УДК 512.543

Д. И. Молдаванский

О ПЕРЕСЕЧЕНИИ ПОДГРУПП КОНЕЧНОГО p-ИНДЕКСА В ГРУППАХ БАУМСЛАГА — СОЛИТЭРА

1. Для любого класса групп $\mathcal{K}$ и произвольной группы G через $\sigma_{\mathcal{K}}(G)$ будем обозначать пересечение всех нормальных подгрупп группы G, фактор-группы по которым принадлежат классу $\mathcal{K}$. Очевидно, что группа G является $\mathcal{K}$-аппроксимируемой (т. е. аппроксимируемой группами из класса $\mathcal{K}$) в точности тогда, когда $\sigma_{\mathcal{K}}(G)$ совпадает с единичной подгруппой; более того, $\sigma_{\mathcal{K}}(G)$ является наименьшей из нормальных подгрупп группы G, фактор-группы по которым $\mathcal{K}$-аппроксимируемы.

В случае, когда $\mathcal{K}$ совпадает с классом $\mathcal{F}$ всех конечных групп, вместо $\sigma_{\mathcal{K}}(G)$ будем писать $\sigma(G)$, и если $\mathcal{K}$ совпадает с классом $\mathcal{F}_p$ всех конечных p-групп, вместо $\sigma_{\mathcal{K}}(G)$ договоримся писать $\sigma_p(G)$.

Задачу описания подгруппы $\sigma_{\mathcal{K}}(G)$ произвольной группы G некоторого семейства групп можно рассматривать как более общую постановку задачи выделения в этом семействе тех групп, которые являются $\mathcal{K}$-аппроксимируемыми. При этом в одних случаях вычисление подгруппы $\sigma_{\mathcal{K}}(G)$ опирается на установленный ранее критерий $\mathcal{K}$-аппроксимируемости групп рассматриваемого семейства, а в других эту более общую задачу удается решить без использования критерия $\mathcal{K}$-аппроксимируемости, а сам критерий получить как следствие этого более общего результата.

При $\mathcal{K} = \mathcal{F}$ два результата первого типа приведены в работе [3], где описание подгруппы $\sigma(G)$ найдено для групп, являющихся нисходящими HNN-расширениями, а также для некоторых обобщенных свободных произведений. Пример результата второго типа — полученное в [2] описание пересечения нормальных подгрупп конечного индекса в группах Баумслага — Солитэра.

Напомним, что группами Баумслага — Солитэра называются группы вида
$$G(m,n) = \langle a, b;\ a^{-1}b^m a = b^n\rangle,$$
где m и n — ненулевые целые числа (причем без уменьшения общности можно считать, что $m > 0$ и $m \leqslant |n|$). Напомним также (см. [4, 5]), что (в предположении $m > 0$ и $m \leqslant |n|$) группа $G(m,n)$ является $\mathcal{F}$-аппроксимируемой тогда и только тогда, когда или $m = 1$, или $|n| = m$. Основной результат работы [2] — следующее утверждение:

Предложение 1 (см. [2, теорема 1]). *Пусть $d = (m,n)$ — наибольший общий делитель чисел m и n. Подгруппа $\sigma(G(m,n))$ совпадает с нормальным замыканием в группе $G(m,n)$ множества всех коммутаторов $\left[a^k b^d a^{-k}, b\right]$, где k принимает всевозможные целочисленные значения.*

Отметим еще раз, что при доказательстве этой теоремы приведенный выше критерий $\mathcal{F}$-аппроксимируемости групп $G(m,n)$ не используется и является ее непосредственным следствием.

Установленный в [1] критерий $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости группы $G(m,n)$ в предположении $m > 0$ и $m \leqslant |n|$ формулируется следующим образом: группа $G(m,n)$ $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда или $m = 1$ и $n \equiv 1 \pmod p$, или $|n| = m = p^r$ для некоторого $r \geqslant 0$, причем если $n = -m$, то $p = 2$.

