УДК 512.543

А. С. Гудовщикова, Е. В. Соколов

НЕКОТОРЫЕ АППРОКСИМАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА ОБОБЩЕННЫХ СВОБОДНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ДВУХ ГРУПП

При определенных ограничениях, накладываемых на класс групп $\mathcal{C}$, получено достаточное условие аппроксимируемости этим классом обобщенного свободного произведения G двух групп, а также описание отделимых в классе $\mathcal{C}$ циклических подгрупп группы G.

Ключевые слова: обобщенные свободные произведения, отделимость циклических подгрупп.

Let $\mathcal{C}$ be a class of groups satisfying certain conditions. The sufficient condition is proved for a generalized free product of two groups to be residually $\mathcal{C}$. The description of $\mathcal{C}$-separable cyclic subgroups of this construction is also obtained.

Key words: generalized free product, cyclic subgroup separability.

§ 1. Введение. Формулировка результатов

Будем говорить, что подгруппа Y некоторой группы X отделима в X семейством Σ нормальных подгрупп этой группы, если $\bigcap_{N\in\Sigma} YN = Y$. Выбирая в качестве Σ семейство всех нормальных подгрупп группы X, фактор-группы по которым принадлежат некоторому классу групп $\mathcal{C}$, мы получаем определение $\mathcal{C}$-отделимой подгруппы. Напомним также, что группа X называется $\mathcal{C}$-аппроксимируемой, если ее единичная подгруппа $\mathcal{C}$-отделима.

Большинство результатов, касающихся аппроксимационных свойств обобщенных свободных произведений групп, получено с использованием методики, впервые предложенной Г. Баумслагом [7] для исследования финитной аппроксимируемости и распространенной затем на изучение других аппроксимационных свойств и аппроксимирующих классов групп. Цель настоящей статьи состоит в указании условий, которые достаточно наложить на класс групп $\mathcal{C}$ для того, чтобы упомянутая выше методика оказалась применимой для изучения $\mathcal{C}$-аппроксимируемости обобщенных свободных произведений и $\mathcal{C}$-отделимости их циклических подгрупп.

Если X — некоторая группа, то, следуя работе [3], через $\mathcal{C}^*(X)$ будем обозначать семейство всех ко-$\mathcal{C}$ подгрупп группы X, т. е. таких нормальных подгрупп этой группы, фактор-группы по которым принадлежат классу $\mathcal{C}$. Если Y — подгруппа группы X, то через $\mathcal{C}^*(X, Y)$ обозначим множество подгрупп

$$\{N \cap Y \mid N \in \mathcal{C}^*(X)\}.$$

Если все группы из класса $\mathcal{C}$ — периодические, то через $\pi(\mathcal{C})$ будем обозначать множество простых делителей порядков их элементов. Если же класс $\mathcal{C}$ содержит хотя бы одну непериодическую группу, положим $\pi(\mathcal{C})$ равным множеству всех простых чисел. В обоих случаях через $\pi(\mathcal{C})'$ будем обозначать множество всех простых чисел, не принадлежащих $\pi(\mathcal{C})$.

Напомним, что подгруппа Y некоторой группы X называется $\pi(\mathcal{C})'$-изолированной в X, если для любого элемента $x \in X \backslash Y$ и для любого простого числа $q \in \pi(\mathcal{C})'$ из включения $x^q \in Y$ вытекает, что $x \in Y$. Понятия $\mathcal{C}$-отделимости и $\pi(\mathcal{C})'$-изолированности тесно связаны. Как показывает предложение 2.1, приводимое ниже, каждая $\mathcal{C}$-отделимая подгруппа является $\pi(\mathcal{C})'$-изолированной. Поэтому при изучении $\mathcal{C}$-отделимости мы всегда будем ограничиваться рассмотрением $\pi(\mathcal{C})'$-изолированных подгрупп.

