УДК 517.955.2

Д. В. Туртин

МАКСИМАЛЬНЫЕ КЛАССЫ НЕЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

В полуплоскости изучаются линейные уравнения в частных производных с растущими коэффициентами. Получены максимальные классы неединственности решения задачи Коши для таких уравнений. Доказательство основано на новом методе получения оценки для решения двойственного уравнения с параметром.

Ключевые слова: классы единственности и неединственности, диаграмма Ньютона, задача Коши.

We study linear partial differential equations with increasing coefficients in a half-plane. We establish maximal nonuniqueness of solutions to the Cauchy problem for these equations. The proof is based on a new estimation method for solution to the dual differential equation with a parameter.

Key words: classes of uniqueness and ununiqueness, Newton's diagram, Cauchy problem.

Введение

В данной работе найдены точные классы неединственности решения задачи Коши (р.з.К.) для линейных уравнений с переменными коэффициентами вида

$$\frac{\partial^m u(x,t)}{\partial t^m} = \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{n_j} q_{kj}(x) \frac{\partial^{k+j} u(x,t)}{\partial x^k \partial t^j}, \tag{1}$$

где $q_{kj}(x)$ — комплекснозначные непрерывные функции при начальном условии

$$\frac{\partial^j u(x,t)}{\partial t^j}|_{t=0} = f_j(x)\,(j=\overline{0,m-1}) \tag{2}$$

в полуплоскости $\Pi = \{(x,t) : -\infty < x < \infty,\, 0 \leqslant t < \infty\}$.

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение, двойственное (1):

$$\sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{n_j} q_{kj}(x) \lambda^j \frac{d^k y}{dx^k} - \lambda^m y \equiv \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m_k} a_{kj}(x) \lambda^j \frac{d^k y}{dx^k} = 0, \tag{3}$$

где $n = \max\limits_{j=\overline{0,m-1}} n_j$, $y = y(x,\lambda)$ — искомая функция, $\lambda \in \Lambda \subset C$, m_k ($k = \overline{0,n}$) — целые неотрицательные числа.

Уравнению (3) сопоставим характеристическое уравнение

$$Q(x,\, \lambda) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m_k} a_{kj}(x) \lambda^j s^k = 0. \tag{4}$$

Предположим, что диаграмма Ньютона (см. [10]) многочлена $Q(x,\lambda)$ при любом $x(-\infty < x < \infty)$ имеет одни и те же узловые точки (k_l, m_{k_l}) ($l = \overline{0,N}$, $k_0 = 0$), определяющие N ее звеньев и $(\alpha_{lj},\, m_{\alpha_{lj}})$ ($l = \overline{1,N}$, $q_l = k_l - k_{l-1}$, $\alpha_{lq_l} = k_l$, $j = \overline{1,q_l}$) — точки, соответствующие некоторым мономам многочлена $Q(x,\lambda)$ и лежащие на l-м звене диаграммы Ньютона этого многочлена, причем

$$\alpha_{l0} < \alpha_{l1} < \ldots < \alpha_{lq_l}.$$

Пусть $\gamma_1 < \ldots < \gamma_N$ — показатели асимптотического разложения корней уравнения (4) по степеням λ в окрестности точки $\lambda = \infty$.

Известно [5], что классы единственности р.з.К. (1) — (2) определяются числом $p_0 = [\min\limits_{1 \leqslant i \leqslant l} \gamma_i]^{-1}$, называемым приведенным порядком уравнения (1) [2].

Далее мы будем рассматривать регулярные (т. е. обладающие непрерывными производными всех порядков, входящих в уравнение) решения $u(x,t)$ уравнения (1), имеющие по t нормальный тип, т. е. удовлетворяющие при каком-либо $\alpha > 0$ оценке: $|D_x^k u(x,t)| \leqslant c(x) \exp\{\alpha t\}$ при $(x,t) \in \Pi$.