Цель данной работы — получение следующего обобщения этого критерия:

Теорема. *Пусть $G(m,n) = \langle a, b;\ a^{-1}b^m a = b^n\rangle$ и p — простое число. Запишем числа m и n в виде $m = p^r m_1$ и $n = p^s n_1$, где $r, s \geqslant 0$ и каждое из чисел m_1 и n_1 взаимно просто с p. Обозначим также через d наибольший общий делитель чисел m_1 и n_1 и запишем $m_1 = du$ и $n_1 = dv$. Тогда*

(1) *если $r \neq s$ или если числа m_1 и n_1 не сравнимы по модулю p, то подгруппа $\sigma_p(G(m,n))$ совпадает с нормальным замыканием в группе $G(m,n)$ элемента b^{p^t}, где $t = \min\{r, s\}$;*

(2) *если $r = s$ и $m_1 \equiv n_1 \pmod p$, то подгруппа $\sigma_p(G(m,n))$ совпадает с нормальным замыканием в группе $G(m,n)$ множества, состоящего из элемента $a^{-1}b^{p^r u}ab^{-p^r v}$ и всевозможных коммутаторов вида $\left[a^k b^{p^r} a^{-k}, b\right]$ $(k \in \mathbb{Z})$.*

Как и в [2], при доказательстве этой теоремы критерий $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости группы $G(m,n)$ не используется и может быть получен из нее следующим достаточно простым рассуждением, которое опирается на тот очевидный факт, что группа $G(m,n)$ является HNN-расширением с проходной буквой a бесконечной циклической группы с порождающим b и связанными подгруппами, порождаемыми элементами b^m и b^n соответственно. Будем считать, что $m > 0$ и $m \leqslant |n|$.

Предположим сначала, что группа $G(m,n)$ $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема и потому подгруппа $\sigma_p(G(m,n))$ единична. Если $m = 1$, то (в обозначениях формулировки теоремы) $r = 0$ и $m_1 = 1$. Поскольку элемент b отличен от единицы, из пункта (1) теоремы вытекает, что $s = 0$, и, следовательно, $n = n_1 \equiv 1 \pmod p$.

Пусть $m > 1$. Так как порядок элемента b бесконечен, из пункта (1) теоремы следует, что $r = s$ и $m_1 \equiv n_1 \pmod p$. Поэтому в силу пункта (2) в группе $G(m,n)$ все коммутаторы вида $\left[a^k b^{p^r} a^{-k}, b\right]$ должны быть равны единице. Покажем, что тогда $m_1 = 1 = |n_1|$.

Действительно, если $m_1 > 1$, то элемент b^{p^r} не входит в подгруппу, порожденную элементом b^m. Кроме того, поскольку $|n| > 1$, элемент b не входит в подгруппу, порожденную элементом b^n. Поэтому запись

$$\left[a^{-1}b^{p^r}a, b\right] = a^{-1}b^{-p^r}ab^{-1}a^{-1}b^{p^r}ab$$

коммутатора $\left[a^{-1}b^{p^r}a, b\right]$ является приведенной в HNN-расширении $G(m,n)$, и потому этот коммутатор не может быть равным 1. Точно так же предположение $|n_1| > 1$ влечет невозможность равенства единице коммутатора $\left[ab^{p^r}a^{-1}, b\right]$.

Таким образом, имеем $m = p^r$ и $n = p^r\varepsilon$ для некоторого $\varepsilon = \pm 1$. Наконец, при $\varepsilon = -1$ сравнение $m_1 \equiv n_1 \pmod p$ дает $p = 2$.

Обратно, если $m = 1$ и $n \equiv 1 \pmod p$, то $r = s = 0$, и, поскольку $m_1 = 1$ и $n_1 = n$, выполнено сравнение $m_1 \equiv n_1 \pmod p$. Поэтому в данном случае подгруппа $\sigma_p(G(m,n))$ — нормальное замыкание множества элементов, указанного в пункте (2) теоремы. Так как при $m = 1$ нормальное замыкание в группе $G(m,n)$ элемента b является абелевой группой, все коммутаторы из этого множества равны 1. Поскольку, кроме того, $p^r u = m$ и $p^r v = n$, элемент $a^{-1}b^{p^r u}ab^{-p^r v}$ также равен 1. Следовательно, подгруппа $\sigma_p(G(m,n))$ совпадает с единичной, т. е. группа $G(m,n)$ $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема.

Если $m = n = p^r$ или $m = 2^r$ и $n = -2^r$, то очевидно, что подгруппа $\sigma_p(G(m,n))$ снова является нормальным замыканием множества элементов, указанного в пункте (2) теоремы, и что все эти элементы равны 1. Таким образом, в этих случаях группа $G(m,n)$ $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема и $\mathcal{F}_2$-аппроксимируема соответственно.

