УДК 512.543

М. Ю. Гайворонская, Е. В. Соколов

О ФИНИТНОЙ ОТДЕЛИМОСТИ ЦИКЛИЧЕСКИХ ПОДГРУПП HNN-РАСШИРЕНИЙ ГРУПП

§ 1. Введение

Пусть A — некоторая группа, Ω — семейство нормальных подгрупп группы A. Будем говорить, что подгруппа B группы A отделима семейством Ω, если $\bigcap_{N\in\Omega} BN = B$. Если подгруппа B отделима семейством всех нормальных подгрупп конечного индекса группы A, ее называют финитно отделимой в A. Группа A называется финитно аппроксимируемой, если ее единичная подгруппа финитно отделима, и π_c-группой, если все циклические подгруппы группы A финитно отделимы.

Хорошо известно, что проблема равенства слов разрешима для конечно представленной финитно аппроксимируемой группы. Аналогичным образом можно показать, что для конечно представленной π_c-группы разрешима проблема вхождения в циклическую подгруппу. Более того, если циклическая подгруппа конечно представленной финитно аппроксимируемой группы финитно отделима, то разрешима проблема вхождения в данную подгруппу.

Напомним далее, что HNN-расширением группы A с проходной буквой t и подгруппами $H \leqslant A$ и $K \leqslant A$, связанными относительно изоморфизма $\varphi : H \to K$, называется группа $G = \langle A, t; t^{-1}Ht = K, \varphi\rangle$, образующими которой являются все образующие группы A и буква t, а определяющими соотношениями — соотношения группы A и все соотношения вида $t^{-1}ht = h\varphi$, где $h \in H$ (введенные здесь обозначения предполагаются фиксированными до конца изложения).

Известно, что любая группа с одним определяющим соотношением может быть вложена в группу с одним определяющим соотношением, в котором некоторый порождающий элемент имеет нулевую сумму степеней, и эту последнюю группу можно рассматривать как HNN-расширение, где в качестве проходной буквы выбирается порождающий в нулевой степени. Поэтому свойства HNN-расширений играют важную роль в изучении групп с одним определяющим соотношением.

Баумслаг и Третков [3] получили достаточное условие финитной аппроксимируемости HNN-расширений, которое в некоторых случаях является и необходимым [7]. Ким [4] обобщил этот результат, указав достаточное условие того, чтобы HNN-расширение было π_c-группой. Аппроксимационные свойства HNN-расширений с циклическими связанными подгруппами изучались в [5] и [6]. Основными результатами данной работы являются следующие две теоремы.

Теорема 1. *Если подгруппы H, K и $\{1\}$ отделимы в группе A семейством $\Phi_A(H, K, \varphi)$, то циклическая подгруппа группы G не является финитно отделимой в этой группе тогда и только тогда, когда она сопряжена с подгруппой группы A, не отделимой в ней семейством $\Phi_A(H, K, \varphi)$.*

Теорема 2. *Если группа A финитно аппроксимируема, подгруппы H и K финитно отделимы в ней и каждая нормальная подгруппа конечного индекса группы A содержит подгруппу из $\Phi_A(H,K,\varphi)$, то семейство финитно отделимых циклических подгрупп группы G максимально. Более подробно, циклическая подгруппа группы G не является финитно отделимой в этой группе тогда и только тогда, когда она сопряжена с не финитно отделимой подгруппой группы A.*

Здесь, следуя работе [2], через $\Phi_A(H,K,\varphi)$ обозначено семейство всех нормальных (H,K,φ)-совместимых подгрупп конечного индекса группы A (напомним, что подгруппа B группы A называется (H,K,φ)-совместимой, если $(B\cap H)\varphi = B\cap K$). Можно дать и другое определение семейства $\Phi_A(H,K,\varphi)$.

Заметим, что если N — произвольная нормальная подгруппа конечного индекса группы G, то $N\cap A \in \Phi_A(H,K,\varphi)$.

