УДК 512.543

И. А. Варламова, Д. И. Молдаванский

ОБ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ КОНЕЧНЫМИ ГРУППАМИ ГРУПП БАУМСЛАГА — СОЛИТЭРА

Для групп с одним определяющим соотношением, принадлежащих семейству групп Баумслага — Солитэра, рассматриваются условия аппроксимируемости в классе конечных π-групп относительно отношений равенства и сопряженности.

Ключевые слова: группы Баумслага — Солитэра, аппроксимируемость в классе конечных π-групп, аппроксимируемость относительно сопряженности в классе конечных π-групп.

For one-relator groups from the family of Baumslag — Solitar groups the conditions to be residually a finite π-groups and conjugacy separable by finite π-groups are considered.

Key words: Baumslag — Solitar groups, residuallity a finite π-groups, conjugacy separability by finite π-groups.

1. Формулировка результатов

Напомним, что если $\mathcal{K}$ — некоторый класс групп, то группа G называется $\mathcal{K}$-аппроксимируемой ($\mathcal{K}$-аппроксимируемой относительно сопряженности), если для любых различных (соответственно не сопряженных) ее элементов a и b существует гомоморфизм группы G на некоторую группу X из класса $\mathcal{K}$, при котором образы элементов a и b различны (соответственно не сопряжены в группе X).

Через $\mathcal{F}$ будет обозначаться класс всех конечных групп, и для некоторого простого числа p и некоторого множества π простых чисел символы $\mathcal{F}_p$ и $\mathcal{F}_\pi$ будут обозначать соответственно класс всех конечных p-групп и класс всех конечных π-групп. Свойство $\mathcal{F}$-аппроксимируемости (относительно сопряженности) группы совпадает, разумеется, с классическим свойством финитной аппроксимируемости (относительно сопряженности).

Группами Баумслага — Солитэра называют группы вида

$$G(m,n) = \langle a, b;\ a^{-1}b^m a = b^n\rangle,$$

где m и n — ненулевые целые числа, причем, поскольку группы $G(m,n)$, $G(n,m)$ и $G(-m,-n)$ изоморфны между собой, без потери общности можно считать, что $|n| \geqslant m > 0$ (и это по умолчанию предполагается всюду ниже). Очевидно, что произвольная группа вида $G(m,n)$ является HNN-расширением с проходной буквой a бесконечной циклической группы B, порождаемой элементом b, с подгруппами B^m и B^n, связанными в соответствии с изоморфизмом, переводящим элемент b^m в элемент b^n.

Напомним (см. [10, 12]), что группа $G(m,n)$ $\mathcal{F}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда или $m = 1$, или $|n| = m$. Известно, что каждая $\mathcal{F}$-аппроксимируемая группа Баумслага — Солитэра является также $\mathcal{F}$-аппроксимируемой относительно сопряженности: для групп вида $G(1,n)$ это было доказано в [5], а для групп $G(m,n)$, где $|n| = m$, может быть выведено из результата работы [13] или из его обобщения, полученного в [9]. Здесь будет получен результат, формулировка и доказательство которого следуют идеям статьи М. И. Каргаполова [3] и непосредственным следствием которого является $\mathcal{F}$-аппроксимируемость относительно сопряженности групп $G(m,n)$ при $|n| = m$.

Теорема 1. *Пусть группа G обладает нормальной подгруппой U, являющейся бесконечной циклической группой, и пусть для любого целого числа $r > 0$ фактор-группа G/U^r группы G по подгруппе U^r $\mathcal{F}$-аппроксимируема относительно сопряженности. Тогда и группа G является $\mathcal{F}$-аппроксимируемой относительно сопряженности.*

Для вывода из этой теоремы утверждения об $\mathcal{F}$-аппроксимируемости относительно сопряженности групп $G(m,n)$ при $|n| = m$ достаточно заметить, что в этом случае подгруппа $U = B^m$ группы $G(m,n)$ нормальна и что для любого целого числа $r > 0$ фактор-группа $G(m,n)/U^r = \langle a,\, b;\ a^{-1}b^m a = b^n,\, b^{mr} = 1\rangle$ группы $G(m,n)$ по подгруппе U^r является HNN-расширением конечной циклической группы порядка mr и потому [11] $\mathcal{F}$-аппроксимируема относительно сопряженности.