Укажем еще на одно различие в строении подгрупп $\sigma(G(m,n))$ и $\sigma_p(G(m,n))$ группы $G(m,n)$. Теорема 2 из статьи [2] утверждает, что если подгруппа $\sigma\,(G(m,n))$ группы $G(m,n)$ неединична, то она не может быть нормальным замыканием в группе $G(m,n)$ никакого конечного множества элементов этой группы. Из сформулированной здесь теоремы видно, что подгруппа $\sigma_p(G(m,n))$, напротив, может совпадать с нормальным замыканием одного неединичного элемента группы $G(m,n)$. Например, в группе $G(2,4)$ подгруппа $\sigma_2(G(2,4))$ является нормальным замыканием элемента b^2.

2. Переходя к доказательству теоремы (и считая фиксированными обозначения, введенные в ее формулировке), предположим сначала, что элементы b^m и b^n группы $G(m,n)$ не входят в некоторую нормальную подгруппу N конечного p-индекса этой группы. Тогда порядок по модулю N элемента b равен числу p^t, где $t > r, s$. Так как тогда порядки по модулю N элементов b^m и b^n равны числам p^{t-r} и p^{t-s} соответственно и так как эти элементы сопряжены, имеем $r = s$.

Следовательно, если $r \neq s$, то элементы b^m и b^n принадлежат каждой нормальной подгруппе конечного p-индекса группы $G(m,n)$, а потому порядок элемента b по модулю каждой нормальной подгруппы конечного p-индекса должен быть делителем чисел p^r и p^s. Иначе говоря, каждая нормальная подгруппа конечного p-индекса группы $G(m,n)$ содержит элемент b^{p^t}, где $t = \min\{r,s\}$.

Предположим теперь, что $r = s$. Очевидная индукция показывает, что тогда для любого целого числа $k \geqslant 0$ в группе $G(m,n)$ выполнено равенство

$$a^{-k}b^{p^r m_1^k}a^k = b^{p^r n_1^k}.$$

Пусть по модулю некоторой нормальной подгруппы N конечного p-индекса группы $G(m,n)$ порядки элементов a и b равны числам p^i и p^j соответственно. Тогда указанное выше равенство при $k = p^i$ дает сравнение

$$b^{p^r m_1^{p^i}} \equiv b^{p^r n_1^{p^i}} \pmod{N},$$

что равносильно сравнению

$$p^r m_1^{p^i} \equiv p^r n_1^{p^i} \pmod{p^j}.$$

Отсюда при $j > r$ получаем $m_1^{p^i} \equiv n_1^{p^i}\,(\mathrm{mod}\ p)$. Так как к тому же в силу теоремы Ферма $m_1^{p-1} \equiv n_1^{p-1}\,(\mathrm{mod}\ p)$ и числа p^i и $p-1$ взаимно просты, имеем $m_1 \equiv n_1\ (\mathrm{mod}\ p)$. Следовательно, если числа m_1 и n_1 не сравнимы по модулю p, то порядок элемента b по модулю каждой нормальной подгруппы конечного p-индекса делит число p^r.

Мы видим, таким образом, что если числа m и n удовлетворяют условиям пункта (1) формулировки теоремы, то в каждой нормальной подгруппе конечного p-индекса группы $G(m,n)$ содержится элемент b^{p^t}, где $t = \min\{r, s\}$, и, следовательно, подгруппа $\sigma_p(G(m,n))$ содержит нормальное замыкание в группе $G(m,n)$ этого элемента. Противоположное включение следует из того, что фактор-группа группы $G(m,n)$ по нормальному замыканию элемента b^{p^t} является свободным произведением бесконечной циклической группы и циклической группы порядка p^t, и потому $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема.

Далее будем считать, что $r = s$ и $m_1 \equiv n_1\ (\mathrm{mod}\ p)$. Отметим, что, поскольку $(d,p) = 1$, тогда имеет место и сравнение $u \equiv v\ (\mathrm{mod}\ p)$.

Очевидно, что для произвольной группы G имеет место включение $\sigma(G) \subseteq \sigma_p(G)$. Поэтому в силу предложения 1 подгруппа $\sigma_p(G(m,n))$ содержит все коммутаторы вида $\left[a^k b^{p^r d} a^{-k},\, b\right]$. Покажем, что в действительности подгруппе $\sigma_p(G(m,n))$ принадлежит любой коммутатор вида $\left[a^k b^{p^r} a^{-k},\, b\right]$.

