УДК 517.53+517.98

С. В. Колесников

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ В ПРОСТРАНСТВЕ H_1

Доказывается достаточное условие существования экстремальных функций для ограниченных функционалов в пространстве H_1. Полученный результат используется для доказательства некоторого утверждения о плохо приближаемых функциях в пространстве H_∞.

Ключевые слова: плохо приближаемая функция, экстремальные задачи в пространстве H_1.

A sufficient condition of existence for extremal function of bounded functionals in the space H_1 is proved. This condition is used for a proof of a certain proposition about badly approximable functions in H_∞.

Key words: badly approximable function, extremal problems in H_1.

Пусть D — единичный круг $|z| < 1$, Γ — единичная окружность $|z| = 1$, $L_\infty(\Gamma)$ — пространство измеримых ограниченных комплекснозначных функций на Γ с нормой $||\cdot||_\infty$, равной существенному супремуму модуля функции, H_p, $0 < p \leqslant \infty$, — пространства Харди аналитических в D функций. Радиальные пределы функций $g(z) \in H_p$ в точках $\zeta \in \Gamma$ также будем обозначать через $g(\zeta)$, а подпространство пространства L_p, состоящее из всех граничных функций для функций из H_p — через $H_p(\Gamma)$.

Функция $f(\zeta) \in L_\infty(\Gamma)$ называется плохо приближаемой в пространстве $H_\infty(\Gamma)$, если $||f - g||_\infty \geqslant ||f||_\infty$ для любой функции $g \in H_\infty(\Gamma)$. Функцию $f(\zeta)$ будем называть приближаемой в точке $\zeta_0 \in \Gamma$, если существует такая функция $q \in H_\infty(\Gamma)$, что на некоторой открытой дуге γ окружности Γ, содержащей эту точку, почти всюду выполняется неравенство $|f(\zeta) - q(\zeta)| \leqslant \rho < ||f||_\infty$. В противном случае будем говорить, что f плохо приближаема в точке ζ_0.

Пусть $f \in L_\infty(\Gamma)$ и Φ — функционал в пространстве $H_1(\Gamma)$, определяемый равенством

$$\Phi(q) = \int_\Gamma f(e^{it})q(e^{it})dt.$$

(Ниже под интегралом $\int_E f(\zeta)d\zeta$ по некоторому множеству $E \subset \Gamma$ понимается интеграл Лебега $\int_{\tilde{E}} f(e^{it})ie^{it}dt$, где $\tilde{E} = \{t : 0 \leqslant t < 2\pi,\ e^{it} \in E\}$, а под $\int_E f(\zeta)|d\zeta|$ понимается интеграл $\int_{\tilde{E}} f(e^{it})dt$.)

Очевидно, Φ является ограниченным линейным функционалом на $L_1(\Gamma)$ и его норма удовлетворяет неравенству $||\Phi|| \leqslant ||f||_\infty$.

Ниже доказывается следующая теорема.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 11-01-00952а).

Теорема 1. *Если функция $f \in L_\infty$ плохо приближаема в $H_\infty(\Gamma)$, $|f(\zeta)| = 1$ почти всюду на Γ и $f(\zeta)$ приближаема в каждой точке окружности Γ, то существует такая функция $F(\zeta) \in H_1(\Gamma)$, $F(0) = 0$, что $||F||_1 = 1$ и*

$$|\Phi(F)| = \int_\Gamma f(e^{it})F(e^{it})dt = 1.$$

Для доказательства нам потребуется следующая лемма, аналогичная лемме 4.5 из [1] и имеющая вполне аналогичное доказательство.

Лемма 1. *Пусть γ, γ_1 — открытые дуги окружности Γ и $\overline{\gamma}_1 \subset \gamma$. Если $E_n \subset \gamma_1$, $n = 1, 2, \ldots$ — измеримые множества такие, что их меры Лебега $|E_n|$ стремятся к нулю при $n \to 0$, то существуют последовательность функций $\phi_n(z) \in H_\infty$ и последовательность чисел $\varepsilon_n > 0$, $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$, такие, что*

(i) $|\phi_n(z)| \leqslant 1$, $|1 - \phi_n(z)| \leqslant 1$ почти всюду на Γ;

(ii) $|\phi_n(z)| \leqslant \varepsilon_n$ почти всюду на $\Gamma \setminus \gamma$;

(iii) $|1 - \phi_n(z)| \leqslant \varepsilon_n$ почти всюду на E_n;

(iiii) $|\phi_n(z)| + |1 - \phi_n(z)| \leqslant 1 + \varepsilon_n$ почти всюду на Γ.