В [5] показано, что класс функций $\{u(x,t)\}$, удовлетворяющих оценке

$$|D_x^k u(x,t)| \leqslant c \exp\{\alpha t + |\int_0^x H(\theta) d\theta|\} \tag{5}$$

($\alpha > 0, c > 0$, $k = \overline{0,n-1}$, $-\infty < x < \infty$, $t \geqslant 0$, $H(\theta)$ — четная непрерывная возрастающая при $\theta > 0$ функция), является классом единственности р.з.К. (1) — (2) при условии, что интеграл

$$\int_1^\infty [H(\theta)]^{1-p_0} d\theta \tag{6}$$

расходится.

Для уравнений (1) с характеристическим уравнением (4), имеющим однозвенную диаграмму Ньютона, сходимость интеграла (6) приводит [3] к тому, что класс функций, удовлетворяющих (5), становится классом неединственности р.з.К. (1) — (2).

В случае многозвенной диаграммы Ньютона у уравнения (4) неединственность р.з.К. (1) — (2) была доказана [6] лишь при условии сходимости интеграла $\int_1^\infty [H(\theta)]^{1-q_0} d\theta$, где $q_0 = [\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant l} \gamma_i]^{-1} < p_0$, что означало образование “зазора” между классами единственности и неединственности р.з.К. (1) — (2).

В настоящей работе получен результат по неединственности р.з.К. (1) — (2), ликвидирующий этот “зазор” и устанавливающий, что если интеграл (6) сходится, то класс функций $\{u(x,t)\}$, удовлетворяющих оценке (5), есть класс неединственности р.з.К. (1) — (2). Краткое сообщение о результате было опубликовано в [8]. Напомним, что такой же результат имеет место для систем уравнений вида (1) с постоянными коэффициентами [4].

1.Теорема о неединственности р.з.К. (1) — (2)

Прежде чем сформулировать основной результат, введем необходимые обозначения.

Положим $d_k = m_{k_{l-1}} + (k_{l-1} - k)\gamma_l$ при каждом фиксированном k: $k_{l-1} \leqslant k \leqslant k_l \, (l = \overline{1,N})$,

$$\Gamma^{'}(l) = \{k : \quad k_{l-1} \leqslant k \leqslant k_l, \, m_k = d_k\}, \quad \cup_{l=1}^{N} \Gamma^{'}(l) = \Gamma^{'},$$

$$\Gamma^{''} = \{0, 1, \, \ldots, n\} \setminus \Gamma^{'}.$$

Далее будем рассматривать только такие дифференциальные уравнения вида (3), у которых характеристическое уравнение (4) удовлетворяет условиям:

1) $a_{km_k}(x) \equiv a_{km_k}$ при $k \in \Gamma^{'}$, $a_{nj}(x) \equiv a_{nj}$ при $0 \leqslant j \leqslant m_n$;

2) уравнения

$$\sum_{k \in \Gamma(l)} a_{km_k} \beta^{k-k_{l-1}} = 0 \, (l = \overline{1,N}) \tag{7}$$

не имеют кратных корней и $a_{k_l m_{k_l}} \neq 0 \, (l = \overline{1,N})$;

3) коэффициенты уравнения (3) удовлетворяют оценкам

$$\sup_{|x| \leqslant r} |a_{kj}(x)| \leqslant h^{p_0(d_k - j)}(r), \tag{8}$$

где $h(r) > 0 \, (r > 0)$ — непрерывная монотонно возрастающая функция, $j = \overline{0, m_k}$ при $k \in \Gamma^{''}$, $j = \overline{0, m_k - 1}$ при $k \in \Gamma^{'}$.

Заметим, что из условий 1) и 2) следует, что диаграмма Ньютона многочлена $Q(x, \lambda)$ при любом $x \quad (x \in R)$ имеет одни и те же узловые точки.

Сформулируем теорему неединственности р.з.К. (1) — (2).

Теорема 1. *Пусть уравнение* (1) *таково, что все коэффициенты двойственного к нему уравнения* (3) $a_{kj}(x)$ *удовлетворяют условиям* 1) — 3).

