УДК 512.543

Е. Д. Логинова, Д. И. Молдаванский

ОБ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ КОНЕЧНЫМИ p-ГРУППАМИ КОММУТИРОВАННОГО HNN-РАСШИРЕНИЯ ГРУПП

Получено необходимое и достаточное условие аппроксимируемости конечными p-группами коммутированного HNN-расширения.

Ключевые слова: коммутированное HNN-расширение, аппроксимируемость конечными p-группами, отделимость подгрупп в классе конечных p-групп.

The necessary and sufficient condition for commuted HNN-extension to be residually a finite p-groups is obtained.

Key words: commuted HNN-extension, residuality a finite p-groups, separability of subgroups in the class of finite p-groups.

В статье [1] по аналогии с известной (см. [3, с. 230]) конструкцией свободного произведения двух групп с коммутирующими подгруппами была введена конструкция коммутированного HNN-расширения, определяемая следующим образом.

Если G — некоторая группа и A и B — ее подгруппы, то *коммутированным HNN-расширением группы G с проходной буквой t и связанными подгруппами A и B* называется группа

$$G^* = \big(G, t;\ [t^{-1}At, B] = 1\big), \tag{1}$$

порождаемая образующими группы G и элементом t и определяемая всеми соотношениями группы G и всевозможными соотношениями вида $[t^{-1}at, b] = 1$, где $a \in A$ и $b \in B$ (и, как обычно, $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$ — коммутатор элементов x и y).

В [1] было доказано, что если группа G финитно аппроксимируема, а ее подгруппы A и B нееденичны, то группа G^* является финитно аппроксимируемой тогда и только тогда, когда в группе G подгруппы A и B финитно отделимы. Целью данной статьи является доказательство аналогичного утверждения для свойства аппроксимируемости конечными p-группами ($\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости).

Теорема. *Пусть G — $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемая группа, A и B — нееденичные подгруппы группы G. Группа $G^* = \big(G, t;\ [t^{-1}At, B] = 1\big)$ является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой тогда и только тогда, когда в группе G подгруппы A и B $\mathcal{F}_p$-отделимы.*

Для доказательства теоремы нам понадобится указанное в [1] описание строения группы G^* в терминах стандартных свободных конструкций обобщенного свободного произведения и HNN-расширения.

Пусть A_1 и B_1 — группы, изоморфные группам A и B соответственно, и пусть $\varphi : A \to A_1$ и $\psi : B \to B_1$ — фиксированные изоморфизмы. Пусть $K = A_1 \times B_1$ — прямое произведение групп A_1 и B_1 и

$$G_1 = \bigl(G * K;\ B = B_1, \psi\bigr) \tag{2}$$

— свободное произведение групп G и K с подгруппами B и B_1, объединенными относительно отображения ψ. Очевидные преобразования Тице показывают, что группа G^*, заданная представлением (1), изоморфна обычному HNN-расширению

$$\bigl(G_1, t;\ t^{-1}At = A_1,\ \varphi\bigr) \tag{3}$$

базовой группы G_1 с проходной буквой t и подгруппами A и A_1, связанными относительно изоморфизма φ.

Необходимость сформулированных в теореме условий $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости группы G^* устанавливается практически так же, как и в [1]. Пусть в самом деле существует такой элемент $g \in G$, не принадлежащий подгруппе A, что для любой нормальной подгруппы H конечного p-индекса группы G имеет место включение $g \in AH$. Если еще b — произвольный неединичный элемент из подгруппы B, то, поскольку $b \notin A_1$, запись коммутатора $u = [t^{-1}gt, b] = t^{-1}g^{-1}tb^{-1}t^{-1}gtb$ является приведенной в HNN-расширении (3). Поэтому u — отличный от единицы элемент группы G^*. Легко видеть, с другой стороны, что при любом гомоморфизме группы G^* на конечную p-группу образ элемента u равен 1, так что группа G^* не является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой. Предположив, далее, что элемент $g \in G$ не принадлежит подгруппе B, но принадлежит подгруппе BH для любой нормальной подгруппы H конечного p-индекса группы G, рассмотрим коммутатор $v = [a, g]$, где a — произвольный неединичный элемент из подгруппы A_1. Так как запись $v = a^{-1}g^{-1}ag$ этого элемента группы G_1 является несократимой в ее разложении (2), v — неединичный элемент группы G_1, а потому и группы G^*. Снова легко видеть, что этот элемент лежит в ядре каждого гомоморфизма группы G^* на конечную p-группу.