В работе [7] было показано, что для произвольного простого числа p группа $G(m,n)$ является $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой тогда и только тогда, когда или $m = 1$ и $n \equiv 1 \pmod p$, или $|n| = m = p^r$ для некоторого $r \geqslant 0$, причем если $n = -m$, то $p = 2$. В первом случае это утверждение было обобщено в [2] следующим образом: для произвольного множества π простых чисел группа $G(1,n)$ является $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемой тогда и только тогда, когда существует π-число $l > 1$ такое, что l взаимно просто с n и порядок числа n по модулю l также является π-числом.

Для групп вида $G(m,n)$, где $|n| = m$, общий критерий $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости допускает более прозрачную формулировку:

Теорема 2. *Для любого множества π простых чисел группа $G(m,m)$ является $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемой тогда и только тогда, когда m является π-числом, а группа $G(m,-m)$ является $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемой тогда и только тогда, когда m является π-числом и множество π содержит число 2. Кроме того, если группа $G(m,n)$, где $|n| = m$, $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема, то она является и $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемой относительно сопряженности.*

В связи с последним утверждением этой теоремы отметим, что для любого целого числа n, отличного от 0 и ± 1, и для любого множества π, состоящего из двух простых чисел, группа $G(1,n)$ не является $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемой относительно сопряженности [1]. Отсюда и из результатов работы [2] следует существование таких 2-элементных множеств π, при которых группа $G(1,n)$ является $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемой, но не является $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемой относительно сопряженности.

2. Доказательство теоремы 1

Пусть U — нормальная подгруппа группы G, являющаяся бесконечной циклической группой с порождающим u, и пусть для любого целого числа $r > 0$ фактор-группа G/U^r $\mathcal{F}$-аппроксимируема относительно сопряженности.

Для произвольного элемента $g \in G$ введем в рассмотрение следующие два множества целых чисел:

$$K_g = \bigl\{k \in \mathbb{Z} \bigm| (\exists x \in G)(x^{-1}gx = gu^k\bigr\} \quad \text{и}$$
$$H_g = \bigl\{k \in \mathbb{Z} \bigm| (\exists x \in G)(x^{-1}gx = gu^k \wedge xu = ux\bigr\}.$$

Лемма. *Для любого элемента $g \in G$ множество H_g является подгруппой аддитивной группы $\mathbb{Z}$ целых чисел. Если $K_g \neq H_g$ и число $k_0 \in K_g$ не принадлежит подгруппе H_g, то множество K_g совпадает с объединением подгруппы H_g и смежного класса $H_g + k_0$.*

В самом деле, включение $0 \in H_g$ очевидно. Пусть числа k и l принадлежат множеству H_g, т. е. для подходящих элементов x и y группы G, перестановочных с элементом u, выполнены равенства $x^{-1}gx = gu^k$ и $y^{-1}gy = gu^l$. Так как тогда $xgx^{-1} = gu^{-k}$ и $(xy)^{-1}g(xy) = gu^{k+l}$, числа $-k$ и $k + l$ принадлежат подмножеству H_g. Следовательно, $H_g \leqslant \mathbb{Z}$.

Поскольку нормальная подгруппа U группы G является бесконечной циклической группой, то для любого элемента $x \in G$ мы должны иметь $x^{-1}ux = u^{\pm 1}$. Отсюда легко следует, что для любого числа $k \in K_g$ справедливо включение $H_g + k \subseteq K_g$. С другой стороны, если $K_g \neq H_g$ и k_0 — фиксированный элемент множества K_g, не принадлежащий подгруппе H_g, то произвольное число $k \in K_g \setminus H_g$ лежит в смежном классе $H_g + k_0$.

Действительно, для подходящих элементов x и y группы G мы должны иметь $x^{-1}gx = gu^{k_0}$ и $y^{-1}gy = gu^k$, причем $x^{-1}ux = u^{-1}$ и $y^{-1}uy = u^{-1}$. Отсюда

$$(xy)^{-1}g(xy) = y^{-1}(gu^{k_0})y = gu^{k-k_0}$$

и

$$(xy)^{-1}u(xy) = u,$$

так что $k - k_0 \in H_g$. Лемма доказана.