Пусть введенные ранее функции $H(x)$ *и* $h(x)$ *связаны соотношением*

$$xh^{\frac{\gamma_N}{\gamma_1}}(|x|) = o(1)\int_0^x H(\xi)d\xi\,(x>0), \tag{9}$$

$o(1) \to 0$ *при* $x \to \infty$.

Если

$$\int_1^\infty \frac{dx}{[H(x)]^{p_0-1}} < \infty, \tag{10}$$

то существует нетривиальное решение $u(x,t)$ *уравнения* (1), *удовлетворяющее нулевым начальным условиям* (2) ($f_j(x) = 0$, $j = \overline{0, m-1}$) *и оценкам* (5).

Доказательство теоремы 1 основано на оценке решения двойственного (1) уравнения (3) при $x \in R$ и λ таких, что $Re\,\lambda > \alpha > 0\,(\alpha$ — достаточно велико).

2. Оценка решения

Преобразуем уравнение (3) к удобному для оценки решения виду. Для этого обычным образом сведем (3) к системе дифференциальных уравнений первого порядка

$$Y^{'} = A(x,\lambda)Y, \tag{11}$$

где $Y(x,\lambda) = (y_1(x,\lambda), \ldots, y_n(x,\lambda))^T$, $y_i(x,\lambda) = y^{(i-1)}(x,\lambda) \quad (i = \overline{1,n})$, $A(x,\lambda)$ — матрица, у которой над главной диагональю стоят единицы, остальные элементы первых $n-1$ строк — нули, а последняя строка: $(\Delta_1(x,\lambda), \ldots, \Delta_n(x,\lambda))$, где

$$\Delta_{i+1} = -\frac{\sum_{j=0}^{m_i} a_{ij}(x)\lambda^j}{\Phi(\lambda)} \quad (i = \overline{0, n-1}),\ \Phi(\lambda) = \sum_{j=0}^{m_n} a_{nj}\lambda^j.$$

Определим функцию $g(x)$ соотношением

$$h(g(x)) = x^{\gamma_1} \quad (x > 0). \tag{12}$$

Оценку решения уравнения (3) при $Re\lambda \geqslant \alpha > 0$ получим отдельно для случаев $|x| \leqslant g(|\lambda|)$ и $|x| \geqslant g(|\lambda|)$.

Лемма 1. *Пусть для коэффициентов* $a_{kj}(x)$ *выполнены условия* 1) — 3). *Тогда уравнение* (3) *при всех* λ : $Re\lambda > \alpha\,(\alpha$ — *достаточно велико) и* $|x| \leqslant g(|\lambda|)$ *имеет решение* $y(x, \lambda)$ *такое, что*

$$|y^{(j)}(x, \lambda)| \leqslant c_1|\lambda|^{j\gamma_N} e^{c_2|\lambda|^{\gamma_1|x|}} \tag{13}$$

$(j = \overline{0, n-1},\ c_1 > 0,\ c_2 > 0)$.

Доказательство. Известно [5, с. 143], что если для коэффициентов $a_{kj}(x)$ уравнения (3) выполнены оценки (8), то при $|x| \leqslant g(|\lambda|)$ характеристическое уравнение (4) имеет n корней s_{lj} вида

$$s_{lj}(x, \lambda) = \beta_{lj}\lambda^{\gamma_l}(1 + o(1)), \tag{14}$$

где β_{lj} — корни уравнений (7), $l = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, q_l}$, $o(1)$ — функции переменных x и λ, стремящиеся к нулю при $\lambda \to \infty$, $|x| \leqslant g(|\lambda|)$.

Введем еще несколько обозначений. Пусть $i \in \{1, \ldots, n\}$. Тогда при некоторых l и j имеет место равенство

$$i = \sum_{p=0}^{l-1} k_p + j \quad (l = \overline{1, N};\ j = \overline{1, q_l}),$$

в соответствии с которым обозначим $s_i(x, \lambda) = s_{lj}(x, \lambda)$. Далее положим $\epsilon_i = \gamma_l$ при $k_{l-1} + 1 \leqslant i \leqslant k_l\ (l = \overline{1, N})$.