Действительно, пусть $B = N\cap A$. Тогда B — нормальная подгруппа конечного индекса группы A. Далее,

$$(B\cap H)\varphi = (N\cap H)\varphi = t^{-1}(N\cap H)t \leqslant N\cap K = B\cap K,$$

так как N нормальна в G и $t^{-1}Ht = K$ по определению группы G. Аналогично $(B\cap K)\varphi^{-1} \leqslant B\cap H$, и потому подгруппа B (H,K,φ)-совместима.

На самом деле верно и обратное. Нетрудно показать, что если $B\in\Phi_A(H,K,\varphi)$, то существует такая нормальная подгруппа N конечного индекса группы G, что $B = N\cap A$. Однако нам этот факт для дальнейших рассуждений не потребуется.

Сформулируем теперь ряд следствий из приведенных утверждений.

Следствие 1. *Пусть подгруппа $\langle H,K\rangle$ собственным образом содержится в некоторой подгруппе B группы A, удовлетворяющей нетривиальному тождеству. Тогда из финитной аппроксимируемости группы G следует, что подгруппы $\{1\}$, H и K отделимы в группе A семейством $\Phi_A(H,K,\varphi)$, и потому циклическая подгруппа группы G не является финитно отделимой в этой группе тогда и только тогда, когда она сопряжена с подгруппой группы A, не отделимой в ней семейством $\Phi_A(H,K,\varphi)$.*

Следствие 2. *Пусть группа A финитно аппроксимируема, подгруппы H и K конечны. Тогда семейство финитно отделимых циклических подгрупп группы G максимально.*

Следствие 3. *Пусть H и K — собственные конечно порожденные центральные подгруппы группы A, и пусть все подгруппы, лежащие в подгруппе HK и имеющие в ней конечный индекс, финитно отделимы в A. Если группа G финитно аппроксимируема, то семейство ее финитно отделимых циклических подгрупп максимально.*

Следствие 4. *Пусть изоморфизм φ совпадает с ограничением на подгруппу H внутреннего автоморфизма, определяемого некоторым элементом $a\in A$. Пусть также выполняется одно из следующих двух эквивалентных условий:*

1) *группа A финитно аппроксимируема и подгруппы H и K финитно отделимы в ней;*

2) *группа G финитно аппроксимируема.*

Тогда семейство финитно отделимых циклических подгрупп группы G максимально.

Следствие 5. *Пусть группа A содержит лишь конечное число подгрупп каждого конечного индекса и пусть изоморфизм φ совпадает с ограничением на подгруппу H некоторого автоморфизма α группы A. Пусть также выполняется одно из следующих двух эквивалентных условий:*

1) *группа A финитно аппроксимируема и подгруппы H и K финитно отделимы в ней;*

2) *группа G финитно аппроксимируема.*

Тогда семейство финитно отделимых циклических подгрупп группы G максимально.

Пусть H и K — циклические подгруппы. Говорят [5], что группа A квазирегулярна по паре подгрупп $\{H, K\}$, если для любого $l \in \mathbb{N}$ найдутся число $m \in \mathbb{N}$ и нормальная подгруппа N_l группы A конечного индекса такие, что $N_l \cap H = H^{lm}$ и $N_l \cap K = K^{lm}$.

Следствие 6. *Пусть группа A финитно аппроксимируема, H и K — циклические финитно отделимые подгруппы и группа A квазирегулярна по паре подгрупп $\{H, K\}$. Тогда семейство финитно отделимых циклических подгрупп группы G максимально.*

Первое следствие сразу же вытекает из теоремы 1 данной работы и теоремы 3 из [7], третье — из теоремы 2 и теоремы 2 из [2], доказательства остальных приводятся в § 3. Отметим, что теорема 1 и следствия 2, 4, 5 обобщают некоторые результаты Кима, полученные им в [4]. Следствие 6 является обобщением теоремы 2 из [6].

Заметим также, что из условий теорем 1 и 2 вытекает финитная аппроксимируемость группы G. Это следует из того, что единичная подгруппа этой группы сопряжена лишь сама с собой и в первом случае отделима в группе A семейством $\Phi_A(H, K, \varphi)$, а во втором — семейством всех нормальных подгрупп группы A конечного индекса. Таким образом, теорема 1 обобщает и отдельные результаты статьи [3].