Перейдем теперь непосредственно к доказательству теоремы 1. Пусть f и g — произвольные элементы группы G, не сопряженные в этой группе. Нам достаточно указать такой гомоморфизм ρ группы G в некоторую $\mathcal{F}$-аппроксимируемую относительно сопряженности группу X, при котором элементы $f\rho$ и $g\rho$ не сопряжены в группе X.

Поскольку фактор-группа G/U по условию является $\mathcal{F}$-аппроксимируемой относительно сопряженности, в случае, когда ее элементы fU и gU не сопряжены, в качестве ρ можно взять естественный гомоморфизм группы G на группу G/U. Поэтому нам остается рассмотреть случай, когда элементы fU и gU сопряжены в группе G/U. Очевидно, что это имеет место тогда и только тогда, когда в группе G элементы f

и g сопряжены по модулю подгруппы U, т. е. для некоторого элемента $x \in G$ и некоторого целого числа r выполнено равенство $x^{-1}fx = gu^r$. Поскольку в любом гомоморфном образе группы G образы элементов f и gu^r будут сопряжены, гомоморфизм с указанными свойствами достаточно построить для элементов g и gu^r.

Так как элементы g и gu^r не сопряжены в группе G, число r не принадлежит множеству K_g, введенному выше. Покажем, что существует целое число $k > 0$ такое, что для любого целого числа t число $r + kt$ не принадлежит множеству K_g. Как и выше, это равносильно тому, что в фактор-группе G/U^k элементы gU^k и $(gu^r)U^k$ не являются сопряженными, и потому в силу условия теоремы 1 естественный гомоморфизм группы G на фактор-группу G/U^k будет искомым.

Действительно, из леммы следует, что $H_g = s\mathbb{Z}$ для некоторого целого числа $s \geqslant 0$. Если для некоторого целого числа t число $r + st$ принадлежит множеству K_g, то (по лемме) либо $r + st \in s\mathbb{Z}$, и тогда $r \in s\mathbb{Z}$, либо $r + st \in s\mathbb{Z} + k_0$ (где $k_0 \in K_g \setminus H_g$), и тогда $r \in s\mathbb{Z} + k_0$. Таким образом, из того, что при некотором t число $r + st$ принадлежит множеству K_g, следует, что и число r принадлежит множеству K_g, а это невозможно. Следовательно, при $s > 0$ число $k = s$ является искомым.

Если $s = 0$, то $H_g = \{0\}$, и потому, в соответствии с леммой, либо $K_g = \{0\}$, либо $K_g = \{0, k_0\}$ для некоторого $k_0 \neq 0$. Поскольку число r не принадлежит множеству K_g, в обоих случаях $r \neq 0$, а во втором случае к тому же $r \neq k_0$. Поэтому существует целое число $k > 0$, не являющееся делителем числа r и (во втором случае) числа $r - k_0$. Легко видеть, что при таком выборе k число $r + kt$ при любом целом t не входит в множество K_g. Теорема 1 доказана.

2. Доказательство теоремы 2

Предположим сначала, что для некоторого множества простых чисел π группа $G(m, m\varepsilon)$, где $m > 0$ и $\varepsilon = \pm 1$, является $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемой и что, тем не менее, m не является π-числом, т. е. $m = qm_1$ для некоторого простого числа q, не входящего в множество π. Покажем, что тогда коммутатор $w = \left[a^{-1}b^{m_1}a, b\right]$ является неединичным элементом группы $G(m, m\varepsilon)$, переходящим в единицу при любом гомоморфизме этой группы в конечную π-группу, что и будет противоречить предположению об $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости группы $G(m, m\varepsilon)$.

Поскольку число m не является, очевидно, делителем чисел 1 и m_1, элементы b и b^{m_1} не входят в подгруппу B^m базовой группы B HNN-расширения $G(m, m\varepsilon)$. Поэтому запись

$$w = a^{-1}b^{-m_1}a\,b^{-1}a^{-1}b^{m_1}a\,b$$

элемента w является приведенной в этом HNN-расширении, так что в силу леммы Бриттона (см., напр., [6, с. 249]) $w \neq 1$.

