \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} (1 + \cos(2kx_n)) = \frac{\delta j_n}{2}$$

и аналогично

$$\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} b_k \sin(kx_n) = \gamma_n \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \sin^2(kx_n) =$$

$$= \frac{\delta j_n}{2^{n+1}} \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} (1 - \cos(2kx_n)) = \frac{\delta j_n}{2}\,.$$

Таким образом, если через $f(x)$, $S_n(x)$ и $\sigma_n(x)$ обозначать сумму и, соответственно, частичную сумму и сумму Фейера порядка $n$ для любого из рядов (11) или (12), то

$$S_{2^{n+1}-1}(x_n) - S_{2^n-1}(x_n) = \frac{\delta j_n}{2} \quad \text{при всех} \quad n \geqslant 2\,. \tag{33}$$

Так как $j_n \to \infty$ при $n \to \infty$, то частичные суммы и ряда (11), и ряда (12) не ограничены в метрике $L^{\infty}_{2\pi}$. Докажем теперь, что функция $f \in L^{p}_{2\pi}$ при всех $p \in [1\,,\infty)$, но функция $f \notin L^{\infty}_{2\pi}$, причем рассматривать будем только ряд (11), поскольку для ряда (12) доказательство совершенно аналогично. Из (15) и (32) вытекает, что

$$\sum_{k=n}^{\infty} (|\Delta\, a_k| + |\Delta\, b_k|) < \frac{1 + \log n}{n} \quad \text{при всех} \quad n \geqslant 1\,.$$

Если положить

$$a'_n = \frac{1}{2}\left(-a_n + \sum_{k=n}^{\infty} |\Delta\, a_k|\right),\ a''_n = \frac{1}{2}\left(a_n + \sum_{k=n}^{\infty} |\Delta\, a_k|\right),$$

то неотрицательные последовательности $\{a'_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{a''_n\}_{n=1}^{\infty}$, монотонно не возрастая, стремятся к нулю, $a_n = a''_n - a'_n$ и

$$a''_n + a'_n < \frac{1+\log n}{n}$$

при всех $n \geqslant 1$ . Поэтому сумма ряда (11) представляется в виде разности сумм двух рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a''_n \cos(nx) \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a'_n \cos(nx)\,,$$

каждый из которых по теореме Харди и Литтлвуда (см. [1, с. 657]) является рядом Фурье некоторой функции из $L^p_{2\pi}$ при всех $p \in (1\,,\infty)$ , поскольку

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{p-2}\,(a''_k + a'_k)^p < \infty\,.$$

Предположим теперь, что функция $f \in L^{\infty}_{2\pi}$ . Тогда

$$\|\sigma_n\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$$

при всех $n \geqslant 0$ . Для любых натуральных $N$ и $m$ имеем

$$\Big|\, S_N(x) - \frac{(N+m)\sigma_{N+m-1}(x) - N\sigma_{N-1}(x)}{m} \,\Big| = \\ = \Big| \sum_{k=N+1}^{N+m-1} \frac{(N+m-k)}{m}\, a_k \cos(kx) \Big| \leqslant \sum_{k=N+1}^{N+m-1} |a_k|\,.$$

Поэтому

$$\|S_N\|_\infty \leqslant \frac{(N+m)}{m}\,\|\sigma_{N+m-1}\|_\infty + \frac{N}{m}\,\|\sigma_{N-1}\|_\infty + \sum_{k=N+1}^{N+m-1} |a_k| \leqslant \\ \leqslant \Big(\frac{2N}{m} + 1\Big)\,\|f\|_\infty + \sum_{k=N+1}^{N+m-1} |a_k|\,.$$

Возьмем теперь произвольное $\varepsilon \in (0,1)$ . Пусть $m = [N\varepsilon] + 1$ . Тогда при всех натуральных $N$ справедлива оценка

$$\|S_N\|_\infty \leqslant \Big(\frac{2}{\varepsilon} + 1\Big)\,\|f\|_\infty + \sum_{k=N+1}^{N+[N\varepsilon]} |a_k|\,.$$

Беря здесь $N = 2^n - 1$ , в силу (22) получим оценку

$$\|S_{2^n-1}\|_\infty \leqslant \mathrm{C}_\varepsilon + \gamma_n\,(2^n-1)\,\varepsilon \quad \text{при всех} \quad n \geqslant 2\,,$$