§ 2. Доказательства теорем 1 и 2

Теорема 1. *Достаточность.* Рассмотрим произвольную циклическую подгруппу $\langle x \rangle$ группы A, которая не является отделимой семейством $\Phi_A(H, K, \varphi)$, и предположим, что эта подгруппа финитно отделима в группе G. Тогда для всякого элемента $a \in A \backslash \langle x \rangle$ найдется нормальная подгруппа L конечного индекса группы G такая, что $a \notin \langle x \rangle L$. Но в этом случае $a \notin \langle x \rangle (L \cap A)$, а подгруппа $L \cap A$ ввиду сделанного выше замечания принадлежит семейству $\Phi_A(H, K, \varphi)$. Таким образом, подгруппа $\langle x \rangle$ отделима в группе A семейством $\Phi_A(H, K, \varphi)$, и мы пришли к противоречию.

Следовательно, подгруппа $\langle x \rangle$ не является финитно отделимой в группе G. Очевидно, что и все сопряженные с ней подгруппы также не будут финитно отделимыми в G.

Необходимость. Прежде всего напомним, что любой элемент $g \in G$ может быть записан в приведенной форме:

$$g = g_0 t^{\varepsilon_0} g_1 t^{\varepsilon_1} \dots g_{n-1} t^{\varepsilon_{n-1}} g_n,$$

где $g_i \in A$, $\varepsilon_i = \pm 1$ и, если $\varepsilon_{i-1} = -1$, $\varepsilon_i = 1$, то $g_i \notin H$, если же $\varepsilon_{i-1} = 1$, $\varepsilon_i = -1$, то $g_i \notin K$. Лемма Бриттона (см., напр., [1, гл. IV, § 2]) утверждает, что любой элемент, обладающий приведенной записью, в которой есть хотя бы одна буква t или t^{-1}, отличен от единицы в группе G. Отсюда следует, что хотя один и тот же элемент может иметь различные приведенные записи, однако число вхождений букв t и t^{-1} во всех них одинаково. Оно называется длиной элемента g и обозначается $|g|$.

Элемент $g = g_0 t^{\varepsilon_0} g_1 t^{\varepsilon_1} \ldots g_{n-1} t^{\varepsilon_{n-1}}$ называется циклически приведенным, если все его циклические перестановки

$$g_i t^{\varepsilon_i} g_{i+1} \ldots g_{n-1} t^{\varepsilon_{n-1}} g_0 t^{\varepsilon_0} g_1 \ldots g_{i-1} t^{\varepsilon_{i-1}}$$

приведены. Понятно, что каждый элемент группы G сопряжен с некоторым циклически приведенным.

Далее, нетрудно показать, что если N — нормальная (H, K, φ)-совместимая подгруппа группы A, то отображение $\varphi_N : HN/N \to KN/N$, $(hN)\varphi_N = (h\varphi)N$ $(h \in H)$, корректно определено и является изоморфизмом подгрупп. Поэтому мы можем рассмотреть HNN-расширение группы A/N

$$G_N = \langle A/N, \tau;\ \tau^{-1}(HN/N)\tau = (KN/N),\ \varphi_N \rangle$$

и отображение $\rho_N : G \to G_N$, продолжающее естественный гомоморфизм группы A на фактор-группу A/N и переводящее t в τ. В силу определения изоморфизма φ_N отображение ρ_N переводит все определяющие соотношения группы G в равенства, верные в группе G_N, и потому является гомоморфизмом G на G_N.

