УДК 517.518.865

**А. С. Белов**

# ОБ ОДНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ

Для каждого натурального числа $n$ пусть $V_n$ есть единственный экстремальный тригонометрический полином экстремальной задачи о минимуме свободного члена четного неотрицательного тригонометрического полинома степени $n$, все коэффициенты которого, кроме свободного члена, не меньше $1$. В статье изучаются нули тригонометрического полинома $V_n$ и некоторые свойства последовательности полиномов $\{V_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$.

*Ключевые слова*: экстремальные тригонометрические полиномы, нули тригонометрического полинома.

For every positive integer $n$ let $V_n$ be unique extremal trigonometric polynomial of the extremal problem on the minimum of the constant term of even nonnegative trigonometric polynomial of the degree $n$, with all coefficients without constant term not less $1$. In the article the zeros of the trigonometric polynomial $V_n$ and some properties of the sequence of the polynomials $\{V_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ are studied.

*Key words*: extremal trigonometric polynomials, the zeros of the trigonometric polynomial.

## Введение

Пусть

$$c_k = \frac{(2k)!}{2^{2k}\,(k!)^2} \quad \text{при} \quad k \geqslant 0 \tag{1}$$

и четный неотрицательный тригонометрический полином

$$V_n(x) = \frac{1}{2}\Big|\sum_{k=0}^{n} c_{\min\{k,n-k\}}\, e^{ikx}\Big|^2 = \sum_{k=0}^{n} a_k^n\, \cos(kx) \tag{2}$$

задан для каждого натурального числа $n$. Условимся, что квадратные скобки далее обозначают целую часть. Автор [2, теорема 1] доказал, что

$$a_k^n = 1 \quad \text{при всех} \quad k = n - [n/2]\,, \ldots, n \tag{3}$$

и [2, формула (18)]

$$a_k^n = 1 + 2\sum_{j=0}^{m-k-1} c_j(c_{j+k} - c_{n-j-k}) \quad \text{при всех} \ \ k = 1, \ldots, m\,, \tag{4}$$

где $m = n - [n/2]$. Пусть

$$M(n) = \frac{1}{2}\Big(\sum_{k=0}^{[n/2]} c_k^2 + \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} c_k^2\Big) \quad \text{при} \quad n \geqslant 1\,. \tag{5}$$

Тогда [2, теорема 2]

$$a_0^n = M(n) \quad \text{при всех} \quad n \geqslant 1\,. \tag{6}$$

Формулы (3), (4) и (6), вместе с (1) и (5), позволяют изучать коэффициенты полинома (2). В частности, из формул (3) и (4) следует, что $a_k^n \geqslant 1$ при всех $k = 1, \ldots, n$. При натуральных $n$ положим

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} c_k \cos\Big(\Big(\frac{n}{2} - k\Big)\,x\Big) + \sum_{k=0}^{[n/2]} c_k \cos\Big(\Big(\frac{n}{2} - k\Big)\,x\Big)\,, \tag{7}$$

$$g_n(x) = \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} 2c_k \sin\Big(\Big(\frac{n}{2} - k\Big)\,x\Big) = \sum_{k=0}^{[n/2]} 2c_k \sin\Big(\Big(\frac{n}{2} - k\Big)\,x\Big)\,. \tag{8}$$

Тогда [2, § 4]

$$V_n(x) = \frac{1}{2}\,|\,f_n(x)\,|^2 \quad \text{при всех} \quad n \geqslant 1\,. \tag{9}$$

Формулы (7) и (9) позволяют легко выписывать полиномы (2). Например, $V_1(x) = 1 + \cos(x)$, $V_2(x) = \frac{9}{8} + \cos(x) + \cos(2x)$, $V_3(x) = \frac{5}{4}\,(1 + \cos(x)) + \cos(2x) + \cos(3x)$, $V_4(x) = \frac{169}{128} + \frac{11}{8}\,\cos(x)) + \cos(2x) + \cos(3x) + \cos(4x)$ и т. д.