Для доказательства достаточности условий теоремы нам понадобятся два вспомогательных утверждения. Первое из них, по-видимому, хорошо известно; тем не менее для полноты изложения приведем его доказательство.

Предложение 1. *Пусть группа $G^* = \bigl(G, t;\, t^{-1}At = B, \varphi\bigr)$ является HNN-расширением некоторой группы G с проходной буквой t и связанными подгруппами A и B. Если группа G $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема и подгруппы A и B конечны, то группа G^* является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой* *тогда и только тогда, когда существует гомоморфизм этой группы на конечную p-группу, действующий инъективно на подгруппах A и B.*

Действительно, если группа G^* $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема, то, поскольку подгруппа A конечна, в G^* существует подгруппа N конечного p-индекса, пересекающаяся с подгруппой A тривиально, и естественный гомоморфизм группы G^* на фактор-группу G/N является искомым. Наоборот, ядро N гомоморфизма группы G^* на конечную p-группу, действующего на подгруппах A и B инъективно, является нормальной подгруппой конечного p-индекса группы G^*, тривиально пересекающейся со связанными подгруппами этого HNN-расширения. Поэтому из теоремы о строении подгрупп HNN-расширения (см., напр., [6]) следует, что N является обычным свободным произведением семейства подгрупп, состоящего из некоторой свободной группы и подгрупп вида $G \cap N$. Таким образом, N есть свободное произведение некоторого семейства $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемых групп, и потому [4] — $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемая группа. Поскольку фактор-группа G/N является конечной p-группой, отсюда следует $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемость группы G^*.

Вторым необходимым нам утверждением является отмеченное в [2, лемма 3] следствие из критерия Г. Хигмана $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости обобщенного свободного произведения двух конечных p-групп [5].

Предложение 2. *Пусть $G = \big(A * B;\ H = K, \varphi\big)$ — свободное произведение конечных p-групп A и B с подгруппами H и K, объединенными в соответствии с изоморфизмом φ. Если подгруппа K выделяется в группе B прямым множителем, то группа G $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема.*

Утверждение о достаточности условий теоремы докажем сначала в следующем частном случае:

Лемма 1. *Если G является конечной p-группой, то группа $G^* = \big(G, t;\ [t^{-1}At, B] = 1\big)$ $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема.*

Доказательство. Обозначим через G^p p-ю прямую степень группы G: $G^p = \big\{(x_1, x_2, \ldots, x_p) \,|\, x_i \in G\ (i = 1, 2, \ldots, p)\big\}$. Пусть τ — отображение группы G^p в себя, переводящее элемент $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ в $(x_p, x_1, \ldots, x_{p-1})$. Очевидно, что τ является автоморфизмом этой группы и имеет порядок p. Обозначим через T циклическую подгруппу, порождаемую в группе $\operatorname{Aut} G^p$ автоморфизмом τ, и введем в рассмотрение расщепляемое расширение X группы G^p при помощи группы T с естественным действием T на группе G^p.

Более подробно, это означает, напомним, что группа X содержит группы G^p и T в качестве подгрупп, причем G^p нормальна в X, $X = G^pT$, $G^p \cap T = 1$ и для любого элемента $g \in G^p$ элемент $\tau^{-1}g\tau$ совпадает с образом $g\tau$ элемента g относительно отображения τ. Отметим, что X является конечной p-группой.