Обозначим $B(x, \lambda) = (s_j^{i-1})\,(i = \overline{1, n},\ j = \overline{1, n}$ — матрицу, преобразующую $A(x, \lambda)$ к диагональной форме и положим $Q(\lambda) = diag\{\lambda^{v_1}, \ldots, \lambda^{v_n}\}$, где $v_1 = 0$, $v_j = \sum_{k=2}^{j} \epsilon_k - (j-1)\epsilon_j\ (j = \overline{2, n})$.

Заменой

$$Y(x, \lambda) = B(x, \lambda)Q(\lambda)\exp\{\int_0^x s_1(t, \lambda)dt\}Z(x, \lambda) \tag{15}$$

от системы (11) перейдем к системе

$$Z^{'}(x, \lambda) = W(x, \lambda)Z(x, \lambda) + C(x, \lambda)Z(x, \lambda), \tag{16}$$

где $W(x, \lambda) = diag\{0,\ s_2(x, \lambda) - s_1(x, \lambda), \ldots, s_n(x, \lambda) - s_1(x, \lambda)\}$, $C(x, \lambda) = -(B(x, \lambda)Q(\lambda))^{-1}(B(x, \lambda)Q(\lambda))^{'}$, $Z(x, \lambda) = (z_1(x, \lambda), \ldots, z_n(x, \lambda))^T$.

Далее доказательство разобьем на два случая: $0 \leqslant x \leqslant g(|\lambda|)$ и $-g(|\lambda|) \leqslant x \leqslant 0$.

Пусть $0 \leqslant x \leqslant g(|\lambda|)$. Известно [5, с. 151], что на лучах $arg\lambda = \psi$, за исключением конечного их числа, величины $Re(s_i - s_j)\,(i \neq j)$ сохраняют знак при достаточно большом $|\lambda|$ и $|x| \leqslant g(|\lambda|)$. От системы (16) перейдем к системе интегральных уравнений

$$
\left\{
\begin{array}{l}
z_1(x,\lambda) = 1 + \displaystyle\int_0^x \sum_{j=1}^{n} c_{1j}(t,\lambda) z_j(t,\lambda)dt; \\
z_i(x,\lambda) = \displaystyle\int_0^x \exp\{\int_t^x (s_i(\tau,\lambda) - s_1(\tau,\lambda))d\tau\} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}(t,\lambda) z_j(t,\lambda)dt, \\
\text{если } i = \overline{2,n},\ Re(s_i - s_1) < 0; \\
z_i(x,\lambda) = \\
= \displaystyle\int_0^{g(|\lambda|)} \exp\{\int_t^0 (s_i(\tau,\lambda) - s_1(\tau,\lambda))d\tau\} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}(t,\lambda) z_j(t,\lambda)dt - \\
- \displaystyle\int_x^{g(|\lambda|)} \exp\{\int_t^x (s_i(\tau,\lambda) - s_1(\tau,\lambda))d\tau\} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}(t,\lambda) z_j(t,\lambda)dt, \\
\text{если } i = \overline{2,n},\ Re(s_i - s_1) > 0.
\end{array}
\right. \tag{17}
$$

Очевидно, что всякое решение системы (17) является решением уравнения (16). Систему (17) будем решать методом последовательных приближений. Положим $z_1^{(0)}(x,\lambda) = 1$, $z_i^{(0)}(x,\lambda) = 0\,(i = \overline{2,n})$, $z_i^{(n+1)}(x,\lambda)$ выражаются через $z_i^{(n)}(x,\lambda)$ по формулам, получающимся при подстановке в систему (17) вместо $z_i(x,\lambda)$ в левых ее частях функций $z_i^{(n+1)}(x,\lambda)$, а в правых частях — функций $z_i^{(n)}(x,\lambda)$.