Автором доказано [2, теорема 2], что верна

**Теорема A.** *Для каждого натурального $n$ и любого неотрицательного тригонометрического полинома*

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\,\cos(kx)\,, \tag{10}$$

*коэффициенты которого удовлетворяют условию*

$$a_k \geqslant 1 \qquad \text{при всех} \quad k = 1, \ldots, n \tag{11}$$

*и который отличен от полинома $V_n$, справедливо неравенство $a_0^n > M(n)$.*

Если через $\mathbb{W}_n$ обозначим совокупность всех неотрицательных тригонометрических полиномов $T_n$ вида (10), коэффициенты которых удовлетворяют условию (11), то теорема A означает, что для каждого натурального числа $n$ полином $V_n$ является единственным экстремальным полиномом экстремальной задачи

$$M(n) = \min\{\, a_0 : T_n \in \mathbb{W}_n \,\} = \min\Big\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T_n(x)\, dx : T_n \in \mathbb{W}_n \Big\}\,.$$

Из теоремы A [1, теорема 1] может быть выведена

**Теорема B.** *Пусть $n$ — произвольное натуральное число. Тогда для любого неотрицательного тригонометрического полинома*

$$T_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (\, a_k \, \cos(kx) + b_k \, \sin(kx)\, )$$

*справедлива оценка*

$$\min_{1 \leqslant k \leqslant n} (\, a_k^2 + b_k^2 \,)^{1/2} \leqslant \frac{1}{M(n)}\, a_0\,. \tag{12}$$

Если в качестве полинома $T_n$ в теореме B взять тригонометрический полином $V_n(x)$, то неравенство (12) превращается в равенство, т. е. постоянная $1/M(n)$ в оценке (12) является точной.

Таким образом, для любых действительных чисел $r_1 \geqslant 1\,, \ldots, r_n \geqslant 1\,,$ $\varphi_1\,, \ldots, \varphi_n$ верно неравенство

$$-\min_x \sum_{k=1}^{n} r_k \, \cos(\, kx + \varphi_k \,) \geqslant M(n)\,, \tag{13}$$

причем постоянная $M(n)$ в оценке (13) является точной.

Теоремы A и B показывают, что представляет интерес более тщательное изучение последовательности неотрицательных тригонометрических полиномов $\{V_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, чему и посвящена эта статья.

Автор доказал [2, теорема 2], что для каждого натурального числа $n$ полином $V_n$ имеет на сегменте $[0, \pi]$ ровно $m = n - [n/2]$ нулей

$$0 < x_1^n < \cdots < x_m^n \leqslant \pi\,, \tag{14}$$

причем каждый из этих нулей двойной кратности. Более того,

$$x_j^n \in \Big( \frac{\pi\,(2j-1)}{n+1/2}\,, \frac{2\pi\, j}{n+1/2} \Big) \quad \text{при всех} \quad j = 1, \ldots, m\,, \tag{15}$$

причем нуль $x_m^n = \pi$ при $n = 2m-1$, а при $n = 2m$ нуль $x_m^n < \pi$. Например, $x_1^1 = \pi$, $x_1^2 = \arccos(-1/4)$, $x_1^3 = \arccos(1/4)$, $x_2^3 = \pi$ и т. д. Из сказанного [2, формулы (22) и (23)] следует, что при всех натуральных $n$ верно разложение

$$V_n(x) = 2^{n-1} \prod_{k=1}^{[n/2]} (\cos x - \cos x_k^n) \prod_{k=1}^{[(n+1)/2]} (\cos x - \cos x_k^n).$$

В § 1 мы уточним расположение нулей (14) полинома (2). Будет доказана

**Теорема 1.** *Для каждого натурального $n$ нули* (14) *полинома $V_n$ удовлетворяют условиям*

$$x_j^n \in \left( \frac{\pi\,(2j-1)}{n+1/2}, \frac{2\pi\, j}{n+1} \right) \quad \textit{при всех} \quad j = 1, \ldots, [n/2]. \tag{16}$$

В § 2 мы рассмотрим нули полиномов $V_n$ и $V_{n+1}$ вместе. Здесь будет доказана

**Теорема 2.** *Если натуральное $n = 2m$, то*

$$0 < x_1^{n+1} < x_1^n < x_2^{n+1} < \cdots < x_m^n < x_{m+1}^{n+1} = \pi. \tag{17}$$

*Если $n = 2m-1$, то*

$$0 < x_1^{n+1} < x_1^n < x_2^{n+1} < x_2^n < \cdots < x_{m-1}^n < x_m^{n+1} < x_m^n = \pi. \tag{18}$$

Таким образом, нули полиномов $V_n$ при возрастании $n$ чередуются. Положим

$$\psi(n) = \sum_{k=1}^{n} a_k^n = V_n(0) - M(n) \quad \text{при} \quad n \geqslant 1. \tag{19}$$

В частности, $\psi(1) = 1$, $\psi(2) = 2$, $\psi(3) = 3 + 1/4$ и т. д.