Обозначим через α вложение группы G в группу X, определяемое по правилу $g\alpha = (g, 1, \ldots, 1)$ $(g \in G)$. Определим также (предполагая действующими обозначения, введенные выше) вложение β группы $K = A_1 \times B_1$ в группу X, полагая для элемента $k \in K$, $k = ab$, где $a \in A_1$, $b \in B_1$, $k\beta = (b\psi^{-1}, a\varphi^{-1}, 1, \ldots, 1)$.

Поскольку для любого элемента $b \in B$ имеем

$$(b\psi)\beta = ((b\psi)\psi^{-1}, 1, \ldots, 1) = (b, 1, \ldots, 1) = b\alpha,$$

существует гомоморфизм σ группы $G_1 = \big(G * K;\ B = B_1, \psi\big)$ в группу X, продолжающий отображения α и β и потому действующий на подгруппах G и K инъективно.

Далее, если a — произвольный элемент из подгруппы A группы G, то

$$\begin{aligned} &\tau^{-1}(a\sigma)\tau = \tau^{-1}(a\alpha)\tau = \tau^{-1}(a, 1, \ldots, 1)\tau = (1, a, 1, \ldots, 1) \\ \text{и}\quad &(a\varphi)\sigma = (a\varphi)\beta = (1, (a\varphi)\varphi^{-1}, 1, \ldots, 1) = (1, a, 1, \ldots, 1). \end{aligned}$$

Это означает, что при отображении в группу X множества $G_1 \cup \{t\}$ порождающих HNN-расширения (3), действующем на G_1 как гомоморфизм σ и переводящем элемент t в элемент τ, все определяющие соотношения вида $t^{-1}at = a\varphi$, $a \in A$, переходят в верные равенства группы X. Следовательно, это отображение продолжаемо до гомоморфизма ρ группы G^* в группу X. Очевидно, что действие ρ на подгруппах A и A_1 инъективно.

Поскольку группа G_1 в силу предложения 2 является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой, $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемость группы G^* следует теперь из предложения 1. Лемма 1 доказана.

Рассмотрение общего случая начнем с построения некоторых $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемых гомоморфных образов группы G^*.

Пусть N — нормальная подгруппа конечного p-индекса группы G. Полагаем $U = A \cap N$, $V = B \cap N$, $U_1 = U\varphi$ и $V_1 = V\psi$. Тогда $W = U_1V_1$ — нормальная подгруппа конечного p-индекса группы K, причем $A_1 \cap W = U_1$ и $B_1 \cap W = V_1$. Так как $(B \cap N)\psi = B_1 \cap W$, отображение ψ индуцирует изоморфизм $\overline{\psi}$ подгруппы BN/N фактор-группы G/N на подгруппу B_1W/W фактор-группы K/W, при котором элемент bN, $b \in B$, переходит в $(b\psi)W$. Поэтому можно построить свободное произведение

$$G_1(N) = \big(G/N * K/W;\ BN/N = B_1W/W, \overline{\psi}\big) \tag{4}$$

групп G/N и K/W с подгруппами BN/N и B_1W/W, объединенными относительно изоморфизма $\overline{\psi}$. Хорошо известно (и легко видеть), что естественные отображения группы G на фактор-группу G/N и группы K на фактор-группу K/W продолжаемы до гомоморфизма $\sigma(N)$ группы G_1 на группу $G_1(N)$.

Аналогично, поскольку $(A \cap N)\varphi = A_1 \cap W$, отображение φ индуцирует изоморфизм $\overline{\varphi}$ подгруппы AN/N фактор-группы G/N на подгруппу A_1W/W фактор-группы K/W. Так как группы G/N и K/W вложимы естественным образом в группу $G_1(N)$, можно построить HNN-расширение

$$G_1^*(N) = \big(G_1(N), t;\ t^{-1}(AN/N)t = A_1W/W,\ \overline{\varphi}\big). \tag{5}$$

Снова легко видеть, что существует гомоморфизм $\rho(N)$ группы G^* на группу $G_1^*(N)$, продолжающий отображение $\sigma(N)$ и переводящий проходную букву HNN-расширения (3) в проходную букву $G_1^*(N)$.

