УДК 519.6

Ю. В. Груздева, С. В. Пухов

ПАРЕТО-ОПТИМАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ВЫПУКЛЫХ ЗАДАЧ ВЕКТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

§ 1. Введение

Задачи многокритериальной оптимизации (ЗМО) весьма значимы в приложениях, особенно в экономических и технических науках, где требуется оценка качества принимаемых решений не по одному критерию эффективности, а одновременно по нескольким взаимосвязанным и, как правило, противоречивым критериям.

В развитие многокритериальной оптимизации внесли вклад такие ученые, как Г. Кун, А. Таккер, Л. Гурвиц, О. Мангасарян, Э. Полак, С. Смейл, Т. Купманс, С. Карлин и другие.

В общем виде ЗМО может быть сформулирована следующим образом: найти (все такие) элементы x из множества G допустимых в ЗМО элементов (множества решений), на которых достигает оптимума векторный критерий оценки эффективности $F(x)$, компонентами которого являются зависимые от x вещественные функции $f_k(x)$, $k = \overline{1,\ n}$, называемые локальными критериями: $F(x) = (f_1(x), ..., f_n(x))$.

Таким образом, здесь G — некоторое множество, обычно это подмножество арифметического пространства $X = \mathbb{R}^m$ и F — отображение G в $Y = \mathbb{R}^n$, $F\colon G \to Y$.

ЗМО о нахождении минимума условно записывают так:

$$F(x) \to \min,\ x \in G.$$

В ЗМО считается, что каждое решение $x \in G$ полностью характеризуется своей оценкой $y = F(x)$, и выбор оптимального решения сводится к выбору оптимальной оценки из множества всех достижимых оценок $Y_0 = F(G)$.

Подходящее определение оптимума для задачи многокритериальной оптимизации было предложено Вильфредо Парето (1848—1923), итальянским экономистом, который использовал его при исследовании процесса рыночного обмена товаров. Понятие оптимального по Парето, или эффективного, решения представляет собой обобщение понятия точки экстремума вещественной функции на случай векторного критерия оптимальности.

Основная проблема в изучении как задач многокритериальной оптимизации, так и задач векторной оптимизации заключается в том, что оптимизируемый функционал принимает значения не из множества вещественных чисел, а из некоторого векторного пространства, которое не является совершенно (линейно) упорядоченным. Это основное отличие задачи векторной оптимизации от задачи классической (скалярной) оптимизации, которое и вызывает трудности при изучении задач векторной оптимизации.

В настоящей работе продолжаются исследования, результаты которых изложены в работах [1, 2].

Как и в [1, 2], здесь рассматриваются векторные пространства только над полем вещественных чисел — вещественные векторные пространства (в.в.п.), а также упорядоченные векторные пространства (у.в.п.).

Необходимые понятия и определения можно уточнить в [1, 2].

§ 2. Некоторые понятия теории задач многокритериальной оптимизации

Достаточно общим и хорошо разработанным является способ описания предпочтений с помощью бинарных отношений, в первую очередь отношений порядка.

Для элементов $u_1 = (u_{11}, ..., u_{1k})$, $u_2 = (u_{21}, ..., u_{2k})$ пространства $U = \mathbb{R}^k$ рассмотрим отношения $\gtrapprox$, $\gtrsim$, $\succ$, определенные следующим образом:

1) $u_1 \gtrapprox u_2 \Leftrightarrow u_{1i} \geqslant u_{2i}, i = \overline{1,\ k}$;
2) $u_1 \gtrsim u_2 \Leftrightarrow u_1 \gtrapprox u_2 \wedge u_1 \neq u_2$;
3) $u_1 \succ u_2 \Leftrightarrow u_{1i} > u_{2i}, i = \overline{1,\ k}$.

В зависимости от выполняющихся свойств бинарных отношений выделяют строгий (частичный) порядок ($\gtrsim$ или $\succ$) и (частичный) порядок ($\gtrapprox$).