В § 3 изучается поведение функций $V_n(0)$, $M(n)$ и $\psi(n)$. В частности, будет доказана

**Теорема 3.** *Для каждого натурального $n$ и $m = n - [n/2]$ справедливы равенства*

$$f_n(0) = (3m + 1 + [n/2])\, c_m, \tag{20}$$

$$V_n(0) = \frac{1}{2} \left( 3m + 1 + \left[ \frac{n}{2} \right] \right)^2 c_m^2, \tag{21}$$

$$V_{n+1}(0) - V_n(0) = \left( 3m + \frac{3}{2} + \left[ \frac{n}{2} \right] \right) c_m^2\,, \tag{22}$$

$$M(n+1) - M(n) = \frac{1}{2}\, c_m^2\,, \tag{23}$$

$$\psi(n+1) - \psi(n) = (3m + 1 + [n/2])\, c_m^2 \tag{24}$$

*и верны оценки*

$$\psi(n+1) - \psi(n) \geqslant 1\,, \tag{25}$$

$$\psi(n+1) - \psi(n) < \frac{4}{\pi}\,. \tag{26}$$

Теперь перейдем к доказательствам сформулированных теорем.

## § 1. О нулях полинома $V_n$

Пусть $n$ — произвольное натуральное число и $m = n - [n/2]$. Положим

$$t_n(x) = \sum_{k=1}^{m} (c_{k-1} - c_k)\, \sin(kx)$$

и

$$u_n(x) = c_m + \sum_{k=1}^{m} (c_{k-1} - c_k)\,(1 - \cos(kx))\,.$$

Из (1) следует, что

$$c_{k-1} - c_k = \frac{c_{k-1}}{2k} = \frac{c_k}{(2k-1)} > 0 \quad \text{при всех} \quad k \geqslant 1\,. \tag{1.1}$$

Полином

$$u_n(x) \geqslant c_m > 0 \quad \text{для всех} \quad x\,. \tag{1.2}$$

При всех $x \in (0,\pi)$ из (1.1) имеем

$$2t_n(x) = \sum_{k=1}^{m} c_{k-1}\, \frac{\sin(kx)}{k} = \sum_{k=1}^{m} (c_{k-1} - c_k) \sum_{j=1}^{k} \frac{\sin(jx)}{j} + \\ + c_m \sum_{j=1}^{m} \frac{\sin(jx)}{j} > 0\,,$$

поскольку [3, гл. 2, теорема 9.4, с. 106] при таких значениях $x$ верна оценка $\sum_{j=1}^{k} \sin(jx)/j > 0$ при всех $k \geqslant 1$. Таким образом,

$$t_n(x) > 0 \quad \text{при всех} \quad x \in (0,\pi)\,. \tag{1.3}$$

Делая преобразование Абеля, из (7) и (8) имеем

$$\begin{aligned} &\sin\Big(\frac{x}{2}\Big)\, f_n(x) = \\ &= c_0\, \sin\Big(\frac{(n+1)}{2}\, x\Big) - \sum_{k=1}^{m} (c_{k-1} - c_k)\, \sin\Big(\Big(\frac{n+1}{2} - k\Big)x\Big) = \\ &= \sin\Big(\frac{(n+1)}{2}\, x\Big)\, u_n(x) + \cos\Big(\frac{(n+1)}{2}\, x\Big)\, t_n(x) \end{aligned} \tag{1.4}$$

и

$$\begin{aligned} &\sin\Big(\frac{x}{2}\Big)\, g_n(x) - c_m\, \cos\Big(\Big(\frac{n+1}{2} - m\Big)x\Big) = \\ &= -c_0\, \cos\Big(\frac{(n+1)}{2}\, x\Big) + \sum_{k=1}^{m} (c_{k-1} - c_k)\, \cos\Big(\Big(\frac{n+1}{2} - k\Big)x\Big) = \\ &= \sin\Big(\frac{(n+1)}{2}\, x\Big)\, t_n(x) - \cos\Big(\frac{(n+1)}{2}\, x\Big)\, u_n(x)\,. \end{aligned} \tag{1.5}$$

При доказательстве этих равенств лучше отдельно рассмотреть случаи $n = 2m-1$ и $n = 2m$.