Так как $K/W = A_1W/W \times B_1W/W$, группа $G_1^*(N)$ является коммутированным HNN-расширением группы G/N со связанными подгруппами AN/N и BN/N. Поскольку группа G/N является конечной p-группой, из леммы 1 следует, что группа $G_1^*(N)$ является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой.

Таким образом, для любой нормальной подгруппы N конечного p-индекса группы мы построили гомоморфизм $\rho(N)$ группы G^* на некоторую $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемую группу. Поэтому для завершения доказательства теоремы остается доказать следующее утверждение:

Лемма 2. *Если группа G $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема и подгруппы A и B $\mathcal{F}_p$-отделимы в ней, то для любого неединичного элемента $g \in G^*$ найдется такая нормальная подгруппа N конечного p-индекса группы G, что образ элемента g относительно гомоморфизма $\rho(N)$ отличен от единицы.*

Доказательство. Отметим, прежде всего, что предположение об $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости группы G и $\mathcal{F}_p$-отделимости ее подгрупп A и B означает справедливость следующего утверждения:

(i) *Для любого элемента g группы G можно указать нормальную подгруппу N конечного p-индекса группы G такую, что если $g \neq 1$, то $g \notin N$, если $g \notin A$, то $g \notin AN$ и если $g \notin B$, то $g \notin BN$.*

Покажем, что похожее утверждение справедливо и для элементов группы K:

(ii) *Для любого элемента g группы K можно указать нормальную подгруппу N конечного p-индекса такую, что если W — подгруппа группы K, введенная выше при построении гомоморфизма $\rho(N)$, то если $g \neq 1$, то $g \notin W$, если $g \notin A_1$, то $g \notin A_1W$ и если $g \notin B_1$, то $g \notin B_1W$.*

В самом деле, пусть g — произвольный элемент из подгруппы K, $g = a_1b_1$, где $a_1 \in A_1$ и $b_1 \in B_1$. Пусть еще элементы $a \in A$ и $b \in B$ таковы, что $a\varphi = a_1$ и $b\psi = b_1$. Если $g \neq 1$, то хотя бы один из элементов a_1 или b_1 отличен от единицы. Если $a_1 \neq 1$, то $a \neq 1$ и в соответствии с (i) можно выбрать такую нормальную подгруппу N конечного p-индекса группы G, что $a \notin N$. Поскольку тогда a не входит в подгруппу $U = A \cap N$, элемент a_1 не входит в подгруппу $U_1 = U\varphi$, и потому элемент g не принадлежит подгруппе $W = U_1V_1$. Случай, когда $b_1 \neq 1$, рассматривается аналогично. Предположим теперь, что элемент g не принадлежит подгруппе A_1. Это означает, что элемент b_1 отличен от единицы, а потому и $b \neq 1$. Выберем подгруппу N так, чтобы $b \notin N$. Тогда элемент b_1 не входит в подгруппу V_1 и потому, как легко видеть, элемент g не принадлежит подгруппе A_1W. Аналогично рассматривается случай, когда элемент g не принадлежит подгруппе B_1.

Из указанного выше способа построения по нормальной подгруппе N группы G соответствующей ей подгруппы W группы K следует, очевидно, что подгруппа группы K, соответствующая пересечению двух нормальных подгрупп M и N группы G, является пересечением подгрупп, соответствующих подгруппам M и N. Поскольку то же справедливо для пересечения произвольного конечного семейства нормальных подгрупп группы G, из утверждений (i) и (ii) следует

(iii) *Пусть R_1 — конечное множество элементов группы G, не принадлежащих подгруппе A, R_2 — конечное множество элементов группы G, не принадлежащих подгруппе B, S_1 — конечное множество элементов группы K, не принадлежащих подгруппе A_1, S_2 — конечное множество элементов группы K, не принадлежащих подгруппе B_1. Тогда в группе G найдется такая нормальная подгруппа N конечного p-индекса, что каждый элемент из множества R_1 не принадлежит подгруппе AN, каждый элемент из множества R_2 не принадлежит подгруппе BN, каждый элемент из множества S_1 не принадлежит подгруппе A_1W и каждый элемент из множества S_2 не принадлежит подгруппе B_1W.*