где

$$\mathrm{C}_\varepsilon = \frac{(2+\varepsilon)}{\varepsilon}\,\|f\|_\infty$$

— постоянная, которая не зависит от $n$ . Отсюда и из (33), (21), (22) и (23) имеем

$$\frac{\delta j_n}{2} \leqslant \|S_{2^{n+1}-1} - S_{2^n-1}\|_\infty < 2\mathrm{C}_\varepsilon + \gamma_{n+1}\, 2^{n+1}\,\varepsilon + \gamma_n\, 2^n\,\varepsilon = \\ = 2\mathrm{C}_\varepsilon + j_{n+1}\,\delta\,\varepsilon + j_n\,\delta\,\varepsilon \leqslant 3 j_n\,\delta\,\varepsilon + 2\mathrm{C}_\varepsilon\,.$$

Поскольку $j_n \to \infty$ при $n \to \infty$ , то получаем, что

$$\frac{\delta}{2} \leqslant 3\delta\,\varepsilon\,.$$

Если $\varepsilon < 1/6$ , то это ведет к противоречию. Поэтому $f \notin L^\infty_{2\pi}$ . Теорема 1 полностью доказана.

Отметим, что в выборе первых трех коэффициентов рядов (11) и (12) имеется довольно большой произвол. Действительно, из (31) следует, что

$$|a_4| + |b_4| < \frac{\varphi(1)}{32}\,.$$

Поэтому если $a_1\,, a_2\,, a_3$ и $b_1\,, b_2\,, b_3$ выбраны так, что

$$|a_1| + |b_1| \leqslant \frac{\varphi(1)}{8}\,,$$

$$|a_2| + |b_2| \leqslant \frac{\varphi(1)}{16}\,,$$

$$|a_3| + |b_3| \leqslant \frac{\varphi(1)}{16}\,,$$

то условия (24), (25) и (26) будут выполнены.

Заметим также, что из (22), (21), (20) при $n \geqslant 2$ и (18) имеем

$$|a_4| + |b_4| \leqslant 2\gamma_2 = \delta\, 2^{m_2 - 1} \leqslant \delta\,.$$

Отсюда и из (26) получаем

$$|a_3| + |b_3| \leqslant \frac{\varphi(1)}{8} + |a_4| + |b_4| \leqslant \frac{\varphi(1)}{8} + \delta\,.$$

Аналогично из (25) выводим

$$|a_2| + |b_2| \leqslant \frac{\varphi(1)}{8} + |a_3| + |b_3| \leqslant \frac{\varphi(1)}{4} + \delta\,.$$

Наконец, из (24) имеем

$$|a_1| + |b_1| \leqslant \frac{\varphi(1)}{4} + |a_2| + |b_2| \leqslant \frac{\varphi(1)}{2} + \delta\,.$$

Поэтому в построенном при доказательстве теоремы 1 примере

$$\sum_{k=1}^{3} (\,|a_k| + |b_k|\,) \leqslant 3\delta + \frac{7}{8}\,\varphi(1)\,. \tag{34}$$

Из (28) и (29) при всех $n \geqslant 4$ вытекает

$$\Big|\sum_{k=4}^{n} a_k\Big| + \Big|\sum_{k=4}^{n} b_k\Big| < \frac{\delta}{j_2} \leqslant \delta\,.$$

Поэтому в силу (16) и (34) имеем

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} a_k\Big| + \Big|\sum_{k=1}^{n} b_k\Big| < 4\delta + \frac{7}{8}\,\varphi(1) < \varphi(1) \quad \text{при всех} \quad n \geqslant 1\,. \tag{35}$$

В частности, из (35) и (15) вытекает, что для построенных при доказательстве теоремы 1 последовательностей $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ выполнена оценка

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} a_k\Big| + \Big|\sum_{k=1}^{n} b_k\Big| < 1 \quad \text{при всех} \quad n \geqslant 1\,. \tag{36}$$

Эта оценка нам потребуется в следующем параграфе.