Пусть теперь φ — гомоморфизм группы $G(m, m\varepsilon)$ на конечную π-группу H. Если $x = a\varphi$ и $y = b\varphi$, то в группе H выполняется равенство $x^{-1}y^m x = y^{m\varepsilon}$. Так как порядок r группы H является π-числом и потому взаимно прост с q, существует целое число s такое, что $qs \equiv 1 \pmod r$, и, значит, для любого элемента $h \in H$ выполнено равенство $h = h^{qs}$. Отсюда

$$x^{-1}y^{m_1}x = x^{-1}(y^{qs})^{m_1}x = (x^{-1}y^m x)^s = y^{ms\varepsilon},$$

и потому $w\varphi = \left[x^{-1}y^{m_1}x, y\right] = \left[y^{ms\varepsilon}, y\right] = 1$.

Итак, мы показали, что если группа $G(m, m\varepsilon)$ является $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемой, то m должно быть π-числом. Покажем теперь, что если группа $G(m, m\varepsilon)$ является $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемой и $\varepsilon = -1$, то $2 \in \pi$.

Очевидная индукция показывает, что для любого целого числа $k > 0$ в группе $G(m, m\varepsilon)$ выполнено равенство $a^{-k}b^m a^k = b^{m\varepsilon^k}$. Поэтому если снова φ — гомоморфизм группы $G(m, m\varepsilon)$ на конечную π-группу H и $x = a\varphi$, $y = b\varphi$, то в группе H для любого целого числа $k > 0$ имеет место равенство $x^{-k}y^m x^k = y^{m\varepsilon^k}$. Если число k является порядком элемента x, то это равенство принимает вид $y^m = y^{m\varepsilon^k}$. Поэтому если $\varepsilon = -1$ и число 2 не входит в множество π, то ввиду нечетности числа k имеем $y^{2m} = 1$. Таким образом, если $2 \notin \pi$, неединичный элемент b^{2m} группы $G(m, -m)$ переходит в единицу при любом ее гомоморфизме на конечную π-группу, так что группа $G(m, -m)$ не является $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемой.

Так как $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемая относительно сопряженности группа является $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемой, остается показать, что для любого множества простых чисел π и любого π-числа m группа $G(m, m)$ является $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемой относительно сопряженности, а если множество π содержит число 2, то для любого π-числа m группа $G(m, -m)$ является $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемой относительно сопряженности. Предварительно сформулируем три вспомогательных утверждения.

В. Н. Ремесленников [8] доказал, что свободное произведение произвольного семейства групп, $\mathcal{F}$-аппроксимируемых относительно сопряженности, является группой $\mathcal{F}$-аппроксимируемой относительно сопряженности. Практически не меняя его рассуждений, можно доказать

Предложение 1. *Для любого множества простых чисел π свободное произведение произвольного семейства $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемых относительно сопряженности групп является группой, $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемой относительно сопряженности.*

Следующее утверждение, по-видимому, хорошо известно и может быть без труда доказано с использованием замечания, вытекающего из теоремы Ремака (см., напр., [4, теорема 4.3.9]): в произвольной группе пересечение конечного семейства нормальных подгрупп конечного π-индекса является нормальной подгруппой конечного π-индекса.

Предложение 2. *Пусть H — нормальная подгруппа конечного π-индекса группы G. Если группа H $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема относительно сопряженности, то для любых двух элементов f и g из подгруппы H, не сопряженных в группе G, существует гомоморфизм φ группы G на конечную π-группу X такой, что элементы $f\varphi$ и $g\varphi$ не сопряжены в группе X.*

Предложение 3. *Пусть группа G содержит нормальную подгруппу U, пересечение которой с коммутантом G' группы G тривиально. Предположим еще, что фактор-группа G/U $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема относительно сопряженности и фактор-группа G/G' $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема. Тогда группа G $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема относительно сопряженности.*

Доказательство. Требуется показать, что для любых элементов f и g группы G, не сопряженных в этой группе, существует гомоморфизм φ группы G на конечную π-группу X такой, что элементы $f\varphi$ и $g\varphi$ не сопряжены в группе X.