Отсюда, в свою очередь, вытекает утверждение

(iv) *Для любого неединичного элемента g группы G_1 в группе G найдется такая нормальная подгруппа N конечного p-индекса, что образ элемента g при гомоморфизме $\sigma(N)$ отличен от единицы.*

Действительно, пусть $g = x_1x_2 \cdots x_r$ — несократимая запись элемента g в разложении (2) группы G_1. Если $r = 1$, то элемент g лежит в одной из подгрупп G или K группы G_1, и так как гомоморфизм $\sigma(N)$ продолжает естественные отображения группы G на фактор-группу G/N и группы K на фактор-группу K/W, существование такой подгруппы N следует из утверждений (i) и (ii). Если $r > 1$, то сомножители $x_1, x_2, \ldots, x_r$ несократимой записи элемента g принадлежат попеременно подгруппам G и K и не входят в соответствующие объединяемые подгруппы B и B_1. Пусть R_2 — множество тех сомножителей этой записи элемента g, которые лежат в подгруппе G, и S_2 — множество тех сомножителей, которые лежат в подгруппе K. Из утверждения (iii) (при пустых R_1 и S_1) получаем существование нормальной подгруппы N конечного p-индекса группы G такой, что все элементы множества R_2 не принадлежат подгруппе BN и все элементы из множества S_2 не принадлежат подгруппе B_1W. Поскольку $\sigma(N)$-образ элемента g получается заменой в его несократимой записи сомножителя $x_i \in G$ на смежный класс x_iN, а сомножителя $x_i \in K$

на смежный класс x_iW и эта запись элемента $g\sigma(N)$ является, очевидно, несократимой в разложении (4) группы $G_1(N)$, получаем $g\sigma(N) \neq 1$.

Докажем, наконец, утверждение

(v) *Пусть R — конечное множество элементов группы G_1, не принадлежащих подгруппе A, и S — конечное множество элементов группы G_1, не принадлежащих подгруппе A_1. Тогда в группе G найдется такая нормальная подгруппа N конечного p-индекса, что при гомоморфизме $\sigma(N)$ образ каждого элемента из множества R не принадлежит образу подгруппы A и образ каждого элемента из множества S не принадлежит образу подгруппы A_1.*

Для доказательства этого построим по множествам R и S удовлетворяющие условиям утверждения (iii) множества элементов R_1, R_2, S_1 и S_2 следующим образом. Пусть g — произвольный элемент множества R с несократимой в разложении (2) группы G_1 записью $g = x_1x_2\cdots x_r$. Если $r = 1$ и элемент g принадлежит подгруппе G, зачислим его в множество R_1. Если g принадлежит подгруппе K и не входит в подгруппу G, то он не входит в объединяемую подгруппу B_1; зачислим его в множество S_2. Если $r > 1$, то сомножители $x_1, x_2, \ldots, x_r$ несократимой записи элемента принадлежат попеременно подгруппам G и K и не входят в соответствующие объединяемые подгруппы B и B_1; сомножитель $x_i \in G$ зачислим в множество R_2, а сомножитель $x_i \in K$ зачислим в множество S_2. Аналогично, если $g = x_1x_2\cdots x_r$ — элемент множества S и если $r = 1$, то в случае $g \in K$ элемент g зачисляем в множество S_1, а в случае $g \in G \setminus K$ — в множество R_2. Если $r > 1$, то сомножители несократимой записи элемента g размещаем так же, как элементы из R.