Доказательство. Пусть $q_n(z)$ — интеграл Шварца от характеристической функции множества E_n:

$$q_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{E_n} \frac{\zeta + z}{\zeta - z}\frac{d\zeta}{\zeta},\ n = 1, 2, \ldots.$$

Известно, что $q_n(z)$ имеет почти во всех точках $\zeta \in \Gamma$ угловые граничные пределы $q_n(\zeta)$. Так как $\operatorname{Re} q_n(z)$ является интегралом Пуассона характеристической функции множества E_n, то $\operatorname{Re} q_n(z) \geqslant 0$ при $z \in D$, причем $\operatorname{Re} q_n(\zeta) = 1$ почти всюду на E_n и $\operatorname{Re} q_n(\zeta) = 0$ почти всюду на $\Gamma \setminus E_n$. Кроме того, на дуге $\Gamma \setminus \gamma$ имеем оценку

$$|q_n(z)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{E_n} \frac{2}{|\zeta - z|}|d\zeta| \leqslant \frac{|E_n|}{\pi s}, \tag{1}$$

где s — кратчайшее расстояние от дуги $\Gamma \setminus \gamma$ до дуги γ_1.

Выберем последовательность положительных чисел $K_n \to \infty$ таких, что $|E_n|K_n \to 0$, и последовательность положительных чисел $\alpha_n < 1$, $n = 1, 2, \ldots$, стремящуюся к нулю настолько медленно, что $\lim_{n\to\infty}(|E_n|K_n)^{\alpha_n} = 0$. Положим $\varepsilon_n = \max\{1/K_n + \alpha_n,\ (|E_n|K_n)^{\alpha_n}/s^{\alpha_n}\}$.

Так как $\operatorname{Re} q_n(\zeta) \geqslant 0$, то все значения функции $K_n q_n/(1+K_n q_n)$ принадлежат кругу $z:\ |z - 1/2| \leqslant 1/2$, лежащему в правой половине круга $\overline{D}$. Отсюда следует, что функция

$$\varphi_n(z) = (K_n q_n/(1 + K_n q_n))^{\alpha_n}$$

принимает значения из сектора $S = z : |z| < 1, |\arg z| \leqslant \pi\alpha_n/2$. Этот сектор находится и в круге D, и в круге радиуса 1 с центром в точке $z = 1$, поэтому для функции $\varphi_n(z)$ выполняется пункт (i) леммы 1. Нетрудно видеть, что сектор S лежит в эллипсе $|z| + |z-1| \leqslant 1 + \alpha_n$ с фокусами в точках 0 и 1. Отсюда следует пункт (iiii) леммы. Для доказательства (iii) заметим, что если имеется равенство $\operatorname{Re} q_n(z) = 1$, то

$$|\frac{K_n q_n(z)}{1 + K_n q_n(z)}| \geqslant \left|1 - \frac{1}{1 + K_n q_n(z)}\right| \geqslant 1 - \frac{1}{K_n}.$$

Так как $\alpha_n < 1$, то по определению функции φ_n имеем $|\varphi_n(z)| > 1 - \frac{1}{K_n}$. Отсюда

$$|1 - \varphi_n(z)| \leqslant \operatorname{Re}(1 - \varphi_n(z)) + \operatorname{Im}(1 - \varphi_n(z)) \leqslant$$

$$1 - |\varphi_n(z)| + \alpha_n \leqslant \frac{1}{K_n} + \alpha_n \leqslant \varepsilon_n.$$

Наконец, пункт (ii) выполняется, так как из определения функции φ_n и неравенства (1) следует, что почти всюду на $\Gamma \setminus \gamma$ имеет место неравенство

$$|\varphi_n(z)| \leqslant \frac{(|E_n|K_n)^{\alpha_n}}{s^{\alpha_n}} \leqslant \varepsilon_n.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. По теореме двойственности [1, гл. IV, теорема 1.3] имеет место равенство

$$\sup_{g \in H_1^0(\Gamma), ||g||_1 \leqslant 1} |\Phi(g)| = \inf_{q \in H_\infty(\Gamma)} ||f - q||_\infty = 1,$$

где через $H_p^0(\Gamma)$ обозначается пространство граничных функций $q(\zeta)$, $q(z) \in H_p, q(0) = 0$.

Поэтому найдется последовательность функций $F_n(z) \in H_1^0(\Gamma)$, $||F_n||_1 \leqslant 1$, таких, что $\lim_{n\to\infty} |\varphi(F_n)| = 1$. Очевидно, можно считать, что $\Phi(F_n)$ действительны, так что $\lim_{n\to\infty} \Phi(F_n) = 1$.