В то же время очевидно, что если $\pi(\mathcal{C})$ совпадает с множеством всех простых чисел, то каждая подгруппа оказывается $\pi(\mathcal{C})'$-изолированной. Таким образом, для любого класса групп $\mathcal{C}$, содержащего хотя бы одну непериодическую группу, требование $\pi(\mathcal{C})'$-изолированности подгруппы ровным счетом ничего не означает.

Пусть далее G обозначает свободное произведение некоторых групп A и B с подгруппами H и K, объединенными относительно изоморфизма $\varphi : H \to K$. Через $\Delta_{\mathcal{C}}(G, A)$ ($\Delta_{\mathcal{C}}(G, B)$) мы будем обозначать семейство $\pi(\mathcal{C})'$-изолированных циклических подгрупп группы A (группы B), не являющихся отделимыми семейством $\mathcal{C}^*(G, A)$ (соответственно семейством $\mathcal{C}^*(G, B)$). Основным результатом работы является следующая

Теорема. *Пусть $\mathcal{C}$ — класс групп, содержащий хотя бы одну неединичную группу, подгруппы 1 и H отделимы в группе A семейством $\mathcal{C}^*(G, A)$, подгруппы 1 и K отделимы в группе B семейством $\mathcal{C}^*(G, B)$, и пусть выполняется следующее утверждение:*

$$\forall X, Y \in \mathcal{C}^*(G)\ \exists Z \in \mathcal{C}^*(G)\ Z \leqslant X \cap Y. \qquad (a)$$

1. Если произвольное расширение свободной группы при помощи $\mathcal{C}$-группы $\mathcal{C}$-аппроксимируемо (b), то и группа G является $\mathcal{C}$-аппроксимируемой.

2. Если в произвольном расширении свободной группы при помощи $\mathcal{C}$-группы все $\pi(\mathcal{C})'$-изолированные циклические подгруппы $\mathcal{C}$-отделимы (c), то $\pi(\mathcal{C})'$-изолированная циклическая подгруппа группы G $\mathcal{C}$-отделима в этой группе тогда и только тогда, когда она не сопряжена ни с какой подгруппой из семейства $\Delta_{\mathcal{C}}(G, A) \cup \Delta_{\mathcal{C}}(G, B)$.

В работе [1] аналогичное достаточное условие аппроксимируемости группы G получено в предположении, что аппроксимирующий класс является корневым. Напомним [7], что класс групп $\mathcal{C}$ называется корневым, если он замкнут относительно взятия подгрупп и для любой группы X выполняется следующее условие:

$$\forall Y \in \mathcal{C}^*(X)\ \forall Z \in \mathcal{C}^*(Y)\ \exists T \in \mathcal{C}^*(X)\ T \leqslant Z. \qquad (d)$$

В работе [2] установлено, что для произвольного корневого класса групп имеют место условия (a) и (b). Используя идеи этой работы и некоторые утверждения из статьи [4], нетрудно показать, что и условие (c) выполняется для любого корневого класса*. Таким образом, сформулированная теорема обобщает упомянутое выше достаточное условие из работы [1].

Отметим при этом, что существуют классы групп, удовлетворяющие условиям (a) — (c), но не являющиеся корневыми. В качестве примера можно привести класс $\mathcal{PF}$ полисвободных групп, т. е. групп, обладающих субнормальным рядом со свободными факторами. Для него утверждения (b) и (c) выполняются очевидным образом (т. к. расширение свободной группы при помощи полисвободной само является полисвободной группой), а условие (a) легко получается с помощью теоремы Ремака из замкнутости класса $\mathcal{PF}$ относительно взятия подгрупп и прямых произведений конечного числа сомножителей. В то же время условие (d) для полисвободной группы может быть неверно, как показывает следующий

Пример. Пусть Y — прямое произведение счетного числа бесконечных циклических групп с порождающими y_i, $i \in \mathbb{Z}$, σ — автоморфизм группы Y, переводящий y_i в y_{i+1}, и X — расширение группы Y посредством бесконечной циклической группы, порожденной автоморфизмом σ. Заметим, что если полисвободная группа абелева, то она является полициклической и, в частности, конечно порожденной. Отсюда следует, что подгруппа Y, а вместе с ней и группа X классу $\mathcal{PF}$ не принадлежат.