Нетрудно видеть, что нормальная подгруппа N конечного p-индекса группы G, существование которой для построенных множеств R_1, R_2, S_1 и S_2 гарантируется утверждением (iii), является искомой. Действительно, если элемент $g \in R$ принадлежит подгруппе G, то, поскольку в фактор-группе G/N элемент gN не входит в подгруппу AN/N и ограничение гомоморфизма $\sigma(N)$ на подгруппу G совпадает с естественным гомоморфизмом G на G/N, $\sigma(N)$-образ элемента g не принадлежит образу подгруппы A. Если элемент g лежит в подгруппе K, то его $\sigma(N)$-образ gW лежит в свободном множителе K/W разложения (4) группы $G_1(N)$ и не входит в объединяемую подгруппу B_1W/W. Поэтому элемент gW не входит в другой свободный множитель G/N группы $G_1(N)$ и тем более в его подгруппу AN/N. Если длина элемента $g \in R$ больше единицы, то его $\sigma(N)$-образ имеет, как легко понять, ту же длину и потому не входит ни в один свободный множитель. Для элементов множества S рассуждение аналогично.

Теперь легко показать, что для любого неединичного элемента g группы G^* найдется такая нормальная подгруппа N конечного p-индекса группы G, что образ элемента g относительно гомоморфизма $\rho(N)$ отличен от единицы. Пусть

$$g = g_0 t^{\varepsilon_1} g_1 t^{\varepsilon_2} g_2 \cdots g_{n-1} t^{\varepsilon_n} g_n \tag{6}$$

— приведенная запись этого элемента в HNN-расширении (3). Это означает, напомним, что $n \geqslant 0$, $g_0, g_1, \ldots, g_n$ — элементы подгруппы G_1, $\varepsilon_i = \pm 1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и при $n > 0$ для любого номера i из того, что $\varepsilon_i + \varepsilon_{i+1} = 0$, следует, что при $\varepsilon_i = -1$ элемент g_i не входит в подгруппу A, а при $\varepsilon_i = 1$ элемент g_i не входит в подгруппу A_1.

Если длина n элемента g равна нулю, т. е. g принадлежит подгруппе G_1, то ввиду утверждения (iv) для некоторой нормальной подгруппы N конечного p-индекса группы G образ элемента g при гомоморфизме $\sigma(N)$ группы G_1 на группу $G_1(N)$ отличен от единицы. Поскольку действие на подгруппе G_1 гомоморфизма $\rho(N)$ группы G^* на группу $G_1^*(N)$ совпадает с отображением $\sigma(N)$, образ элемента g при гомоморфизме $\rho(N)$ отличен от единицы.

При $n > 0$ введем в рассмотрение множества

$$R = \left\{ g_i \mid \varepsilon_i = -1 \wedge \varepsilon_{i+1} = 1 \right\} \quad \text{и} \quad S = \left\{ g_i \mid \varepsilon_i = 1 \wedge \varepsilon_{i+1} = -1 \right\}.$$

В силу утверждения (v) в группе G существует такая нормальная подгруппа N конечного p-индекса, что при гомоморфизме $\sigma(N)$ образ каждого элемента из множества R не принадлежит образу AN/N подгруппы A и образ каждого элемента из множества S не принадлежит образу A_1W/W подгруппы A_1. Поскольку $\rho(N)$-образ элемента g получается заменой в его записи (6) сомножителя g_i на $\sigma(N)$-образ этого сомножителя и эта запись элемента $g\rho(N)$ является, очевидно, приведенной в HNN-расширении (5), получаем $g\rho(N) \neq 1$.

Лемма 2 доказана, и вместе с тем завершено доказательство теоремы.

Библиографический список

1. *Логинова Е. Д.* О финитной аппроксимируемости коммутированного HNN-расширения групп // Вестн. Иван. гос. ун-та. 2007. Вып. 3. С. 83—89.
2. *Логинова Е. Д.* Финитная аппроксимируемость свободного произведения двух групп с коммутирующими подгруппами // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 2. С. 395—407.
3. *Магнус В., Каррас А., Солитэр Д.* Комбинаторная теория групп. М. : Наука, 1974. 455 с.
4. *Gruenberg K. W.* Residual properties of infinite soluble groups // Proc. London Math. Soc. 1957. Vol. 7. P. 29–62.
5. *Higman G.* Amalgams of p-groups // J. of Algebra. 1964. Vol. 1. P. 301—305.
6. *Karrass A., Solitar D.* Subgroups of HNN groups and groups with one defining relation // Can. J. Math. 1971. Vol. 28. P. 627—643.