**Доказательство теоремы 1.** Из (1.4) при $x = 2\pi k/(n+1)$ получаем

$$\sin\Big(\frac{\pi k}{n+1}\Big)\, f_n\Big(\frac{2\pi k}{n+1}\Big) = (-1)^k\, t_n\Big(\frac{2\pi k}{n+1}\Big)\,.$$

Следовательно, из (1.3) имеем

$$(-1)^k\, f_n\Big(\frac{2\pi k}{n+1}\Big) > 0 \quad \text{при всех} \quad k = 1\,,\, \ldots,\, [n/2]\,. \tag{1.6}$$

Из (1.4) при $x = \pi(2k-1)/(n+1)$ получаем

$$\sin\Big(\frac{\pi(2k-1)}{2(n+1)}\Big)\, f_n\Big(\frac{\pi(2k-1)}{n+1}\Big) = (-1)^{k-1}\, u_n\Big(\frac{\pi(2k-1)}{n+1}\Big)\,.$$

Отсюда и из (1.2) выводим, что

$$(-1)^{k-1}\, f_n\Big(\frac{\pi(2k-1)}{n+1}\Big) > 0 \quad \text{при всех} \quad k = 1\,,\, \ldots,\, n+1\,. \tag{1.7}$$

Из (1.6) и (1.7) вытекает, что при всех $k = 1\,, \ldots,\, [n/2]$ существует такая точка

$$x_k^n \in \Big(\, \frac{\pi(2k-1)}{n+1}\,,\, \frac{2\pi k}{n+1}\, \Big)\,,$$

что $f_n(x_k^n) = 0$. Положим $x_m^{2m-1} = \pi$. Тогда у $f_n(x)$ найдены $m$ нулей на $(0, \pi]$. Поскольку большего числа нулей у $f_n(x)$ быть не может, то найдены все нули и $x_k^n < 2\pi k/(n+1)$ при всех $k = 1, \ldots, [n/2]$. Отсюда и из (15) получаем (16). Теорема 1 доказана.

**Лемма 1.1.** *Для каждого натурального числа $n$ и $m = n - [n/2]$ справедливы оценки*

$$(-1)^{k-1}\, g_n(x_k^n) > 0 \quad \textit{при всех} \quad k = 1, \ldots, m \tag{1.8}$$

*и*

$$(-1)^{k-1}\left(\sin\Big(\frac{x_k^n}{2}\Big)\, g_n(x_k^n) - c_m\, \cos\Big(\Big(\frac{n+1}{2} - m\Big) x_k^n\Big)\right) > 0 \tag{1.9}$$

*при всех $k = 1, \ldots, m$.*

*Доказательство.* При всех $k = 1, \ldots, m$ из (1.4) видим, что верно равенство

$$(-1)^{k-1}\, \sin\Big(\frac{(n+1)}{2}\, x_k^n\Big)\, u_n(x_k^n) = (-1)^k\, \cos\Big(\frac{(n+1)}{2}\, x_k^n\Big)\, t_n(x_k^n)\,.$$

Отсюда, из (1.2), (1.3) и (16) получаем

$$(-1)^k\, \cos\Big(\frac{(n+1)}{2}\, x_k^n\Big) = u_n(x_k^n)\, (u_n^2(x_k^n) + t_n^2(x_k^n))^{-1/2}$$

и

$$(-1)^{k-1}\, \sin\Big(\frac{(n+1)}{2}\, x_k^n\Big) = t_n(x_k^n)\, (u_n^2(x_k^n) + t_n^2(x_k^n))^{-1/2}\,.$$

Поэтому из (1.5) имеем

$$\begin{aligned}(-1)^{k-1}\left(\sin\Big(\frac{x_k^n}{2}\Big)\, g_n(x_k^n) - c_m\, \cos\Big(\Big(\frac{n+1}{2} - m\Big) x_k^n\Big)\right) &= \\ = (u_n^2(x_k^n) + t_n^2(x_k^n))^{1/2}\end{aligned} \tag{1.10}$$

при всех $k = 1, \ldots, m$. Этим в силу (1.2) доказано (1.9).