Тогда

$$z_i(x,\lambda) = z_i^{(0)}(x,\lambda) + \sum_{k=1}^{\infty} (z_i^{(k)}(x,\lambda) - z_i^{(k-1)}(x,\lambda)).$$

Обозначим

$$\eta_i^{(k)}(x,\lambda) = z_i^{(k)}(x,\lambda) - z_i^{(k-1)}(x,\lambda),$$

$$\eta_k(\lambda) = \max_{|x| \leqslant g(|\lambda|)} \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |\eta_i^{(k)}(x,\lambda)|.$$

Оценим величины $\eta_k(\lambda)$. Из рекуррентных соотношений для $z_i^{(k)}$ $(i = \overline{1,n},\, k = 0,1,\ldots)$ и известной [7, с. 147] оценки для элементов $c_{ij}(x,\lambda)\,(i,j = \overline{1,n})$ матрицы $C(x,\lambda)$

$$\int_{-g(|\lambda|)}^{g(|\lambda|)} |c_{ij}(x,\lambda)|dx = o(1)$$

($o(1) \to 0$ при $\lambda \to \infty$ и $|x| \leqslant g(|\lambda|)$) следует

$$|\eta_i^{(k)}(x,\lambda)| \leqslant o(1)\eta_{k-1}(\lambda),\ i = \overline{1,n}.$$

Поэтому $\eta_k(\lambda) \leqslant o(1)\eta_{k-1}(\lambda)$, $o(1) \to 0$ при $\lambda \to \infty$ и $|x| \leqslant g(|\lambda|)$.
Так как

$$|z_i(x,\lambda) - z_i^{(0)}(x,\lambda)| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k(\lambda) = o(1),$$

то при $0 \leqslant x \leqslant g(|\lambda|)$ имеем

$$z_1(x,\lambda) = 1 + o(1),\ z_i(x,\lambda) = o(1)\,(i = \overline{2,n}). \tag{18}$$

Заметим, что асимптотические формулы (18) получены для решения системы (17) с начальным условием

$$z_1(0,\lambda) = 1,\ z_i(0,\lambda) = 0\,(i = \overline{2,n}). \tag{19}$$

В случае $-g(|\lambda|) \leqslant x \leqslant 0$ вместо системы (17) рассмотрим систему интегральных уравнений

$$\begin{cases} z_1(x,\lambda) = 1 + \displaystyle\int_0^x \sum_{j=1}^n c_{1j}(t,\lambda) z_j(t,\lambda)dt; \\ z_i(x,\lambda) = \displaystyle\int_0^x \exp\{\int_t^x (s_i(\tau,\lambda) - s_1(\tau,\lambda))d\tau\} \sum_{j=1}^n c_{ij}(t,\lambda) z_j(t,\lambda)dt, \\ \text{если } i = \overline{2,n},\ Re(s_i - s_1) > 0; \\ z_i(x,\lambda) = \\ = -\displaystyle\int_{-g(|\lambda|)}^0 \exp\{\int_t^0 (s_i(\tau,\lambda) - s_1(\tau,\lambda))d\tau\} \sum_{j=1}^n c_{ij}(t,\lambda) z_j(t,\lambda)dt + \\ + \displaystyle\int_{-g(|\lambda|)}^x \exp\{\int_t^x (s_i(\tau,\lambda) - s_1(\tau,\lambda))d\tau\} \sum_{j=1}^n c_{ij}(t,\lambda) z_j(t,\lambda)dt, \\ \text{если } i = \overline{2,n},\ Re(s_i - s_1) < 0. \end{cases} \tag{20}$$

Как и в первом случае, получаем, что (20) имеет решение с асимптотикой (18) и удовлетворяет тому же начальному условию (19). От решения $Z(x,\lambda)$ с асимптотикой (18), применяя (15), возвратимся к решению $Y(x,\lambda)$ системы (11) и, следовательно, к решению уравнения (3). Из (14), (15) и (18) следует оценка (13). На лучах $arg\lambda = \psi$, где величины $Re(s_i - s_j)\,(i \neq j)$ не сохраняют знак, оценка (13) выполняется по непрерывности. Лемма 1 доказана.