Перейдем теперь непосредственно к проверке необходимости условия теоремы. Пусть g, x — произвольные элементы группы G, имеющие приведенные записи

$$x = x_0 t^{\delta_0} \ldots x_{m-1} t^{\delta_{m-1}} x_m,\ g = g_0 t^{\varepsilon_0} \ldots g_{n-1} t^{\varepsilon_{n-1}} g_n.$$

Пусть также подгруппа $\langle x \rangle$ не сопряжена ни с какой подгруппой группы A, не отделимой в ней семейством $\Phi_A(H, K, \varphi)$, и $g \notin \langle x \rangle$. Выполняя при необходимости подходящий внутренний автоморфизм группы G, мы можем считать далее, что x — циклически приведенный элемент, т. е. $x_m = 1$.

Для завершения доказательства нам достаточно найти нормальную подгруппу L конечного индекса группы G такую, что $g \notin \langle x \rangle L$.

Случай 1. Пусть выполняется один из следующих подслучаев:
1.1. $|x| = 0$, $|g| \geqslant 1$;
1.2. $|g| = 0$, $|x| \geqslant 1$;
1.3. $|g| \geqslant 1$, $|x| \geqslant 1$ и $|x|$ не делит $|g|$.

Пусть для некоторого i $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$ $\varepsilon_{i-1} = -1$ и $\varepsilon_i = 1$. Тогда $g_i \notin H$ и, так как подгруппа H отделима семейством $\Phi_A(H, K, \varphi)$, найдется подгруппа $R_i \in \Phi_A(H, K, \varphi)$ такая, что $g_i \notin HR_i$.

Аналогично, если для некоторого i $\varepsilon_{i-1} = 1$ и $\varepsilon_i = -1$, то $g_i \notin K$ и существует такая подгруппа $R_i \in \Phi_A(H, K, \varphi)$, что $g_i \notin KR_i$.

Для остальных i $(0 \leqslant i \leqslant n)$ определим подгруппу R_i следующим образом. Если $g_i \neq 1$, воспользуемся тем, что единичная подгруппа отделима семейством $\Phi_A(H, K, \varphi)$, и выберем подгруппу $R_i \in \Phi_A(H, K, \varphi)$ так, чтобы $g_i \notin R_i$. В противном случае положим $R_i = A$.

Точно так же, рассматривая циклически приведенную запись элемента x, определим подгруппы $S_j \in \Phi_A(H, K, \varphi)$, $0 \leqslant j \leqslant m-1$. Если $\delta_{j-1} = -1$ и $\delta_j = 1$, выберем S_j так, чтобы $x_j \notin HS_j$, если же $\delta_{j-1} = 1$ и $\delta_j = -1$, выберем так, чтобы $x_j \notin KS_j$ (здесь индексы рассматриваются по модулю m).

Положим

$$N = R_0 \cap R_1 \cap \ldots \cap R_n \cap S_0 \cap S_1 \cap \ldots \cap S_{m-1}.$$

Легко видеть, что тогда $N \in \Phi_A(H, K, \varphi)$ и мы можем рассмотреть группу

$$G_N = \langle A/N, \tau;\ \tau^{-1}(HN/N)\tau = (KN/N),\ \varphi_N \rangle.$$

В силу выбора подгруппы N $x_j\rho_N \notin HN/N$, если $\delta_{j-1} = -1$ и $\delta_j = 1$, и $x_j\rho_N \notin KN/N$, если $\delta_{j-1} = 1$ и $\delta_j = -1$. Поэтому

$$(x_0\rho_N)\tau^{\delta_0} \ldots (x_{m-1}\rho_N)\tau^{\delta_{m-1}}$$

— циклически приведенная запись элемента $x\rho_N$ в группе G_N длины m.

Аналогично

$$(g_0\rho_N)\tau^{\varepsilon_0} \ldots (g_{n-1}\rho_N)\tau^{\varepsilon_{n-1}}(g_n\rho_N)$$

— приведенная запись элемента $g\rho_N$ в группе G_N длины n. Более того, если $n = 0$, то $g_0 = g \neq 1$ и потому $g\rho_N = g_0\rho_N \neq 1$.