Если элементы f и g не сопряжены по модулю подгруппы U, то существование такого гомоморфизма является очевидным следствием $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости относительно сопряженности фактор-группы G/U.

Если же элементы f и g сопряжены по модулю подгруппы U, то $x^{-1}fx = gu$ для некоторых $x \in G$ и $u \in U$, причем, поскольку f и g не сопряжены в группе G, $u \neq 1$. Поэтому элемент u не входит в коммутант G' группы G, и, т. к. фактор-группа G/G' $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема, существует нормальная подгруппа N конечного π-индекса группы G, содержащая коммутант G' и не содержащая элемента u. Утверждается, что естественный гомоморфизм группы G на фактор-группу G/N является искомым, т. е. элементы f и g не сопряжены по модулю подгруппы N.

Действительно, в противном случае и элементы g и gu будут сопряжены по модулю N, т. е., поскольку фактор-группа G/N абелева,

$$g \equiv gu \pmod{N}.$$

Но тогда $u \in N$, что противоречит выбору подгруппы N. Предложение 3 доказано.

Легко понять, что для любого множества π простых чисел и произвольного π-числа $m > 0$ $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемость относительно сопряженности группы $G(m, m)$ является непосредственным следствием предложения 3.

В самом деле, подгруппа $U = B^m$ группы $G(m, m)$ является нормальной (и даже центральной) подгруппой этой группы. Фактор-группа $G(m, m)/U$ группы $G(m, m)$ по подгруппе U есть свободное произведение бесконечной циклической группы и конечной циклической группы порядка m и в силу предложения 1 $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема относительно сопряженности. Фактор-группа группы $G(m, m)$ по ее коммутанту является, очевидно, свободной абелевой группой, свободно порождаемой образами элементов a и b, и потому $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема. Поскольку естественный гомоморфизм группы $G(m, m)$ на ее фактор-группу по коммутанту действует инъективно на подгруппе B, пересечение U с коммутантом тривиально. Таким образом, все условия предложения 3 действительно выполнены.

Докажем теперь $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемость относительно сопряженности группы $G = G(m, -m)$ при условии, что множество π содержит число 2 и m является π-числом.

Фактор-группа G/G' группы G по ее коммутанту имеет, очевидно, представление порождающими и определяющими соотношениями вида $\langle a, b;\ ab = ba,\ b^{2m} = 1 \rangle$ и потому является $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемой. Тем не менее из вида этого представления легко следует, что $G' \cap U = U^2 = B^{2m}$ (где снова $U = B^m$), так что, в частности, непосредственное применение предложения 3 здесь невозможно.

Пусть f и g — не сопряженные элементы группы G. Требуется показать, что их образы при некотором гомоморфизме группы G на конечную π-группу не сопряжены в этой группе. Поскольку фактор-группа G/U является (в силу предложения 1) $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемой, в случае, когда эти элементы не сопряжены по модулю подгруппы U, существование такого гомоморфизма очевидно. Поэтому далее будем считать, что $x^{-1}fx = gb^{mk}$ для некоторого элемента $x \in G$ и некоторого целого числа k. Очевидно, что элементы g и gb^{mk} не сопряжены в группе G и что гомоморфизм с указанными свойствами достаточно построить для этой пары элементов.

Так как $U = B^m$ — бесконечная циклическая нормальная подгруппа группы G, для элемента g должно выполняться равенство вида $g^{-1}b^m g = b^{\pm m}$, и мы рассмотрим сначала случай, когда $g^{-1}b^m g = b^{-m}$. Поскольку тогда для любого целого числа l имеем

$$b^{-ml} g b^{ml} = g \cdot g^{-1} b^{-ml} g b^{ml} = g b^{2ml},$$

а элементы g и gb^{mk} не являются сопряженными, число k должно быть нечетным. Поэтому элемент b^{mk} не принадлежит коммутанту группы G, и, т. к. фактор-группа G/G' является $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемой, в группе G найдется нормальная подгруппа N конечного π-индекса, содержащая коммутант G' и не содержащая элемента b^{mk}. Естественный гомоморфизм группы G на фактор-группу G/N является искомым: поскольку группа G/N абелева, сопряженность элементов g и gb^{mk} по модулю N означала бы их совпадение по модулю N, что невозможно, т. к. $b^{mk} \notin N$.

