УДК 512.543

Д. Н. Азаров, Д. В. Гольцов

ПОЧТИ АППРОКСИМИРУЕМОСТЬ КОНЕЧНЫМИ p-ГРУППАМИ СВОБОДНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ДВУХ ГРУПП С КОНЕЧНЫМИ ОБЪЕДИНЕННЫМИ ПОДГРУППАМИ

Пусть G — свободное произведение групп A и B с конечными объединенными подгруппами H и K. Доказано, что если группы A и B почти аппроксимируемы конечными p-группами, то и группа G почти аппроксимируема конечными p-группами.

Ключевые слова: свободное произведение с объединенными подгруппами, почти аппроксимируемость конечными p-группами.

Let G be a free product of groups A and B with amalgamated finite subgroups H and K. It is proved that if A and B are virtually residually finite p-groups, then G is virtually residually a finite p-group.

Key words: free product with amalgamated subgroups, virtually residually a finite p-group.

1. Введение

Напомним,что группа G называется финитно аппроксимируемой (аппроксимируемой конечными p-группами), если для каждого неединичного элемента a группы G существует гомоморфизм φ группы G на конечную группу (на конечную p-группу), при котором образ элемента a отличен от 1. Группа G называется почти аппроксимируемой конечными p-группами, если она содержит подгруппу конечного индекса, аппроксимируемую конечными p-группами.

Пусть
$$G = (A * B; H = K, \varphi)$$
— свободное произведение групп A и B с подгруппами H и K, объединенными относительно изоморфизма $\varphi : H \to K$.

Если группы A и B финитно аппроксимируемы, а подгруппы H и K конечны, то группа G финитно аппроксимируема. Этот результат был получен в 1963 году Г. Баумслагом [4].

Если группы A и B аппроксимируемы конечными p-группами, а подгруппы H и K конечны, то группа G тогда и только тогда аппроксимируема конечными p-группами, когда в группах A и B существуют нормальные ряды

$$1 \leqslant A_0 \leqslant A_1 \leqslant \cdots \leqslant A_m = A$$

и

$$1 \leqslant B_0 \leqslant B_1 \leqslant \cdots \leqslant B_n = B$$

такие, что выполняются следующие три условия:

(1) для каждого $i \in \{1, ..., m\}$ фактор-группа A_i/A_{i-1} является конечной группой порядка p и $A_0 \cap H = 1$;

(2) для каждого $j \in \{1, ..., n\}$ фактор-группа B_j/B_{j-1} является конечной группой порядка p и $B_0 \cap K = 1$;

(3) изоморфизм φ отображает множество пересечений

$$A_0 \cap H,\ A_1 \cap H, \ldots, A_m \cap H$$

на множество пересечений

$$B_0 \cap K,\ B_1 \cap K, \ldots, B_n \cap K.$$

Этот результат был получен Д. Н. Азаровым в [1] и обобщает аналогичный результат Хигмана [6], относящийся к случаю, когда A и B — конечные p-группы.

Простые примеры показывают, что свободное произведение G двух групп A и B, аппроксимируемых конечными p-группами, с конечными объединенными подгруппами H и K само может не аппроксимироваться конечными p-группами. Тем не менее такое свободное произведение почти аппроксимируемо конечными p-группами. Это вытекает из следующего более общего результата.

Теорема 1. *Если группы A и B почти аппроксимируемы конечными p-группами, а подгруппы H и K конечны, то и группа G почти аппроксимируема конечными p-группами.*

Доказательство этой теоремы приведено в п. 2.

Классическим примером группы, почти аппроксимируемой конечными p-группами для каждого простого числа p, является любая полициклическая группа. Этот результат принадлежит А. Л. Шмелькину [3]. Поэтому непосредственным следствием теоремы 1 является следующее утверждение.

Теорема 2. *Если A и B — полициклические группы, а подгруппы H и K конечны, то группа G почти аппроксимируема конечными p-группами для каждого простого числа p.*

2. Доказательство теоремы 1

Пусть $G = (A * B;\ H = K, \varphi)$ — свободное произведение групп A и B с подгруппами H и K, объединенными относительно изоморфизма φ. Будем предполагать, что группы A и B почти аппроксимируемы конечными p-группами, а подгруппы H и K конечны. Покажем, что группа G почти аппроксимируема конечными p-группами.