Ввиду последнего замечания и сделанных предположений о соотношении длин элементов x и g $g\rho_N \notin \langle x\rho_N \rangle$. Так как A/N — конечная группа, то G_N является π_c-группой [4]. Следовательно, существует нормальная подгруппа L_N конечного индекса группы G_N такая, что $g\rho_N \notin \langle x\rho_N \rangle L_N$. Прообраз L этой подгруппы в группе G относительно гомоморфизма ρ_N и будет искомой подгруппой, так как, очевидно, $g \notin \langle x \rangle L$.

Случай 2. $|x| = 0 = |g|$.

Поскольку в данном случае подгруппа $\langle x \rangle$ лежит в группе A и по условию не сопряжена ни с какой ее подгруппой, не являющейся отделимой семейством $\Phi_A(H, K, \varphi)$, она сама отделима этим семейством. Следовательно, существует подгруппа $N \in \Phi_A(H, K, \varphi)$ такая, что $g \notin \langle x \rangle N$. Так как гомоморфизм ρ_N продолжает естественный гомоморфизм группы A на фактор-группу A/N, то $g\rho_N \notin \langle x\rho_N \rangle$. Искомая подгруппа L теперь строится так же, как и в первом случае.

Случай 3. $|g| \geqslant 1$, $|x| \geqslant 1$ и $|g| = |x|l$ для некоторого натурального l.

Поскольку $g \notin \langle x \rangle$, $g^{-1}x^l \neq 1 \neq gx^l$. По аналогии со случаем 1 найдем такую подгруппу $N \in \Phi_A(H, K, \varphi)$, что элементы $g\rho_N$ и $x\rho_N$ имеют приведенную и циклически приведенную записи длин n и m соответственно, а элементы $(g^{-1}x^l)\rho_N$ и $(gx^l)\rho_N$ по-прежнему отличны от 1.

Тогда $|g\rho_N| = |(x\rho_N)^l|$, но $g\rho_N \neq (x\rho_N)^{\pm l}$. Следовательно, $g\rho_N \notin \langle x\rho_N\rangle$. Искомая подгруппа L теперь может быть найдена уже привычным образом.

Теорема 2. Заметим прежде всего, что всякая подгруппа B группы A является финитно отделимой в этой группе тогда и только тогда, когда она отделима в ней семейством $\Phi_A(H, K, \varphi)$.

Действительно, если подгруппа B финитно отделима и $x \in A\backslash B$ — произвольный элемент, то $x \notin BN$ для некоторой нормальной подгруппы N конечного индекса группы A. Согласно условию теоремы существует подгруппа $M \in \Phi_A(H, K, \varphi)$ такая, что $M \leqslant N$. Тогда $x \notin BM$, и ввиду произвольности элемента x подгруппа B отделима семейством $\Phi_A(H, K, \varphi)$.

Поскольку любая подгруппа из $\Phi_A(H, K, \varphi)$ является нормальной и имеет конечный индекс в группе A, обратное утверждение очевидно и всегда выполнено.

Теперь требуемое утверждение легко получается из теоремы 1.

Так как группа A финитно аппроксимируема, ее единичная подгруппа финитно отделима. По условию финитно отделимыми являются также и подгруппы H и K. Следовательно, все эти три подгруппы отделимы в группе A семейством $\Phi_A(H, K, \varphi)$. Таким образом, выполняется условие теоремы 1, согласно которой циклическая подгруппа группы G не является финитно отделимой в этой группе тогда и только тогда, когда она сопряжена с подгруппой группы A, не отделимой в ней семейством $\Phi_A(H, K, \varphi)$. Но отделимость подгруппы группы A семейством $\Phi_A(H, K, \varphi)$ равносильна обычной финитной отделимости в этой группе. Тем самым мы получаем искомое утверждение и теорема доказана.

§ 3. Доказательства следствий

Следствие 2. Поскольку подгруппы H и K конечны, они являются финитно отделимыми в группе A. Более того, существует нормальная подгруппа M конечного индекса этой группы такая, что $M \cap (H \cup K) = 1$. Поэтому если N — произвольная нормальная подгруппа конечного индекса группы A, то пересечение $N \cap M$ лежит в N, является нормальной подгруппой конечного индекса группы A и удовлетворяет условию (H, K, φ)-совместимости, так как

$$((N \cap M) \cap H)\varphi = 1 = (N \cap M) \cap K.$$

Таким образом, выполнены все условия теоремы 2 и следствие доказано.