Отношение $\gtrapprox$ (частичного) порядка обладает следующими свойствами:

а) *рефлексивность*: $u \gtrapprox u$, $u \in U$;
б) *антисимметричность*: $u_1 \gtrapprox u_2$, $u_2 \gtrapprox u_1 \ \Rightarrow \ u_1 = u_2$, $u_1, u_2 \in U$;
в) *транзитивность*: $u_1 \gtrapprox u_2$, $u_2 \gtrapprox u_3 \Rightarrow u_1 \gtrapprox u_3$, $u_1, u_2, u_3 \in U$.

Отношения $\gtrsim$ и $\succ$ называют строгими предпорядками, так как они обладают свойством транзитивности, но не рефлексивны и не антисимметричны.

Оценка $\bar{y} \in Y_0$ называется *наилучшей* (*наименьшей*) по $\lessapprox$, если для любой оценки $y \in Y_0$ справедливо $\bar{y} \lessapprox y$.

Если в практической многокритериальной задаче существует наименьшая по $\lessapprox$ достижимая оценка $\bar{y}$, то именно ее и следует считать оптимальной. К сожалению, такой случай реализуется очень редко: как правило, оценка $\bar{y}$ не существует, так как порядок $\lessapprox$ не является линейным.

Оценка $\bar{y} \in Y_0$ называется *минимальной по* $\lesssim$, если не существует оценки $y \in Y_0$ такой, что $y \lesssim \bar{y}$. Оценка минимальная по $\lesssim$ называется *оптимальной по Парето, или эффективной.*

Оценка $\bar{y} \in Y_0$ называется *минимальной по* $\prec$ (*слабо оптимальной по Парето, слабо эффективной*), если не существует оценки $y \in Y_0$ такой, что $y \prec \bar{y}$.

Отношения $\gtrapprox$, $\gtrsim$ и $\succ$, определенные на множестве оценок, порождают аналогичные по смыслу отношения $\gtrapprox$, $\gtrsim$ и $\succ$ во множестве решений.

Решение $\bar{x} \in G$ *наилучшее*, если для всех $x \in G$ выполнено неравенство $F(\bar{x}) \lessapprox F(x)$.

Решение $\bar{x} \in G$ *оптимально по Парето* (эффективно), если не существует решения $x \in G$ такого, что $F(x) \lesssim F(\bar{x})$.

Решение $\bar{x} \in G$ *слабо оптимально по Парето* (слабо эффективно), если не существует решения $x \in G$ такого, что $F(x) \prec F(\bar{x})$.

В дальнейшем будем рассматривать обобщение многокритериальных задач на бесконечномерный случай — так называемые задачи векторной оптимизации (ЗВО), когда конечномерность пространств X и Y не предполагается.

Один из способов задания предпочтения в ЗМО и ЗВО — выделение "положительного"конуса K в пространстве Y (см. [1]).

§ 3. Слабо эффективные точки множеств

Пусть Y — у.в.п., K — положительный конус в Y, A — множество в Y, $A \subseteq Y$.

Точка $\bar{y} \in A$ называется *слабо эффективной точкой* множества A (или точкой *слабого минимума по Парето*), если не существует точки $\tilde{y} \in A$ такой, что $\bar{y} - \tilde{y} \in \operatorname{core} K$ (т. е. $\tilde{y} \overset{K^\circ}{<} \bar{y}$, где $K^\circ = \operatorname{core} K$).

Точка $\bar{y} \in A$ называется *эффективной точкой* множества A (или точкой *минимума по Парето*), если не существует точки $\tilde{y} \in A$ такой, что $\bar{y} - \tilde{y} \in K^+$, где $K^+ = K \setminus \{0_Y\}$ (т. е. $\tilde{y} \overset{K}{<} \bar{y}$).

Замечание. Если $\bar{y}$ — эффективная точка (точка минимума по Парето) множества A, то $\bar{y}$ — слабо эффективная точка (точка слабого минимума по Парето) множества A, поскольку $\operatorname{core} K \subset K^+$.

Введем в рассмотрение множество $A^* = A + K$.