Обозначим далее через Z подгруппу группы Y, порожденную элементами y_i, $i \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Тогда $X/Y \cong Y/Z \cong \mathbb{Z}$, и потому $Y \in \mathcal{PF}^*(X)$ и $Z \in \mathcal{PF}^*(Y)$. Заметим теперь, что если нормальная подгруппа T группы X лежит в Z, то она должна содержаться и во всех подгруппах, сопряженных с Z в группе X. Каждая такая подгруппа имеет вид $Z\sigma^k$ для подходящего $k \in \mathbb{Z}$ и порождается элементами y_i, $i \in \mathbb{Z}\backslash\{k\}$. Легко видеть, что пересечение всех этих подгрупп тривиально. Стало быть, $T = 1$ и в силу доказанного выше $T \notin \mathcal{PF}^*(X)$.

Таким образом, утверждение (d) для группы X не выполняется.

§ 2. $\mathcal{C}$-отделимость и $\pi(\mathcal{C})'$-изолированность

В этом параграфе мы докажем несколько вспомогательных утверждений, касающихся извлечения корней $\pi(\mathcal{C})'$-степеней.

Предложение 2.1. *Каждая $\mathcal{C}$-отделимая подгруппа является $\pi(\mathcal{C})'$-изолированной. В частности, произвольная $\mathcal{C}$-аппроксимируемая группа не имеет $\pi(\mathcal{C})'$-кручения.*

Доказательство. В силу сделанного во Введении замечания утверждение предложения тривиально, если класс $\mathcal{C}$ содержит хотя бы одну

*См. статью Е. В. Соколова “Об отделимости циклических подгрупп свободных групп корневыми классами групп”, принятую к печати в журнале “Математика и ее приложения” (Иваново).

непериодическую группу. Поэтому далее мы будем считать, что $\mathcal{C}$ состоит лишь из периодических групп.

Предположим, что подгруппа Y группы X не является $\pi(\mathcal{C})'$-изолированной и $x \in X$ — такой элемент, что $x \notin Y$, но $x^q \in Y$ для некоторого числа $q \in \pi(\mathcal{C})'$. Пусть также N — произвольная подгруппа из семейства $\mathcal{C}^*(X)$. Так как $X/N \in \mathcal{C}$, то порядок n элемента x по модулю подгруппы N конечен и является $\pi(\mathcal{C})$-числом. Значит, найдется такое натуральное m, что $qm \equiv 1 \pmod{n}$ и, как следствие, $x \equiv x^{qm} \pmod{N}$. Но тогда $x \in YN$ и, поскольку подгруппа N была выбрана произвольной, подгруппа Y не является $\mathcal{C}$-отделимой в группе X.

Предложение 2.2. *Пусть группа X представляет собой расширение свободной группы Y при помощи $\mathcal{C}$-группы. Если все $\pi(\mathcal{C})'$-изолированные циклические подгруппы группы X $\mathcal{C}$-отделимы, то группа X $\mathcal{C}$-аппроксимируема.*

Доказательство. Если класс $\mathcal{C}$ содержит хотя бы одну непериодическую группу, то все циклические подгруппы группы X, в том числе единичная, являются $\pi(\mathcal{C})'$-изолированными и потому $\mathcal{C}$-отделимыми.

Пусть класс $\mathcal{C}$ состоит из периодических групп. Произвольная конечная циклическая подгруппа группы X тривиально пересекается с подгруппой Y и, следовательно, изоморфно вкладывается в фактор-группу X/Y. Поскольку эта фактор-группа принадлежит классу $\mathcal{C}$, порядок указанной циклической подгруппы является $\pi(\mathcal{C})$-числом. Таким образом, группа X не имеет $\pi(\mathcal{C})'$-кручения и ее единичная подгруппа, как и в первом случае, оказывается $\pi(\mathcal{C})'$-изолированной и $\mathcal{C}$-отделимой.