Поскольку верна оценка

$$u_n(x) > c_m \geqslant c_m \left|\cos\Big(\Big(\frac{n+1}{2} - m\Big) x\Big)\right| \quad \text{для всех} \quad x \in (0, \pi]\,,$$

то из (1.10) получаем

$$\begin{aligned}(-1)^{k-1}\, \sin\Big(\frac{x_k^n}{2}\Big)\, g_n(x_k^n) &= (u_n^2(x_k^n) + t_n^2(x_k^n))^{1/2} - \\ &- (-1)^k\, c_m\, \cos\Big(\Big(\frac{n+1}{2} - m\Big) x_k^n\Big) > 0\end{aligned}$$

при всех $k = 1, \ldots, m$. Значит, (1.8) доказано. Лемма 1.1 полностью доказана.

## § 2. О чередовании нулей полиномов $V_n$ и $V_{n+1}$

Далее потребуется следующая

**Лемма 2.1.** *При всех натуральных* $n$, $m = n - [n/2]$ *и всех* $x$ *верны равенства*

$$f_n(x) + f_{n+2}(x) = (c_{[n/2]+1} - c_m) + 2\cos\Big(\frac{x}{2}\Big) f_{n+1}(x), \tag{2.1}$$

$$g_n(x) - g_{n+2}(x) = -2\sin\Big(\frac{x}{2}\Big) f_{n+1}(x), \tag{2.2}$$

$$f_{n+1}(x) = \cos\Big(\frac{x}{2}\Big) f_n(x) - \sin\Big(\frac{x}{2}\Big) g_n(x) + c_m \cos\Big(\Big(\frac{n+1}{2} - m\Big)x\Big). \tag{2.3}$$

*Доказательство.* Заметим, что $m = [(n+1)/2]$. Из (7) и (8), отдельно рассматривая случаи $n = 2m-1$ и $n = 2m$, имеем

$$\begin{aligned}
&f_n(x) + f_{n+2}(x) - 2\cos\Big(\frac{x}{2}\Big) f_{n+1}(x) = \\
&= c_m \cos\Big(\Big(\frac{n+2}{2} - m\Big)x\Big) + c_{[n/2]+1}\cos\Big(\Big(\frac{n}{2} - \Big[\frac{n}{2}\Big]\Big)x\Big) - \\
&- 2\cos\Big(\frac{x}{2}\Big) c_m \cos\Big(\Big(\frac{n+1}{2} - m\Big)x\Big) = c_{[n/2]+1} - c_m,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&g_n(x) - g_{n+2}(x) + 2\sin\Big(\frac{x}{2}\Big) f_{n+1}(x) = -2\,c_m \sin\Big(\Big(\frac{n+2}{2} - m\Big)x\Big) + \\
&+ 2\sin\Big(\frac{x}{2}\Big)\Big(\Big[\frac{n}{2}\Big] - m + 2\Big) c_m \cos\Big(\Big(\frac{n+1}{2} - m\Big)x\Big) = 0
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
&2\sin\Big(\frac{x}{2}\Big) g_n(x) - 2\cos\Big(\frac{x}{2}\Big) f_n(x) + 2 f_{n+1}(x) = \\
&= -2\cos\Big(\frac{x}{2}\Big)\Big(\Big[\frac{n}{2}\Big] - m + 1\Big) c_m \cos\Big(\Big(\frac{n}{2} - m\Big)x\Big) + \\
&+ 2\,c_m\Big(\Big[\frac{n}{2}\Big] - m + 2\Big)\cos\Big(\Big(\frac{n+1}{2} - m\Big)x\Big) = \\
&= 2\,c_m \cos\Big(\Big(\frac{n+1}{2} - m\Big)x\Big),
\end{aligned}$$

т. е. равенства (2.1), (2.2) и (2.3). Лемма 2.1 доказана.