Так как нормы функций $F_n(\zeta)$ в пространстве $L_1(\Gamma)$ ограничены одним числом, то, по теореме Комлоша [2, теорема 1], можно выбрать последовательность средних $h_k(\zeta) = (1/n_k)\sum_{j=1}^{n_k} F_j(\zeta)$, сходящуюся почти всюду на Γ. По теореме Хинчина — Островского, последовательность $h_k(z)$ равномерно сходится внутри круга D к некоторой функции $F(z) \in H_1$, а на окружности Γ сходится почти всюду к угловым граничным значениям функции $F(z)$. Так как $F_k(0) = 0$, $k = 1, 2, \ldots$, то отсюда следует, что $F(0) = \lim_{k=0} h_k(0)$, т. е. $F \in H_1^0(\Gamma)$. Кроме того, $\Phi(h_k) \to 1$ при $k \to \infty$.

Покажем, что если $||F|| > 0$, то

$$\left|\int_{\Gamma} f(e^{it})F(e^{it})dt\right| = ||F||_1. \tag{2}$$

Очевидно,

$$|\Phi(h_n)| - |\Phi(h_n - F)| \leqslant |\Phi(F)| \leqslant ||F||. \tag{3}$$

Пусть E — множество точек окружности Γ, в которых для некоторого $K > 0$ выполняется неравенство $|h_n(\zeta)| \leqslant K$, $n = 1, 2, \ldots$. Так как последовательность $h_n(\zeta)$ сходится почти всюду на Γ к $F(\zeta)$, то она ограничена почти всюду на Γ и мера Лебега множества $\Gamma \setminus E$ стремится к нулю при $K \to \infty$. Нетрудно видеть, что

$$|\Phi(h_n - F)| \leqslant ||h_n - F|| = \int_E |F(\zeta) - h_n(\zeta)||dz| + \int_{\Gamma\setminus E} |F(\zeta) - h_n(\zeta)||d\zeta| \leqslant$$

$$\int_E |F(\zeta) - h_n(\zeta)||d\zeta| + \int_{\Gamma\setminus E} |F(\zeta)||d\zeta| + \int_{\Gamma\setminus E} |h_n(\zeta)||d\zeta| \leqslant ||h_n||_1 - ||F||_1 +$$

$$\int_E |F(\zeta) - h_n(\zeta)||dz| + 2\int_{\Gamma\setminus E} |F(\zeta)||d\zeta| + \int_E (|F(\zeta)| - |h_n(\zeta)|)|d\zeta|. \tag{4}$$

Так как на множестве E последовательность h_n равномерно ограничена и сходится к F почти всюду, то

$$\int_E |F(\zeta) - h_n(\zeta)||d\zeta| \to 0 \quad \text{и} \quad \int_E (|F(\zeta)| - |h_n(\zeta)|)dt \to 0$$

при $n \to 0$. Поэтому из (4) получаем

$$\lim_{n\to\infty} |\Phi(h_n - F)| \leqslant 2\int_{\Gamma\setminus E} |F(\zeta)||d\zeta| + ||h_n||_1 - ||F||_1.$$

Так как при $K \to \infty$ мера множества $\Gamma \setminus E$ стремится к нулю, то в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега от суммируемой на Γ функции $|F(\zeta)|$ при $K \to 0$ будет $\int_{\Gamma\setminus E} |F(\zeta)||d\zeta| \to 0$. Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty} |\Phi(h_n - F)| \leqslant ||h_n||_1 - ||F||_1.$$

Переходя в последнем равенстве к пределу при $n \to \infty$, учитывая, что $\Phi(h_n) \to 1$ и $||h_n||_1 \to 1$, получаем $|1 - \Phi(F)| \leqslant 1 - ||F||_1$. Отсюда и из неравенства $|\Phi(F)| \leqslant ||F||_1|$ следует, что $|\phi(F)| = ||F||_1$, т. е. функция F удовлетворяет равенству (2).

Покажем теперь, что $||F||_1 > 0$.