Предложение 1. *Пусть $\bar{y} \in A$. Точка $\bar{y}$ — точка слабого минимума по Парето для множества A тогда и только тогда, когда она является точкой слабого минимума по Парето для множества A^*.*

Доказательство. Если $\bar{y} \in A$ является слабо эффективной точкой для A^*, то, очевидно, она слабо эффективна и для A, так как $A \subseteq A^*$.

Предположим теперь, что $\bar{y}$ — слабо эффективная точка для A и существует такая точка $\tilde{y} \in A^*$, что $\tilde{y} \overset{K^\circ}{<} \bar{y}$. Согласно равенству $A^* = A + K$, для некоторых $y \in A$ и $y_0 \in K$ верно $\tilde{y} = y + y_0 \overset{K^\circ}{<} \bar{y}$, тогда $y \overset{K^\circ}{<} \bar{y}$, что противоречит слабой эффективности точки $\bar{y}$ для A. Предложение доказано.

Множество A, лежащее в Y, называют *эффективно выпуклым*, если выпукло множество A^*.

Теорема 1. *Пусть A — эффективно выпукло. Точка $\bar{y} \in A$ является точкой слабого минимума по Парето тогда и только тогда, когда существует линейный функционал $y' \in K'$, $y' \neq 0_{Y'}$ такой, что*

$$\langle\, y', \bar{y}\rangle \leqslant \langle\, y', y\rangle \quad \textit{для любой } y \in A.$$

Доказательство. По предложению 1: $\bar{y} \in A$ — точка слабого минимума по Парето на A тогда и только тогда, когда $\bar{y} \in A$ — точка слабого минимума по Парето на A^*, т. е. не существует точки $y^* \in A^*$ такой, что $\bar{y} - y^* \in \operatorname{core} K$.

Определим отображение $F(y)$ следуюшим образом: $F(y) = y - \bar{y}$, т. е. $F = E - \bar{y}$, $F\colon\ Y \to Y$, где E — тождественное отображение Y. Отметим, что F — выпуклое отображение.

Пусть $\bar{y} \in A$ — точка слабого минимума по Парето на A. Тогда не существует $y^* \in A^*$ такого, что $\bar{y} - y^* = -F(y^*) \in \operatorname{core} K$.

По обобщенной теореме Фань Цзи—Гликсберга—Гоффмана (см. [3]) получаем, что тогда существует линейный функционал $y' \in K'$, $y' \neq 0_{Y'}$ такой, что $\langle\ y',\ F(y)\rangle \geqslant 0$ для любой $y \in A^*$.

В силу включения $A \subseteq A^*$ имеем для любой $y \in A$ неравенство $\langle\ y',\ F(y)\rangle\ \geqslant\ 0$, или по определению F имеем $\langle\ y',\ y - \bar{y}\rangle\ \geqslant\ 0$, т. е. $\langle\ y',\ y\rangle \geqslant \langle\ y',\ \bar{y}\rangle$, что и требовалось доказать.

Наоборот, пусть теперь существует $y' \in K'$, $y' \neq 0_{Y'}$ такой, что $\langle\ y',\ \tilde{y}\rangle \geqslant \langle\ y',\ \bar{y}\rangle$ для любой $\tilde{y} \in A$. По определению сопряженного конуса имеем $\langle\ y',\ y_0\rangle \geqslant 0$ для любой $y_0 \in K$. Следовательно, $\langle\ y',\ \tilde{y} + y_0\rangle \geqslant \langle\ y',\ \bar{y}\rangle$ для любых $\tilde{y} \in A$, $y_0 \in K$, т. е. $\langle\ y',\ y\rangle \geqslant \langle\ y',\ \bar{y}\rangle$ для любой $y \in A^*$, или опять по определению F имеем $\langle\ y',\ F(y)\rangle \geqslant 0$ для любой $y \in A^*$.

Тогда по обобщенной теореме Фань Цзи—Гликсберга—Гоффмана получаем, что не существует точки $y^* \in A^*$ такой, что $-F(y^*) \in \operatorname{core} K$ или $\bar{y} - y^* \in \operatorname{core} K$. Значит, $\bar{y}$ — точка слабого минимума по Парето на A^*, и, в силу предложения 2, $\bar{y}$ — точка слабого минимума по Парето на A. Теорема доказана.