## § 2. Доказательство теоремы 2

Пусть функция $\Psi$ неотрицательна и не убывает на $[0\,,+\infty)$. Положим

$$\Psi_1(x) = x + \int_x^{x+1} \Psi(t)\,dt = \\ = x + \int_0^1 \Psi(x+t)\,dt = x + \int_0^{x+1} \Psi(t)\,dt - \int_0^x \Psi(t)\,dt$$

при всех $x \geqslant 0$. Отсюда, соответственно из второго, третьего и первого представления, видим, что функция $\Psi_1$ строго возрастает, непрерывна и

$$\Psi_1(x) \geqslant \Psi(x) \quad \text{при всех} \quad x \in [0\,,+\infty)\,. \tag{37}$$

Пусть $\Psi_1^{-1}$ — обратная функция к функции $\Psi$ и

$$\Phi_1(n) = \min\Big\{\,\Phi(n)\,,\ \frac{1}{2}\,\Psi_1^{-1}(\Psi_1(1) + \log n)\,\Big\} \quad \text{при всех} \quad n \geqslant 1\,.$$

Построим последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ точно так же, как и при доказательстве теоремы 1, но уже для последовательности положительных чисел $\{\Phi_1(n)\}_{n=1}^{\infty}$ вместо $\{\Phi(n)\}_{n=1}^{\infty}$. Из определения последовательности $\{\Phi_1(n)\}_{n=1}^{\infty}$ следует, что

$$\Phi_1(n) \leqslant \Phi(n) \quad \text{при всех} \quad n \geqslant 1 \tag{38}$$

и

$$2\Phi_1(n) \leqslant \Psi_1^{-1}(\Psi_1(1) + \log n) \quad \text{при всех} \quad n \geqslant 1\,. \tag{39}$$

Аналогом оценки (8) будет оценка

$$\sum_{k=n}^{\infty} (\,|\Delta\, a_k| + |\Delta\, b_k|\,) \leqslant \frac{\Phi_1(n)}{n} \quad \text{при всех} \quad n \geqslant 1\,. \tag{40}$$

Отсюда и из (38) вытекает, что оценка (8) также останется верной.

Рассмотрим теперь всюду сходящийся ряд (11) и обозначим через $f(x)$ его сумму. Тогда при всех натуральных $n$ и $x \in [\pi/(n+1)\,, \pi/n]$ в силу (40) и (36) имеем

$$|f(x)| \leqslant \Big| \sum_{k=1}^{n} a_k \Big| + \frac{1}{\sin(x/2)} \sum_{k=n+1}^{\infty} |\Delta\, a_k| \leqslant$$
$$\leqslant \Big| \sum_{k=1}^{n} a_k \Big| + (n+1) \sum_{k=n+1}^{\infty} |\Delta\, a_k| \leqslant \Big| \sum_{k=1}^{n} a_k \Big| +$$
$$+ \Phi_1(n+1) \leqslant 1 + \Phi_1(n+1)\,.$$

Отсюда и из (39) получаем

$$\Psi_1(|f(x)|) \leqslant \Psi_1(2) + \Psi_1(2\Phi_1(n+1)) \leqslant$$
$$\leqslant \Psi_1(2) + \Psi_1(1) + \log(n+1) \leqslant 2\Psi_1(2) + \log(n+1)\,.$$

Поэтому

$$\int_0^{\pi} \Psi_1(|f(x)|)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\pi/(n+1)}^{\pi/n} \Psi_1(|f(x)|)\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} (2\Psi_1(2) + \log(n+1))\, \frac{\pi}{n(n+1)} = 2\pi\, \Psi_1(2) +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi \log(n+1)}{n(n+1)} < +\infty\,.$$

Отсюда в силу (37) имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Psi(|f(x)|)\,dx \leqslant 2 \int_0^{\pi} \Psi_1(|f(x)|)\,dx < +\infty,$$

и условие (13) доказано. Заменяя в приведенном рассуждении все $a_k$ на $b_k$ и обозначая через $f(x)$ сумму всюду сходящегося ряда (12), получим, что условию (13) удовлетворяет и сумма ряда (12). Теорема 2 полностью доказана.

## Библиографический список


1. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. М. : Физматгиз, 1961. 936 с.
2. *Белов А. С.* О новых коэффициентных условиях равномерной сходимости тригонометрического ряда // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер. : Естеств., обществ. науки. 2009. Вып. 2. С. 72—85.