Пусть Y — подгруппа некоторой группы X. Наименьшую по включению $\pi(\mathcal{C})'$-изолированную подгруппу группы X, содержащую Y, будем называть $\pi(\mathcal{C})'$-изолятором подгруппы Y в группе X и обозначать $\pi(\mathcal{C})'$-$\mathrm{Is}(X,Y)$. Очевидно, что подгруппа $\pi(\mathcal{C})'$-$\mathrm{Is}(X,Y)$ содержит множество всех корней $\pi(\mathcal{C})'$-степеней, извлекающихся из элементов подгруппы Y в группе X. Хорошо известно (см., напр., [5, теорема 4.5]), что в локально нильпотентной группе указанное множество образует подгруппу и, следовательно, совпадает с $\pi(\mathcal{C})'$-изолятором. Этот факт позволяет доказать

Предложение 2.3. *В $\mathcal{C}$-аппроксимируемой группе $\pi(\mathcal{C})'$-изолятор произвольной локально циклической подгруппы является локально циклической группой.*

Доказательство. Пусть X — $\mathcal{C}$-аппроксимируемая группа и Y — ее локально циклическая подгруппа. Покажем сначала, что $\pi(\mathcal{C})'$-изолятор подгруппы Y в группе X является абелевой подгруппой.

Действительно, пусть x, y — произвольные элементы подгруппы $\pi(\mathcal{C})'$-$\mathrm{Is}(X,Y)$ и $z = [x,y]$. Пусть также N — некоторая подгруппа из семейства $\mathcal{C}^*(X)$. Так как, очевидно, $YN \subseteq \bigcap_{M \in \mathcal{C}^*(X)} YNM \subseteq YN$, то подгруппа YN $\mathcal{C}$-отделима в группе X и потому $\pi(\mathcal{C})'$-изолирована в ней. Следовательно, $\pi(\mathcal{C})'$-$\mathrm{Is}(X,Y) \leqslant YN$ и $xN, yN \in YN/N$. Но подгруппа

YN/N абелева, поэтому $zN = [xN, yN] = 1$ и $z \in N$. Ввиду произвольности выбора подгруппы N и $\mathcal{C}$-аппроксимируемости группы X отсюда вытекает, что $z = 1$.

Лемма. *Пусть $x, y \in \pi(\mathcal{C})'\text{-Is}(X, Y)$ и $y^q \in \langle x \rangle$ для некоторого $\pi(\mathcal{C})'$-числа q. Тогда подгруппа $\langle x, y \rangle$ является циклической.*

Доказательство. Пусть $y^q = x^k$. Не ограничивая общности, мы можем считать, что число q является простым. Поэтому возможны лишь два случая: $q|k$ и $(k, q) = 1$.

Если $k = qk'$, то ввиду доказанной выше перестановочности элементов x и y $(yx^{-k'})^q = 1$. Но группа X $\mathcal{C}$-аппроксимируема и, стало быть, не имеет $\pi(\mathcal{C})'$-кручения. Поэтому $y = x^{k'}$ и $\langle x, y \rangle = \langle x \rangle$.

Если же $(k, q) = 1$, то $ku + qv = 1$ для некоторых целых чисел u, v, и опять в силу перестановочности элементов x и y

$$x = x^{ku+qv} = y^{qu}x^{qv} = (y^u x^v)^q,$$
$$y = y^{ku+qv} = y^{ku}x^{kv} = (y^u x^v)^k.$$

Таким образом, $\langle x, y \rangle = \langle y^u x^v \rangle$.

Пусть теперь x и y — снова произвольные элементы подгруппы $\pi(\mathcal{C})'\text{-Is}(X, Y)$. Так как эта подгруппа абелева, она совпадает с множеством всех корней $\pi(\mathcal{C})'$-степеней, извлекающихся из элементов подгруппы Y в группе X. Поэтому существуют такие $\pi(\mathcal{C})'$-числа q и r, что $x^r, y^q \in Y$. Обозначим через z порождающий подгруппы $\langle x^r, y^q \rangle$.