Замечание. Теорема 1 обобщает теорему П. Л. Ю (P. L. Yu) с конечномерного случая (см. [3]) на случай произвольного, в том числе бесконечномерного, упорядоченного векторного пространства.

Пусть X — вещественное векторное пространство, Y — упорядоченное векторное пространство и K — положительный конус в Y, F — отображение из X в Y, $F\colon X \to Y$.

Предложение 2. *Пусть F — выпуклое отображение из X в Y. Если G — выпуклое множество в X, то множество $A = F(G)$ эффективно выпукло, т. е. эффективное множество $A^* = A + K$ — это выпуклое множество в Y.*

Доказательство. Пусть $y_1, y_2 \in A^*$, т. е. для некоторых $x_1, x_2 \in G$ и $y', y'' \in K$ имеем $y_1 = F(x_1) + y'$, $y_2 = F(x_2) + y''$.

В силу выпуклости множества G точка $x = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \in G$, $\alpha \in (0; 1)$. Далее,

$$
\begin{aligned}
y = \alpha y_1 + (1-\alpha)y_2 &= \alpha(F(x_1) + y') + (1-\alpha)(F(x_2) + y'') = \\
&= (\alpha F(x_1) + (1-\alpha)F(x_2)) + (\alpha y' + (1-\alpha)y'') \overset{K}{\geqslant} \\
&\overset{K}{\geqslant} F(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) + \hat{y} = F(x) + \hat{y},
\end{aligned}
$$

где $\hat{y} = \alpha y' + (1-\alpha)y'' \in K$, так как K — выпуклый конус.

Итак, $y \overset{K}{\geqslant} F(x) + \hat{y}$, т. е. $\hat{\hat{y}} = y - (F(x) + \hat{y}) \in K$, значит,

$$
y = F(x) + (\hat{y} + \hat{\hat{y}}) = F(x) + \tilde{y},
$$

где $\tilde{y} = \hat{y} + \hat{\hat{y}} \in K$ опять же в силу выпуклости K. Таким образом, для $y_1, y_2 \in A^*$ при $\alpha \in (0; 1)$ получаем

$$y = \alpha y_1 + (1 - \alpha) y_2 = F(x) + \tilde{y},$$

где $x = \alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2 \in G$ и $\tilde{y} \in K$, т. е. $y \in A^*$. Значит, множество A^* выпукло. Предложение доказано.

Замечание. Если A — выпуклое множество, то очевидно, что A^* тоже выпуклое множество, как сумма двух выпуклых множеств A и K. Но даже если G — выпуклое множество, F — выпуклое отображение, то множество $A = F(G)$ не обязательно выпуклое.

Пример. $X = \mathbb{R}^2,\ x = (x_1;\ x_2) \in X,\ \ Y = \mathbb{R}^2,\ y = (y_1;\ y_2) \in Y;$ $F(x) = (f_1(x);\ f_2(x)) = (y_1;\ y_2),\ F\colon\ X \to Y$ – выпуклое отображение при $y_1 = x_1^2 + kx_2, \quad y_2 = kx_1 + x_2^2;$

$$A = \{x \in X\colon\ x_1\ +\ x_2\ =\ 1,\ x_1,\ x_2 \geqslant\ 0\}$$

— выпуклое множество.

Образом F отображения F будет гладкая кривая, точки которой $F((1;\ 0)),\ F\left(\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right)\right),\ F((0;\ 1))$ при $k \neq 1$ не лежат на одной прямой, и поэтому $F(A)$ — множество не выпуклое.

§ 4. Слабо эффективные решения ВЗВО

Из теоремы 1 и предложения 2 получается следующая теорема, обобщающая теорему из [1].