Если это не так, то последовательность h_n сходится к нулю почти всюду на Γ. По условию теоремы функция f не является плохо приближаемой ни в одной точке окружности Γ. Поэтому для каждой точки $\zeta \in \Gamma$ найдется такая дуга $\gamma_\zeta \subset \Gamma$ с серединой в точке ζ, что для некоторой функции $\psi_\zeta(z) \in H_\infty$ и числа $0 \leqslant \rho_\zeta < 1$ будет $|f(z) - \psi_\zeta(z)| \leqslant \rho_\zeta$ почти всюду на γ_ζ. Обозначим через γ'_ζ дугу окружности Γ с серединой в точке ζ и длиной вдвое меньшей длины дуги γ_ζ. Так как дуги γ'_ζ, $\zeta \in \Gamma$, покрывают всю окружность Γ, то найдется конечное число точек $\zeta_n \in \Gamma$, $n = 1, 2, \ldots, m$, таких, что дуги γ'_{ζ_n} также покрывают всю окружность Γ. Так как $||h_n||_1 \to 1$, то найдется хотя бы одна из этих дуг $\gamma' = \gamma'_{\zeta_k}$ такая, что для бесконечного числа функций последовательности h_n и некоторого $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство

$$\int_{\gamma'} |h_n(\zeta||d\zeta| > \varepsilon. \tag{5}$$

Положим $E_n = \{z : z \in \gamma', |h_n(z)| \geqslant 1\}$. Так как $h_n(z) \to 0$ почти всюду на Γ, то, очевидно, $|E_n| \to 0$. Кроме того,

$$\int_{E_n} |h_n(\zeta)||d\zeta| = \int_{\gamma'} |h_n(\zeta||d\zeta| - \int_\Gamma \chi_{\gamma' \setminus E_n}(\zeta)|h_n(\zeta)||d\zeta|,$$

где $\chi_{\gamma' \setminus E_n}(\zeta)$ — характеристическая функция множества $\gamma' \setminus E_n$. В последнем интеграле подинтегральная функция ограничена по модулю числом 1 и при $n \to \infty$ стремится к нулю почти всюду на Γ. Поэтому, по теореме Лебега, этот интеграл стремится к нулю. Отсюда и (5) следует, что неравенство

$$\int_{E_n} |h_n(z)||dz| > \frac{\varepsilon}{2}, \tag{6}$$

так же как и (5), выполняется для бесконечного числа функций h_n. Применим лемму 1 для последовательности множеств E_n, $n = 1, 2, \ldots$, $\gamma_1 = \gamma'_{\zeta_k}$ и $\gamma = \gamma_{\zeta_k}$, и пусть φ_n — функции, удовлетворяющие условиям (i) — (iiii), а $\psi = \psi_{\zeta_k}$.

Очевидно,

$$\Phi(h_n) = \Phi(g_n h_n) + \Phi((1 - g_n)h_n). \tag{7}$$

Поскольку функция $\psi g_n h_n$ принадлежит классу $H_1^0(\Gamma)$, то

$$\int_\Gamma \psi(\zeta) g_n(\zeta) h_n(\zeta) d\zeta = 0$$

и

$$\Phi(g_n h_n) = \int_\Gamma f(\zeta) g_n(\zeta) h_n(\zeta) dz = \int_\Gamma (f(\zeta) - \psi(\zeta)) g_n(\zeta) h_n(\zeta) d\zeta.$$

Отсюда, так как почти всюду на γ имеет место неравенство

$$|f(\zeta)-\psi(\zeta)| \leqslant \rho < 1,$$

а почти всюду на $\Gamma\setminus\gamma$ выполняются неравенства

$$|f(\zeta)-\psi(\zeta)| \leqslant ||f-\psi||_\infty \quad \text{и} \quad |g_n(z)| \leqslant \varepsilon_n,$$

то

$$|\Phi(g_nh_n)| \leqslant \rho\int_{\gamma\setminus E_n}|g_n(\zeta)h_n(\zeta)||d\zeta| + \rho\int_{E_n}|g_n(\zeta)h_n(\zeta)||d\zeta|+$$
$$\varepsilon_n||f-\psi||_\infty\int_{\Gamma\setminus\gamma}|h_n(\zeta)||d\zeta| \leqslant \int_{\gamma\setminus E_n}|g_n(\zeta)||h_n(\zeta)||d\zeta|+$$
$$\rho\int_{E_n}|h_n(\zeta)||d\zeta| + \varepsilon_n||f-\psi||_\infty||h_n||_1. \tag{8}$$