Пусть N — снова произвольная нормальная подгруппа конечного p-индекса группы $G(m,n)$ и пусть порядок по модулю N элемента b равен числу p^t. Если $t \leqslant r$, включение $\left[a^k b^{p^r} a^{-k},\, b\right] \in N$ очевидно. Предположим, что $t > r$. Так как числа d и p^{t-r} взаимно просты, для некоторого целого x выполнено сравнение $dx \equiv 1\,(\mathrm{mod}\ p^{t-r})$. Отсюда

$$p^r dx \equiv p^r \pmod{p^t}$$

и потому $b^{p^r} \equiv (b^{p^r d})^x\,(\mathrm{mod}\ N)$. Следовательно,

$$\left[a^k b^{p^r} a^{-k},\, b\right] \equiv \left[(a^k b^{p^r d} a^{-k})^x,\, b\right] \equiv 1 \pmod{N},$$

и снова имеем $\left[a^k b^{p^r} a^{-k},\, b\right] \in N$.

Аналогичное рассуждение показывает, что для любой нормальной подгруппы N конечного p-индекса группы $G(m,n)$ из соотношения $a^{-1} b^m a = b^n$ следует сравнение $a^{-1} b^{p^r u} a \equiv b^{p^r v}\ (\mathrm{mod}\ N)$, т. е. включение $a^{-1} b^{p^r u} a b^{-p^r v} \in N$.

Таким образом, нормальное замыкание U множества, состоящего из элемента $a^{-1} b^{p^r u} a b^{-p^r v}$ и всевозможных коммутаторов $\left[a^k b^{p^r} a^{-k}, b\right]$, содержится в подгруппе $\sigma_p(G(m,n))$. Остается показать, что фактор-группа $\overline{G} = G(m,n)/U$ группы $G(m,n)$ по подгруппе U является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой.

Группа $\overline{G}$ имеет следующее задание порождающими и определяющими соотношениями:

$$\overline{G} = \langle a,\, b;\ a^{-1} b^{p^r u} a = b^{p^r v},\ \left[a^k b^{p^r} a^{-k},\, b\right] = 1\,(k \in \mathbb{Z})\rangle.$$

Поскольку числа u и v взаимно просты (и потому наибольший общий делитель чисел $p^r u$ и $p^r v$ равен p^r), мы можем воспользоваться необходимыми нам свойствами группы $\overline{G}$, установленными в [2]. Для произвольного целого числа i полагаем $c_i = a^i b^{p^r} a^{-i}$. Имеют место следующие утверждения:

Предложение 2 (см. [2, предложение 3]). *Подгруппа $\overline{C}$ группы $\overline{G}$, порождаемая элементами c_i $(i \in \mathbb{Z})$, в этой системе порождающих определяется соотношениями*

$$\big[c_i,\, c_j\big] = 1, \quad c_i^u = c_{i+1}^v \quad (i, j \in \mathbb{Z})$$

и является нормальной подгруппой группы $\overline{G}$. Фактор-группа $\overline{G}/\overline{C}$ является свободным произведением бесконечной циклической группы и циклической группы порядка p^r.

Предложение 3 (см. [2, предложение 4]). *Пусть для каждого целого числа $k > 0$ фиксирована пара целых чисел α_k и β_k таких, что*

$$\alpha_k v^{2k} + \beta_k u^{2k} = 1,$$

и пусть

$$e_k = c_{-k}^{\alpha_k} c_k^{\beta_k}.$$

Группа $\overline{C}$ порождается элементами $e_1,\, e_2,\, \ldots$ и в этой системе порождающих определяется соотношениями $e_k = e_{k+1}^{uv}$ $(k = 1,\, 2,\, \ldots)$.

Введем теперь в рассмотрение одно семейство гомоморфных образов группы $\overline{G}$.

Фиксируем целое число $s > 0$ и целое число t, удовлетворяющее сравнению $ut \equiv v \pmod{p^s}$. Очевидно, что взаимная простота чисел u и p обеспечивает существование t, а из сравнения $u \equiv v \pmod{p}$ следует сравнение $t \equiv 1 \pmod{p}$. Пусть

$$Y_s = \langle y;\ y^{p^{r+s}} = 1\rangle$$

— циклическая группа порядка p^{r+s}. Подгруппа Z группы Y_s, порожденная элементом $z = y^{p^r}$, порождается также и элементом z^t, причем отображение $z \mapsto z^t$ определяет автоморфизм этой подгруппы. Поэтому группа

$$Y_s^* = \langle x, y;\ y^{p^{r+s}} = 1,\ x^{-1} y^{p^r} x = y^{p^r t}\rangle$$

является HNN-расширением группы Y_s с проходной буквой x. Отметим, что так как $t \equiv 1 \pmod{p}$, то в силу следствия из теоремы 1 статьи [1] группа Y_s^* является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой.