**Доказательство теоремы 2.** Доказательство неравенств (17) и (18) проведем индукцией по $m$. При $m = 1$ неравенства (18) очевидно верны. Пусть при некотором натуральном $m$ неравенства (18) справедливы при $n = 2m - 1$, т. е.

$$0 < x_1^{2m} < x_1^{2m-1} < x_2^{2m} < \cdots < x_m^{2m} < x_m^{2m-1} = \pi\,. \tag{2.4}$$

Из (2.1) следует, что $f_{2m-1}(x_k^{2m}) + f_{2m+1}(x_k^{2m}) = 0$ при всех $k = 1\,,\,\ldots,\,m$. Поскольку $(-1)^{k-1} f_{2m-1}(x) > 0$ при $x \in (x_{k-1}^{2m-1}\,, x_k^{2m-1})$, $k = 2\,,\,\ldots,\,m$, то из (2.4) вытекает, что $(-1)^k f_{2m+1}(x_k^{2m}) = (-1)^{k-1} f_{2m-1}(x_k^{2m}) > 0$ при всех $k = 1\,,\,\ldots,\,m$. Так как $f_{2m+1}(0) > 0$, то на каждом из интервалов $(0\,, x_1^{2m})$ и $(x_{k-1}^{2m}\,, x_k^{2m})$, $k = 2\,,\,\ldots,\,m$, находится нуль функции $f_{2m+1}$. Значит, $x_1^{2m+1} \in (0\,, x_1^{2m})$ и $x_k^{2m+1} \in (x_{k-1}^{2m}\,, x_k^{2m})$, $k = 2\,,\ldots,\,m$, поскольку других нулей у функции $f_{2m+1}$ на интервале $(0\,,\pi)$ нет. Следовательно, при $n = 2m$ верно (17).

Теперь предположим, что верно (17) при некотором $n = 2m$, т. е.

$$0 < x_1^{2m+1} < x_1^{2m} < x_2^{2m+1} < \cdots < x_m^{2m} < x_{m+1}^{2m+1} = \pi\,. \tag{2.5}$$

Из (2.1) получаем, что

$$f_{2m}(x_k^{2m+1}) + f_{2m+2}(x_k^{2m+1}) = c_{m+1} - c_m\,.$$

А так как в силу (2.5) имеем $(-1)^{k-1} f_{2m}(x_k^{2m+1}) > 0$ при всех $k = 1\,,\,\ldots,\,m+1$, то

$$f_{2m+2}(x_k^{2m+1}) < 0 \quad \text{при нечетных} \quad k \in \{1\,,\,\ldots,\,m+1\}\,. \tag{2.6}$$

Из (2.3) видим, что

$$f_{2m+2}(x_k^{2m+1}) = -\sin\Big(\frac{1}{2}\,x_k^{2m+1}\Big)\,g_{2m+1}(x_k^{2m+1}) + c_{m+1}\,.$$

Отсюда и из (1.8) вытекает, что

$$f_{2m+2}(x_k^{2m+1}) > 0 \quad \text{при четных} \quad k \in \{1\,,\,\ldots,\,m+1\}\,.$$

Эти оценки вместе с оценками (2.6) показывают, что на каждом из интервалов $(0\,, x_1^{2m+1})$ и $(x_{k-1}^{2m+1}\,, x_k^{2m})$, $k = 2\,,\,\ldots,\,m+1$, находится нуль функции $f_{2m+2}$. Поскольку других нулей у функции $f_{2m+2}$ на $(0\,,\pi]$ нет, то $x_1^{2m+2} \in (0\,, x_1^{2m+1})$ и $x_k^{2m+2} \in (x_{k-1}^{2m+1}\,, x_k^{2m+1})$, $k = 2\,,\,\ldots,\,m+1$. Следовательно, верно (18) при $n = 2m+1$. В силу принципа математической индукции теорема 2 полностью доказана.

## § 3. Доказательство теоремы 3

Из (1) и (1.1) индукцией по натуральным $q$ сразу получаем равенство

$$\sum_{k=1}^{q-1} c_k = 2q\, c_q \quad \text{при всех} \quad q \geqslant 1\,. \tag{3.1}$$

**Доказательство теоремы 3.** Пусть $n$ — произвольное натуральное число и $m = n - [n/2]$. Из (7) и (3.1), рассматривая отдельно случаи $n = 2m-1$ и $n = 2m$, имеем

$$f_n(0) = 2\sum_{k=0}^{m-1} c_k + \Big(\Big[\frac{n}{2}\Big] - m + 1\Big)\, c_m = \Big(3m + 1 + \Big[\frac{n}{2}\Big]\Big)\, c_m\,.$$