Далее оценим то же самое, что и в лемме 1, решение уравнения (3) при $|x| \geqslant g(|\lambda|)$.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия леммы 1. Тогда решение уравнения* (3)*, удовлетворяющее* (13)*, при* $|x| \geqslant g(|\lambda|)$, $Re\lambda \geqslant \alpha > 0$ *имеет оценку*

$$|y^{(j)}(x,\lambda)| \leqslant c_3 h^{j\frac{\gamma_N}{\gamma_1}}(x) e^{c_4 h^{\frac{\gamma_N}{\gamma_1}}(x)|x|} \tag{21}$$

($j = \overline{0, n-1}$, $c_3 > 0$, $c_4 > 0$).

Доказательство. Пусть $x \in [g(|\lambda|), r]$. Тогда из монотонности $h(x)$ и (12) следует, что $h(r) \geqslant h(x) \geqslant |\lambda|^{\gamma_1}$. Поэтому для элементов матрицы $A(x,\lambda)$ из (8) при тех же значениях x получаем

$$|\Delta_{i+1}(x,\lambda)| \leqslant \sum_{j=0}^{m_i} h^{p_0(d_i - j)}(r)|\lambda|^j \leqslant c_0 h^{p_0 d_i}(r), \tag{22}$$

$i = \overline{0, n-1}$, $c_0 > 0$ — некоторая постоянная, не зависящая от r и λ.

Наряду с системой (11) рассмотрим систему

$$V^{'} = D(r)V, \tag{23}$$

где $V = (V_1, \ldots, V_n)^T$, а неотрицательная матрица $D(r)$ отличается от $A(x,\lambda)$ лишь последней строкой $(c_0 h^{p_0 d_0}(r), \ldots, c_0 h^{p_0 d_{n-1}}(r))$.

Характеристическое уравнение системы (23) имеет вид

$$\mu^n - c_0 \sum_{k=0}^{n-1} h^{p_0 d_k}(r)\mu^k = 0. \tag{24}$$

Покажем, что уравнение (24) имеет положительный корень $\mu_0(r)$ вида

$$\mu_0(r) = a_0 h^{p_0 \gamma_N}(r)(1 + o(1)), \tag{25}$$

где $a_0 > 0$, $o(1) \to 0$ при $r \to \infty$.

Положим в (24) $t = h^{p_0}(r)$, тогда диаграммы Ньютона уравнений (4) и (24) совпадают. Поскольку $D(r)$ — матрица с неотрицательными элементами, то характеристическое уравнение (24) имеет максимальный положительный корень, которому соответствует положительный собственный вектор [1, с. 354]. Далее найдем асимптотику данного корня. Для этого положим в (24) $\mu = at^{\gamma_N}(1+\theta)$, где a — постоянная, θ — новая переменная. Подставив выражение для μ в (24) и разделив его на $t^{n\gamma_N}$, получим

$$a^n(1+\theta)^n - c_0 \sum_{k=0}^{n-1} t^{(d_k + \gamma_N(k-n))} a^k (1+\theta)^k = 0. \tag{26}$$

Из определения чисел d_k и γ_N следует, что

$$\frac{d_k}{n-k} \leqslant \gamma_N \quad (k = \overline{0, n-1}), \tag{27}$$

причем равенство в (27) достигается лишь при $k_{N-1} \leqslant k < n$. Из (27) имеем, что все коэффициенты, стоящие при степенях θ в уравнении (26), стремятся к константам при $t \to \infty$. Кроме того, если a_0 — один из корней уравнения

$$a^{q_N} - \sum_{k \in \Gamma(N) \setminus \{n\}} c_0 a^{k-k_{N-1}} = 0, \tag{28}$$

где $q_N = k_N - k_{N-1}$, то свободный член уравнения (26) есть $o(1)$ $(t \to \infty)$. Тогда (26) имеет корень $\theta = o(1)$ $(r \to \infty)$.