Предположим теперь, что $g^{-1}b^m g = b^m$, т. е. элемент g принадлежит централизатору C в группе G элемента b^m. Индекс подгруппы C в группе G равен 2, и нетрудно показать (например, используя метод Рейдемейстера — Шрейера (см. [6, с. 147]) применительно к шрейеровской системе $\{1, a\}$ представителей смежных классов группы G по подгруппе C), что подгруппа C порождается тремя элементами: b, $c = a^2$ и $d = aba^{-1}$ — и в этой системе порождающих определяется двумя соотношениями: $cb^m = b^m c$ и $b^m = d^{-m}$.

Используя это описание группы C, легко понять, что для нее и ее подгруппы $U = B^m$ выполнены все условия предложения 3. В самом деле, фактор-группа C/C' группы C по ее коммутанту является прямым произведением двух бесконечных циклических групп, порождаемых образами элементов b и c, и циклической группы порядка m, порождаемой образом элемента bd. Следовательно, группа C/C' $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема и $U \cap C' = 1$. Фактор-группа G/U является свободным произведением бесконечной циклической группы, порождаемой образом элемента c, и двух циклических групп порядка m, порождаемых образами элементов b и d, и потому $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема относительно сопряженности.

Таким образом, в силу предложения 3 группа C является $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемой относительно сопряженности. Так как C — нормальная подгруппа конечного π-индекса группы G и элементы g и gb^{mk}, лежащие в подгруппе C, не сопряжены в группе G, существование для этих элементов гомоморфизма с требуемыми свойствами вытекает из предложения 2. Теорема 2 доказана.

Библиографический список

1. *Иванова Е. А., Молдаванский Д. И.* Об аппроксимируемости относительно сопряженности конечными группами разрешимых групп Баумслага — Солитэра // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер.: Естественные, общественные науки. 2011. Вып. 2. С. 129—136.
2. *Иванова О. А., Молдаванский Д. И.* Аппроксимируемость конечными π-группами некоторых групп с одним определяющим соотношением // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Сер.: Математика. Вып. 6 (2008). С. 51—58.
3. *Каргаполов М. И.* Финитная аппроксимируемость сверхразрешимых групп относительно сопряженности // Алгебра и логика. 1967. Т. 6, № 1. С. 63—68.
4. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. 5-е изд., стер. СПб. : Лань, 2009. 287 с.
5. *Кравченко Н. В., Молдаванский Д. И., Фролова Е. Н.* Финитная аппроксимируемость относительно сопряженности некоторых групп с одним определяющим соотношением // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. Тул. гос. пед. ин-т. Тула, 1986. С. 81—91.
6. *Линдон Р., Шупп П.* Комбинаторная теория групп. М. : Мир, 1980. 447 с.
7. *Молдаванский Д. И.* Аппроксимируемость конечными p-группами HNN-расширений // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер.: Биология. Химия. Физика. Математика. 2000. Вып. 3. С. 129—140.
8. *Ремесленников В. Н.* Финитная аппроксимируемость групп относительно сопряженности // Сиб. мат. журн. 1971. Т. 12, № 5. С. 1085—1099.
9. *Сенкевич О. Е.* Финитная аппроксимируемость относительно сопряженности некоторых HNN-расширений групп // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер.: Биология. Химия. Физика. Математика. 2006. Вып. 3. С. 133—146.
10. *Baumslag G., Solitar D.* Some two-generator one-relator non-Hopfian groups // Bull. Amer. Math. Soc. 1962. Vol. 68. P. 199—201.
11. *Dyer J. L.* Separating conjugates in amalgamating free products and HNN-extensions // J. Austral. Math. Soc. 1980. Vol. 29, № 1. P. 35—51.
12. *Meskin S.* Nonresidually finite one-relator groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1972. Vol. 164. P. 105—114.
13. *Wong P. C., Tang C. K.* Conjugacy separability of certain HNN extensions // Algebra Colloq. 1998. Vol. 5, № 1. P. 25—31.