Так как группа A почти аппроксимируема конечными p-группами, то в ней существует подгруппа U конечного индекса, аппроксимируемая конечными p-группами. Без потери общности можно считать, что подгруппа U нормальна в A. Очевидно, что любая группа, почти аппроксимируемая конечными p-группами, является финитно аппроксимируемой. Поэтому группа A финитно аппроксимируема. Отсюда и из того, что H — конечная подгруппа группы A, следует, что в группе A существует нормальная подгруппа V конечного индекса такая, что $V \cap H = 1$. Пусть $M = U \cap V$. Тогда M — нормальная подгруппа конечного индекса группы A, $M \cap H = 1$ и группа M аппроксимируема конечными p-группами.

Аналогично проверяется, что в группе B существует нормальная подгруппа N конечного индекса, являющаяся аппроксимируемой конечными p-группами и такая, что $N \cap K = 1$.

Так как $M \cap H = 1$ и $N \cap K = 1$, то отображение φ_{MN} подгруппы $HM/M = \{hM : h \in H\}$ группы A/M на подгруппу

$$KN/N = \{kN : k \in K\}$$

группы B/N, сопоставляющее каждому элементу hM из HM/M элемент $h\varphi N$ из KN/N, является изоморфизмом. Поэтому можно рассматривать свободное произведение

$$G_{MN} = (A/M * B/N;\ HM/M = KN/N, \varphi_{MN})$$

групп A/M и B/N с подгруппами HM/M и KN/N, объединенными относительно изоморфизма φ_{MN}. Так как группы A/M и B/N конечны, то группа G_{MN} финитно аппроксимируема [4].

Хорошо известно, что любые два гомоморфизма групп A и B в группу F, согласованные относительно φ, могут быть продолжены до гомоморфизма группы G в группу F. Поэтому можно рассмотреть гомоморфизм $\rho_{MN} : G \to G_{MN}$, продолжающий естественные гомоморфизмы групп A и B в группу G_{MN}. Тогда $a\rho_{MN} = aM$ и $b\rho_{MN} = bN$ для произвольных элементов a и b из подгрупп A и B соответственно.

Так как группа G_{MN} финитно аппроксимируема, а ее подгруппы A/M и B/N конечны, то существует гомоморфизм σ группы G_{MN} на конечную группу $\overline{G}$, инъективный на A/M и B/N. Тогда произведение $\rho_{MN}\sigma$ является гомоморфизмом группы G на конечную группу $\overline{G}$. Поэтому ядро L гомоморфизма $\rho_{MN}\sigma$ является нормальной подгруппой конечного индекса группы G.

Поскольку $A \cap \mathrm{Ker}\rho_{_{MN}} = M$ и σ инъективен на подгруппе $A\rho_{_{MN}} = A/M$, то $A \cap \mathrm{Ker}\rho_{_{MN}}\sigma = M$, т. е. $L \cap A = M$. Аналогично получается, что $L \cap B = N$.

Тогда $L \cap H = L \cap A \cap H = M \cap H = 1$. Отсюда и из того, что L — нормальная подгруппа группы G, следует, что L пересекается по единице со всеми сопряжениями к H в группе G. Поэтому в силу теоремы Х. Нейман (см. [2, с. 122]) подгруппа L раскладывается в свободное произведение свободной группы F и некоторых подгрупп вида

$$L \cap x^{-1}Ax = x^{-1}(L \cap A)x = x^{-1}Mx,$$

$$L \cap y^{-1}By = y^{-1}(L \cap B)y = y^{-1}Ny,$$

где $x, y \in G$.

Так как M и N аппроксимируемы конечными p-группами, то тем же свойством обладают и подгруппы $x^{-1}Mx$ и $y^{-1}Ny$. Свободная группа F также аппроксимируема конечными p-группами. Таким образом, группа L раскладывается в свободное произведение групп, аппроксимируемых конечными p-группами.

Грюнберг [5] доказал, что свободное произведение любого семейства групп, аппроксимируемых конечными p-группами, само аппроксимируется конечными p-группами. Поэтому группа L аппроксимируема конечными p-группами. Отсюда и из того, что L имеет конечный индекс в группе G, следует, что группа G почти аппроксимируема конечными p-группами. Теорема 1 доказана.

Библиографический список

1. *Азаров Д. Н.* О финитной аппроксимируемости свободных произведений групп с одной объединенной подгруппой // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38. С. 3—13.
2. *Линдон Р., Шупп П.* Комбинаторная теория групп. М. : Мир, 1980. 447 с.
3. *Шмелькин А. Л.* Полициклические группы // Сиб. мат. журн. 1968. Т. 9. С. 234—235.
4. *Baumslag G.* On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. Vol. 106, № 2. P. 193—209.
5. *Gruenberg K. W.* Residual properties of infinite soluble groups // Proc. London Math. Soc. 1957. Vol. 7. P. 29—62.
6. *Higman G.* Amalgams of p-groups // J. Algebra. 1964. Vol. 1. P. 301—305.