Пусть α — автоморфизм группы A и $N \leqslant A$. Подгруппу N будем называть α-допустимой, если $N\alpha = N$. Для дальнейших рассуждений нам потребуется следующее вспомогательное

Предложение. *Пусть изоморфизм φ совпадает с ограничением на подгруппу H некоторого автоморфизма α группы A. Пусть также в каждой подгруппе из семейства $\Phi_A(H, K, \varphi)$ содержится α-допустимая подгруппа из этого же семейства. Тогда из финитной аппроксимируемости группы G следует, что подгруппы H, K и $\{1\}$ отделимы семейством $\Phi_A(H, K, \varphi)$.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что, поскольку группа G финитно аппроксимируема, ее единичная подгруппа отделима семейством $\Phi_A(H,K,\varphi)$ [7]. Далее будем рассуждать от противного.

Предположим, что подгруппа H не является отделимой семейством $\Phi_A(H,K,\varphi)$. Тогда существует элемент $a \in A\backslash H$ такой, что для всякой подгруппы $N \in \Phi_A(H,K,\varphi)$ $a \in HN$.

Рассмотрим элемент $g = t^{-1}at(a\alpha)^{-1}$.

Так как $a \notin H$, то g имеет длину 2 и из леммы Бриттона следует, что $g \neq 1$.

Пусть σ — произвольный гомоморфизм группы G на конечную группу, $L = \ker\,\sigma$ и $M = L \cap A$. Тогда подгруппа M принадлежит семейству $\Phi_A(H,K,\varphi)$ и по условию содержит α-допустимую подгруппу N из этого же семейства.

По предположению $a \in HN$ и для подходящих элементов $h \in H$, $n \in N$ $a = hn$. Поэтому, учитывая, что $\alpha|_H = \varphi$, имеем

$$g = t^{-1}at(a\alpha)^{-1} = t^{-1}(hn)t((hn)\alpha)^{-1} = t^{-1}hnt(h\varphi n\alpha)^{-1} =$$
$$t^{-1}htt^{-1}nt(n\alpha)^{-1}(h\varphi)^{-1} = (h\varphi)t^{-1}nt(n\alpha)^{-1}(h\varphi)^{-1}.$$

Так как подгруппа N α-допустима и $n \in N$, то $n\alpha \in N$. Далее, поскольку $N \leqslant L$, а подгруппа L нормальна в G, $t^{-1}nt \in L$. Отсюда $t^{-1}nt(n\alpha)^{-1} \in L$ и, снова в силу нормальности этой подгруппы, $g \in L$.

Таким образом, элемент g переходит в единицу при любом гомоморфизме σ группы G на конечную группу. Это противоречит финитной аппроксимируемости группы G, и, следовательно, подгруппа H отделима семейством $\Phi_A(H,K,\varphi)$.

Аналогичным образом доказывается, что семейством $\Phi_A(H,K,\varphi)$ отделима подгруппа K. Если это не так, то существует элемент $b \in A\backslash K$ такой, что для всякой подгруппы $N \in \Phi_A(H,K,\varphi)$ $b \in KN$, и нам достаточно рассмотреть элемент $g' = tbt^{-1}(b\alpha^{-1})^{-1}$, который также переходит в единицу при любом гомоморфизме σ группы G на конечную группу.

Предложение доказано.

Следствие 4. Пусть N — произвольная нормальная подгруппа конечного индекса группы A. Если $x \in N \cap H$, то $x\varphi \in K$ по определению группы G и $x\varphi = a^{-1}xa \in N$, так как подгруппа N нормальна в A. Следовательно, $x\varphi \in N \cap K$ и $(N \cap H)\varphi \subseteq N \cap K$. Аналогично доказывается и обратное включение $(N \cap H)\varphi \supseteq N \cap K$.