Заметим, что так как $c_0 > 0$, то (28) имеет положительный корень a_0. Формула (25) доказана.

Обозначим $d(r) = (1, \mu_0(r), \ldots, \mu_0^{n-1}(r))^T$ — собственный вектор матрицы $D(r)$. Пусть $b > 0$ — некоторая постоянная. Вектор-функция $V(x, r, \lambda) = bd(r)e^{\mu_0(r)x}$ — положительное решение системы (23). Если $b > 0$ достаточно велико, то для координат $V_j(x, r)$ вектор-функции $V(x, r)$ из (25) при $x = g(|\lambda|)$ получаем оценку

$$V_j(g(|\lambda|), r) \geqslant b(\frac{a_0}{2} h^{p_0 \gamma_N}(r)) e^{\frac{a_0}{2} h^{p_0 \gamma_N}(r) g(|\lambda|)} \geqslant$$

$$\geqslant b(\frac{a_0}{2})^j |\lambda|^{j\gamma_N} e^{\frac{a_0}{2}|\lambda|^{\gamma_N} g(|\lambda|)} \geqslant |y_j(g(|\lambda|), \lambda)| \; (j = \overline{0, n-1}). \tag{29}$$

Из (22) и (29) следует [9, с. 42], что

$$|y_j(x, \lambda)| \leqslant V_j(x, r) \; (j = \overline{0, n-1}) \tag{30}$$

при $g(|\lambda|) \leqslant x \leqslant r$. Из (30) при $x = r$ получаем (21) при $x \geqslant g(|\lambda|)$.

Случай $x \leqslant -g(|\lambda|)$ сводится к предыдущему заменой $-x = t$, $y(x, \lambda) = y(-t, \lambda) = \tilde{y}(t, \lambda)$, так как оценки (8) симметричны относительно начала координат. Лемма 2 доказана.

Из лемм 1 и 2 следует

Теорема 2. *Пусть коэффициенты уравнения* (3) *удовлетворяют условиям* 1) — 3). *Тогда уравнение* (3) *имеет решение* $y(x, \lambda)$, *удовлетворяющее оценке*

$$|y^{(j)}(x, \lambda)| \leqslant c_3 (h^{\frac{\gamma_N}{\gamma_1}}(x) + |\lambda|^{\gamma_N})^j e^{c_4 (h^{\frac{\gamma_N}{\gamma_1}}(x) + |\lambda|^{\gamma_1})|x|}, \tag{31}$$

$j = \overline{0, n-1}$, $-\infty < x < \infty$, $Re\lambda \geqslant \alpha > 0$, c_3, c_4 — *некоторые положительные постоянные, не зависящие ни от* x, *ни от* λ.

Доказательство теоремы следует из оценок (13) и (21), полученных в леммах 1 и 2. Теорема 2 доказана.

3. Доказательство теоремы неединственности

Положим $f(x,\lambda) = c_4(|\lambda|^{\gamma_1} + h^{\frac{\gamma_N}{\gamma_1}}(x))|x|$. Из (9) следует, что можно выбрать столь большое $M > 0$, при котором выполнено

$$f(x,\lambda) \leqslant \frac{1}{2}\int_0^{|x|} H(\xi)d\xi + a_1|x||\lambda|^{\gamma_1} \ (|x| \geqslant M). \tag{32}$$

Определим функцию $s(q)$ равенством

$$H(s(q)) = 2a_1 q^{\gamma_1},\ q = |\lambda|.$$

Применяя неравенство Юнга, получим

$$a_1|x||\lambda|^{\gamma_1} \leqslant a_1|\lambda|^{\gamma_1}s(|\lambda|) + \frac{1}{2}\int_0^{|x|} H(\xi)d\xi. \tag{33}$$