Так как $|1-g_n(z)| \leqslant 1$ почти всюду на Γ и $|1-g_n(z)| \leqslant \varepsilon_n$ почти всюду на E_n, то

$$|\Phi((1-g_n)h_n)| \leqslant \int_{\gamma\setminus E_n}|(1-g_n(\zeta))||h_n(\zeta)||d\zeta| + \int_{E_n}|1-g_n(\zeta)||h_n(\zeta)||d\zeta|+$$
$$\int_{\Gamma\setminus\gamma}|1-g_n(\zeta)||h_n(\zeta)||d\zeta| \leqslant \int_{\gamma\setminus E_n}|1-g_n(\zeta)||h_n(\zeta)||d\zeta|+$$
$$\varepsilon_n\int_{E_n}|h_n(\zeta)||d\zeta| + \int_{\Gamma\setminus\gamma}|h_n(\zeta)|d\zeta|. \tag{9}$$

Из (8) и (9) получаем

$$|\Phi(h_n)| \leqslant \int_{\Gamma\setminus\gamma}|h_n(\zeta)|d\zeta| + \int_{\gamma\setminus E_n}(|g_n(\zeta)| + |1-g_n(\zeta)|)|h_n(\zeta)||d\zeta|+$$
$$\rho\int_{E_n}|h_n(\zeta)||d\zeta| + \varepsilon_n\int_{E_n}|h_n(\zeta)||d\zeta| + \varepsilon_n||f-\psi||_\infty||h_n||_1.$$

По пункту (iiii) леммы 1, почти всюду на Γ выполняется неравенство $|g_n(z)| + |1-g_n(z)| \leqslant 1+\varepsilon_n$, поэтому отсюда

$$|\Phi(h_n)| \leqslant \int_{\Gamma\setminus\gamma}|h_n(\zeta)|d\zeta| + \int_{\gamma\setminus E_n}|h_n(z)||dz| + \varepsilon_n\int_{\gamma\setminus E_n}|h_n(\zeta)||d\zeta|+$$
$$\rho\int_{E_n}|h_n(\zeta)||d\zeta| + \varepsilon_n\int_{E_n}|h_n(\zeta)||d\zeta| + \varepsilon_n||f-\psi||_\infty||h_n||_1.$$

Таким образом,

$$|\Phi(h_n)| \leqslant ||h_n||_1 - (1-\rho)\int_{E_n} |h_n(\zeta)||d\zeta| + o(1).$$

Поскольку $1-\rho > 0$ и неравенство (6) имеет место для бесконечного числа индексов n, то это противоречит тому, что $\lim_{n\to\infty} |\Phi(h_n)| = 1$.

Теорема доказана.

Из этой теоремы легко следует следующее утверждение.

Теорема 2. *Если* $|f(z)| = 1$ *почти всюду на* Γ *и функции* $f(\zeta)$ *и* $\overline{f(\zeta)}$ *приближаемы в каждой точке окружности* Γ, *то лишь одна из функций* $f(\zeta)$ *и* $\overline{f(\zeta)}$ *может быть плохо приближаемой в классе* H_∞.

Доказательство. Если обе функции $f(\zeta)$ и $\overline{f(\zeta)}$ являются плохо приближаемыми в классе $H_\infty(\Gamma)$, то, по теореме 1, существуют функции $F_1(\zeta), F_2(\zeta) \in H_1(\Gamma)$ такие, что $||F_1||_1 = ||F_2||_1 = 1$ и

$$\int_\Gamma f(e^{it})F_1(e^{it})dt = \int_\Gamma \overline{f(e^{it})}F_2(f(e^{it})dt = 1.$$

Отсюда следует, что $f(\zeta)F_1(\zeta) = |F_1(\zeta)|$ и $\overline{f(\zeta)}F_2(\zeta) = |F_2(\zeta)|$ почти всюду на Γ. Перемножив почленно оба равенства, получим

$$F_1(\zeta)F_2(\zeta) = |F(\zeta)F_1(\zeta)| > 0,\ \zeta \in \Gamma. \tag{10}$$

Так как обе функции $F_1(z)$ и $F_2(z)$ принадлежат пространству H_1, то их произведение $F_1(z)F_2(z)$ принадлежит пространству $H_{1/2}$. Отсюда и из (10) следует, что функция $F_1(z)F_2(z)$ является константой в круге D [3]. Так как $F_1(0) = F_2(0) = 0$, то $F_1(z)F_2(z) = 0$, $z \in D$, что противоречит теореме единственности.

Теорема доказана.

Библиографический список

1. *Гарнетт Дж.* Ограниченные аналитические функции. М. : Мир, 1984. 467 с.
2. *Komlós J.* A generalization of a problem of Steinhaus // Acta Math. Academiae Scentiarum Hungaricae. Vol. 18, № 1/2 (1967). P. 217—229.
3. *Neuwirth J., Newman D.* Positive $H^{1/2}$ functions are constants// Proc. Amer. Math. Soc. Vol. 18 (1967). P. 958.