Таким образом, произвольная нормальная подгруппа конечного индекса группы A принадлежит семейству $\Phi_A(H,K,\varphi)$. Поэтому если группа A финитно аппроксимируема и подгруппы H и K финитно отделимы в ней, то выполняются все условия теоремы 2 и требуемое утверждение имеет место.

Эквивалентность условий 1 и 2 следует из приведенного в конце § 1 замечания о том, что из теоремы 2 вытекает финитная аппроксимируемость группы G, и доказанного выше предложения. Последнее применимо, поскольку произвольная подгруппа из семейства $\Phi_A(H,K,\varphi)$ нормальна в группе A и, следовательно, допустима относительно внутреннего автоморфизма, производимого элементом a.

Согласно предложению, если группа G финитно аппроксимируема, то подгруппы $\{1\}$, H и K отделимы семейством $\Phi_A(H,K,\varphi)$. В частности, они финитно отделимы в группе A, и равносильность условий тем самым установлена.

Следствие 5. Здесь используется та же схема рассуждений, что и при доказательстве следствия 4.

Пусть N — произвольная нормальная подгруппа конечного индекса группы A. Обозначим через M пересечение образов этой подгруппы относительно всех автоморфизмов группы A. Нетрудно показать, что подгруппа M является характеристической и потому α-допустимой. Как и выше, отсюда легко вытекает ее (H, K, φ)-совместимость.

Так как все образы подгруппы N имеют равные конечные индексы в группе A, то согласно условию следствия среди них лишь конечное число различных. Это означает, что подгруппа M, будучи пересечением конечного числа подгрупп конечного индекса, сама имеет конечный индекс в группе A.

Таким образом, произвольная нормальная подгруппа конечного индекса группы A содержит α-допустимую подгруппу из семейства $\Phi_A(H, K, \varphi)$. Доказательство теперь завершается так же, как и для следствия 4.

Следствие 6. Пусть снова N — произвольная нормальная подгруппа конечного индекса группы A, $N \cap H = H^u$, $N \cap K = K^v$. Положим $l = uv$. Тогда из квазирегулярности группы A по паре подгрупп $\{H, K\}$ следует, что существуют число m и нормальная подгруппа конечного индекса N_l группы A такие, что

$$N_l \cap H = H^{ml}, \ N_l \cap K = K^{ml}.$$

Пусть $L = N \cap N_l$. Тогда L — нормальная подгруппа конечного индекса группы A, лежащая в N. Так как числа u и v делят l, то

$$L \cap H = (N \cap N_l) \cap H = (N \cap H) \cap (N_l \cap H) = H^u \cap H^{ml} = H^{ml}$$

и аналогично $L \cap K = K^{ml}$. Таким образом, $(L \cap H)\varphi = L \cap K$ и $L \in \Phi_A(H, K, \varphi)$.

Тем самым выполнены все условия теоремы 2 и следствие доказано.

Библиографический список

1. *Линдон Р., Шупп П.* Комбинаторная теория групп. М. : Мир, 1980. 447 с.
2. *Молдаванский Д. И.* Финитная аппроксимируемость некоторых HNN-расширений групп // Вестн. Иван. гос. ун-та. 2002. Вып. 3. С. 123—133.
3. *Baumslag B., Tretkoff M.* Residually finite HNN extensions // Comm. Algebra. 1978. Vol. 6, № 2. P. 179—194.
4. *Kim G.* Cyclic subgroup separability of HNN extensions // Bull. Korean. Math. Soc. 1993. Vol. 30, № 2. P. 285—293.
5. *Kim G., Tang C. Y.* Cyclic subgroup separability of HNN-extensions with cyclic associated subgroups // Can. Math. Bull. 1999. Vol. 42, № 3. P. 335—343.
6. *Rosenberger G., Sasse S. L.* Residual properties of HNN-extensions with cyclic associated subgroups // Algebra Colloq. 1996. Vol. 3, № 1. P. 91—96.
7. *Shirvani M.* On residually finite HNN extensions // Arch. Math. 1985. Vol. 44. P. 110—115.