Оценим

$$\phi(\lambda) = \sup_{-\infty<x<\infty}(|D_x^k y(x,\lambda)|\exp\{-|\int_0^x H(\xi)d\xi|\}),\ k = \overline{0,n-1}.$$

Учитывая (31) — (33), для функции $\phi(\lambda)$ получаем оценку

$$\phi(\lambda) \leqslant \exp\{a_1|\lambda|^{\gamma_1}s(|\lambda|)\} = \eta(\lambda). \tag{34}$$

Далее покажем, что

$$\int_1^\infty \frac{\ln|\phi(q)|}{q^2}dq < \infty \quad (q = |\lambda|). \tag{35}$$

Из оценки (34) имеем

$$\int^\infty \frac{\ln|\phi(q)|}{q^2}dq \leqslant a_1\int^\infty q^{\gamma_1-2}s(q)dq.$$

Делая в последнем интеграле замену $x = s(q)$ и учитывая, что $H(s(q)) = 2a_1q^{\gamma_1}$, получим

$$\int_1^\infty \frac{\ln|\phi(q)|}{q^2}dq \leqslant b_1(\frac{1}{1-p_0}xH^{1-p_0}(x)|_1^\infty - \frac{1}{1-p_0}\int_1^\infty H^{1-p_0}(x)dx),$$

откуда с учетом условия сходимости интеграла (6) получаем (35).

Из условия сходимости интеграла (35) в силу критерия Карлемана (см. [7, с. 37]) существует аналитическая при $Re\lambda \geqslant \alpha$ функция $F(\lambda) \neq 0$ такая, что $|F(\lambda)\phi(\lambda)| \leqslant b_2$ при $Re\lambda \geqslant \alpha > 0$, т. е.

$$|F(\lambda)y^{(k)}(x,\lambda)| \leqslant b_3\exp\{|\int_0^x H(\xi)d\xi|\},\ k = \overline{0,n-1}. \tag{36}$$

Очевидно, что $\tilde{y}(x,\lambda) = F(\lambda)y(x,\lambda)$ является решением уравнения (3) при $Re\lambda \geqslant \alpha$.

Подберем $\gamma > 0$ достаточно большим и обозначим

$$U(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}(\alpha + i\tau)^{-\gamma}\exp\{(\alpha + i\tau)t\}\tilde{y}(x,\alpha + i\tau)d\tau.$$

Очевидно, что $U(x,t)$ есть решение (1), а из (34), (36) следует, что она удовлетворяет оценкам (5) и начальным условиям (2) при $f_j(x) = 0\,(j = \overline{0, m-1})$. Теорема 1 доказана.

Библиографический список

1. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М. : Наука, 1988. 576 с.
2. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции. М. : Физматлит, 1958. Вып. 3 : Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. 274 с.
3. *Житомирский Я. И.* Классы единственности решения задачи Коши для линейных уравнений с растущими коэффициентами // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1967. Т. 31, вып. 4. С. 763—782.
4. *Золотарев Г. Н.* Нетривиальные решения задачи Коши с нулевыми начальными условиями // Учен. зап. Иван. гос. пед. ин-та. 1963. Т. 31. С. 29—36.
5. *Косарев Н. Г.* О единственности решения задачи Коши для линейных уравнений с переменными коэффициентами // Качественные и приближенные методы исследования операторных уравнений /Яросл. гос. ун-т. Ярославль, 1977. Вып. 2. С. 141—158.
6. *Косарев Н. Г.* О задаче Коши для линейных уравнений с переменными коэффициентами // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. Иваново, 1999. Вып. 2. С. 86—92.
7. *Мандельбройт С.* Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применения. М. : Изд-во иностр. лит., 1955. 268 с.
8. *Туртин Д. В.* О максимальных классах неединственности решения задачи Коши для линейных уравнений // Изв. вузов. Математика. 2010. Вып. 9. С. 90—93.
9. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М. : Мир, 1970. 720 с.
10. *Чеботарев Н. Г.* Теория алгебраических функций. М. : Гостехиздат, 1948. 396 с.