Этим (20) доказано. Из (20) и (9) сразу следует (21). Из (21) и (1.1) вытекает, что $V_{2m-1}(0) = 8\,m^2\, c_m^2$, $V_{2m}(0) = (8\,m^2 + 4m + 1/2)\, c_m^2$, $V_{2m+1}(0) = 8\,(m+1)^2\, c_{m+1}^2 = 2\,(2m+1)^2\, c_m^2 = (8\,m^2 + 8m + 2)\, c_m^2$. Отсюда сразу получаем (22). Равенство (23) немедленно вытекает из (5). Из (19), (21) и (23) имеем

$$\psi(n+1) - \psi(n) = \Big(3m + \frac{3}{2} + \Big[\frac{n}{2}\Big]\Big)\, c_m^2 - \frac{1}{2}\, c_m^2\,,$$

т. е. (24). В частности,

$$4\,m\, c_m^2 \leqslant \psi(n+1) - \psi(n) \leqslant (4m+1)\, c_m^2\,. \tag{3.2}$$

Так как в силу (1.1) при каждом натуральном $k$ имеем

$$\frac{c_k^2}{c_{k-1}^2} = \Big(1 - \frac{1}{2k}\Big)^2 = 1 - \frac{1}{k} + \frac{1}{4k^2} > \frac{k-1}{k}$$

и

$$\frac{(4k+1)\, c_k^2}{(4k-3)\, c_{k-1}^2} = \Big(1 - \frac{1}{k} + \frac{1}{4k^2}\Big)\, \frac{(4k+1)}{(4k-3)} > 1\,,$$

то

$$4k\, c_k^2 > 4(k+1)\, c_{k-1}^2 \;\text{ и }\; (4k+1)\, c_k^2 > (4k-3)\, c_{k-1}^2 \quad \text{при всех} \quad k \geqslant 1\,. \tag{3.3}$$

Поэтому $4m\, c_m^2 \geqslant 4\, c_1^2 = 1$ и из (3.2) получаем (25). Из известной формулы Стирлинга следует, что $(4k+1)\, c_k^2 \to 4/\pi$ при $k \to \infty$. Поэтому из (3.3) получаем, что $(4m+1)\, c_m^2 < 4/\pi$. Отсюда и из (3.2) вытекает (26). Теорема 3 полностью доказана.

**Замечание.** Доказанная теорема 3 позволяет получить асимптотическое поведение функций $V_n(0)$, $M(n)$ и $\psi(n)$, когда $n$ стремится к бесконечности. Оказывается, справедливы соотношения

$$V_n(0) = \frac{2(2n+1)}{\pi} - \frac{(-1)^n}{\pi\,(2n+1)} + O\Big(\frac{1}{n^3}\Big),$$

$$M(n) = \frac{1}{\pi}\ln\Big(n+\frac{1}{2}\Big) + \frac{(C_0 + 3\ln 2)}{\pi} - \frac{(1+(-1)^n\,12)}{48\pi\,n^2} + O\Big(\frac{1}{n^3}\Big),$$

где абсолютная постоянная

$$C_0 = \lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\Big)$$

— известная постоянная Эйлера,

$$\psi(n) = \frac{2(2n+1)}{\pi} - \frac{1}{\pi}\ln\Big(n+\frac{1}{2}\Big) - \frac{(C_0+3\ln 2)}{\pi} -$$
$$- \frac{(-1)^n}{\pi\,(2n+1)} + \frac{(1+(-1)^n\,12)}{12\pi\,(2n+1)^2} + O\Big(\frac{1}{n^3}\Big),$$

$$\psi(n+1)-\psi(n) = \frac{4}{\pi}\Big(1 + \frac{((-1)^n-1)}{4n} + \frac{(2-3(-1)^n)}{8\,n^2}\Big) + O\Big(\frac{1}{n^3}\Big).$$

## Библиографический список


1. *Белов А. С.* Некоторые свойства и оценки для неотрицательных тригонометрических полиномов // Изв. РАН. Сер. мат. 2003. № 4. С. 3—20.
2. *Белов А. С.* Об одной экстремальной задаче о минимуме тригонометрического полинома // Там же. 1993. Т. 57, № 6. С. 212—226.
3. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. М. : Мир, 1965. Т. 1. 616 с.