Пусть X — в.в.п., Y — у.в.п. с положительным конусом K, G — выпуклое множество в X, $F\colon X \to Y$ — выпуклое отображение. Рассмотрим *выпуклую задачу векторной оптимизации* (ВЗВО) *с ограничениями в виде включений* следующего вида:

$$F(x) \to \min, \quad x \in G.$$

Точка $\bar{x} \in G$ называется *слабо эффективной точкой* в ВЗВО (точкой *слабого минимума по Парето* в ВЗВО), если $\bar{y} = F(\bar{x})$ — слабо эффективная точка множества $A = F(G)$ или (в силу предложения 1) множества $A^* = A + K$ (точка слабого минимума по Парето для множества A^*).

Точка $\bar{x} \in G$ называется *эффективной точкой* в ВЗВО (точкой *абсолютного минимума по Парето* в ВЗВО, точкой АМП в ВЗВО), если $\bar{y} = F(\bar{x})$ — эффективная точка (точка минимума по Парето) для множества A.

Выше отмечено, что $\bar{y} \in A$ — слабо эффективная точка множества A тогда и только тогда, когда $\bar{y}$ — слабо эффективная точка множества A^*. А также если $\bar{y} \in A$ — эффективная точка множества A, то $\bar{y}$ — слабо эффективная точка множества A.

Значит, если $\bar{x} \in G$ — эффективная точка в ВЗВО, то $\bar{x}$ — слабо эффективная точка в ВЗВО.

Теорема 2. *Пусть* $\bar{x} \in G$. *Точка* $\bar{x}$ *является точкой слабого минимума по Парето в* ВЗВО *тогда и только тогда, когда существует ненулевой линейный функционал* $y' \in K'$, $y' \neq 0_{Y'}$ *такой, что для функции Лагранжа* ВЗВО

$$\mathcal{L}(x) \stackrel{def}{=} \langle\, y',\ F(x)\rangle$$

выполнено условие минимума

$$\min_{x \in G} \mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(\bar{x}).$$

Доказательство. Отметим, что поскольку G — выпуклое множество в X и F — выпуклое отображение из X в Y, то множество $A^* = A + K$ — выпуклое множество в Y, где $A = F(G)$.

Далее, по теореме 1, когда A^* является выпуклым множеством, точка $\bar{y} \in A$ (у нас сейчас $\bar{y} = F(\bar{x})$) является слабо эффективной точкой множества A тогда и только тогда, когда существует линейный функционал $y' \in K'$, $y' \neq 0_{Y'}$ такой, что при всех $y \in A$

$$\langle\, y',\ y\rangle \geqslant \langle\, y',\ \bar{y}\rangle,$$

но поскольку сейчас $A = F(G)$, $\bar{y} = F(\bar{x})$, то

$$\langle\, y', F(x)\rangle \geqslant \langle\, y', F(\bar{x})\rangle$$

при всех $x \in G$, или для функции Лагранжа $\mathcal{L}(x)$ выполнено условие минимума

$$\min_{x \in G} \mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(\bar{x}).$$

Теорема доказана.

Замечания

1. Суть теоремы 2 — в сведении задачи векторной оптимизации к задаче скалярной оптимизации. Метод сведения — “свертка” векторного функционала $F(x)$ в скалярный — $\langle y',\ F(x)\rangle$, или скаляризация, часто используется в прикладных исследованиях, чтобы избавиться от многочисленных критериев (multiple objectives) с помощью субъективных их весов.

2. Задача (скалярной) минимизации $\mathcal{L}(x) \to \min,\quad x \in G$ является простейшей задачей выпуклого программирования — задачей минимизации выпуклой функции на выпуклом множестве, так как $\mathcal{L}(x)$ — выпуклая функция из X в $\mathbb{R}$, а G — выпуклое множество в X.

Библиографический список

1. *Груздева Ю. В., Пухов С. В.* Принцип оптимальности в выпуклых задачах векторной оптимизации // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер. : Естеств., обществ. науки. 2009. Вып. 2. С. 86—100.
2. *Пухов С. В.* Теорема Фань Цзи—Гликсберга—Гоффмана для выпуклых отображений со значениями в упорядоченных векторных пространствах // Там же. С. 117—120.
3. *Yu P. L.* Cone convexity, cone extreme points, and nondominated solutions in decision problems with multiobjectives // J. of Optimization Theory and Applications. 1974. Vol. 14, № 3. P. 319—377.