Поскольку порядок элемента y^{p^r} группы Y_s равен p^s, из сравнения $ut \equiv v \pmod{p^s}$ следует, что $y^{p^r ut} = y^{p^r v}$, откуда имеем

$$x^{-1} y^{p^r u} x = y^{p^r ut} = y^{p^r v}.$$

Кроме того, так как для любого $k \geqslant 0$ в группе Y_s^* выполнены равенства

$$x^{-k} y^{p^r} x^k = y^{p^r t^k} \quad \text{и} \quad x^k y^{p^r} x^{-k} = y^{p^r (t')^k} \tag{*}$$

(где число t' удовлетворяет сравнению $tt' \equiv 1 \pmod{p^s}$), то произвольный коммутатор $\big[x^k y^{p^r} x^{-k},\, y\big]$ $(k \in \mathbb{Z})$ равен единице в группе Y_s^*. Поэтому отображение $a \mapsto x,\ b \mapsto y$ определяет гомоморфизм ρ_s группы $\overline{G}$ в группу Y_s^*.

Теперь мы готовы доказать $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемость группы $\overline{G}$. Для этого достаточно для любого неединичного элемента g этой группы указать гомоморфизм ее на $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемую группу, образ элемента g при котором отличен от единицы.

Поскольку свободное произведение $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемых групп является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группой, существование такого гомоморфизма для элемента g, не принадлежащего подгруппе $\overline{C}$, обеспечивается предложением 2.

Пусть $g \in \overline{C}$. В силу предложения 3 можно считать, что $g = e_k^l$ для некоторых целых чисел $k > 0$ и $l \neq 0$. Покажем, что если целое число $s > 0$ выбрано так, чтобы l не делилось на p^s, то образ элемента g при гомоморфизме ρ_s является неединичным элементом группы Y_s^*. Поскольку, как отмечено выше, группа Y_s^* $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема, доказательство $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости группы $\overline{G}$ будет этим закончено.

Так как

$$e_k = c_{-k}^{\alpha_k} c_k^{\beta_k} = a^{-k} b^{p^r \alpha_k} a^k \cdot a^k b^{p^r \beta_k} a^{-k},$$

из равенств (*) следует, что

$$g\rho_s = e_k^l \rho_s = y^{lp^r(\alpha_k t^k + \beta_k (t')^k)}.$$

Поэтому предположение о том, что $g\rho_s = 1$, означает делимость числа $lp^r(\alpha_k t^k + \beta_k(t')^k)$ на порядок p^{r+s} элемента y, откуда в силу выбора числа s следует сравнение

$$\alpha_k t^k + \beta_k (t')^k \equiv 0 \pmod p.$$

Так как из сравнений $ut \equiv v \pmod{p^s}$ и $tt' \equiv 1 \pmod{p^s}$ следуют сравнения $ut \equiv v \pmod p$ и $tt' \equiv 1 \pmod p$, умножив обе части сравнения $\alpha_k t^k + \beta_k(t')^k \equiv 0 \pmod p$ на число $t^k u^{2k}$ после очевидных преобразований получаем $\alpha_k v^{2k} + \beta_k u^{2k} \equiv 0 \pmod p$, что невозможно, поскольку $\alpha_k v^{2k} + \beta_k u^{2k} = 1$.

Теорема доказана.

Библиографический список

1. *Молдаванский Д. И.* Аппроксимируемость конечными p-группами HNN-расширений // Вестн. Иван. гос. ун-та. 2000. Вып. 3. С. 129—140.
2. *Молдаванский Д. И.* О пересечении подгрупп конечного индекса в группах Баумслага — Солитэра // Мат. заметки. 2010. Т. 87, № 1. С. 92—100.
3. *Молдаванский Д. И.* О пересечении подгрупп конечного индекса в некоторых обобщенных свободных произведениях групп // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер. : Естеств., обществ. науки. 2008. Вып. 2. С. 114—122.
4. *Baumslag G., Solitar D.* Some two-generator one-relator non-Hopfian groups // Bull. Amer. Math. Soc. 1962. Vol. 68. P. 199—201.
5. *Meskin S.* Nonresidually finite one-relator groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1972. Vol. 164. P. 105—114.