Применяя лемму к элементам y и z, мы видим, что подгруппа $\langle z, y \rangle$ является циклической и порождается некоторым элементом z_1. Снова применяя лемму, теперь уже к элементам z_1 и x, получаем, что элементы x и y принадлежат циклической подгруппе $\langle z_1, x \rangle$.

Таким образом, любые два элемента подгруппы $\pi(\mathcal{C})'\text{-Is}(X, Y)$ порождают циклическую подгруппу.

§ 3. Некоторые свойства обобщенных свободных произведений

Пусть $G = \langle A, B; H = K, \varphi \rangle$ — свободное произведение некоторых групп A и B с подгруппами H и K, объединенными относительно изоморфизма $\varphi : H \to K$. Легко видеть, что если $N \in \mathcal{C}^*(G)$, $R = N \cap A$ и $S = N \cap B$, то $(R \cap H)\varphi = S \cap K$, и потому отображение

$$\varphi_N : HR/R \to KS/S,$$

переводящее смежный класс hR, $h \in H$, в смежный класс $(h\varphi)S$, корректно определено и является изоморфизмом подгрупп. Это дает нам возможность рассмотреть группу

$$G_N = \langle A/R, B/S; HR/R = KS/S, \varphi_N \rangle$$

— свободное произведение фактор-групп A/R и B/S с подгруппами HR/R и KS/S, объединенными относительно изоморфизма φ_N. Очевидно также, что естественные гомоморфизмы $\rho_R : A \to A/R$ и $\rho_S : B \to B/S$ удовлетворяют соотношению $h\rho_R\varphi_N = h\varphi\rho_S$ для любого $h \in H$ и потому продолжаемы до гомоморфизма ρ_N группы G на группу G_N.

Предложение 3.1. *Если $N \in \mathcal{C}^*(G)$, то группа G_N представляет собой расширение свободной группы при помощи $\mathcal{C}$-группы.*

Доказательство. Пусть $R = N \cap A$ и $S = N \cap B$. Если группы A и B заданы представлениями $A = \langle a_1, a_2, \dots ; u_1, u_2, \dots \rangle$ и $B = \langle b_1, b_2, \dots ; v_1, v_2, \dots \rangle$, то согласно определению группа G_N имеет следующее представление:

$$G_N = \langle a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots ;\\ u_1, u_2, \dots, v_1, v_2, \dots, r, s, hr = (h\varphi)s \ (h \in H, r \in R, s \in S)\rangle.$$

Очевидно, что с помощью преобразований Тице данное представление может быть приведено к виду:

$$G_N = \langle a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots ;\\ u_1, u_2, \dots, v_1, v_2, \dots, h = h\varphi, r, s \ (h \in H, r \in R, s \in S)\rangle.$$

Это означает, что G_N есть фактор-группа группы G по нормальному замыканию множества $R \cup S$ и, в частности, $\mathrm{ker}\rho_N \leqslant N$. Отсюда следует, что $N\rho_N \cap A/R = N\rho_N \cap B/S = 1$ и в силу теоремы Х. Нейман [8] подгруппа $N\rho_N$ свободна. Но $G_N/N\rho_N = (G/\mathrm{ker}\rho_N)/(N/\mathrm{ker}\rho_N) \cong G/N$.

Таким образом, группа G_N оказывается расширением свободной группы $N\rho_N$ при помощи $\mathcal{C}$-группы, изоморфной G/N.

Напомним, что запись элемента $g \in G$ в виде $g = g_1 g_2 \dots g_m$ называется несократимой, если:

1) каждый сомножитель g_i является словом либо только от порождающих группы A (A-слогом), либо только от порождающих группы B (B-слогом);

2) при $m > 1$ соседние слоги g_i и g_{i+1} не являются одновременно A-слогами или B-слогами;

3) при $m > 1$ каждый A-слог g_i определяет в группе A элемент, не принадлежащий подгруппе H, и каждый B-слог g_j определяет в группе B элемент, не принадлежащий подгруппе K.

Хорошо известно, что если элемент группы G обладает несократимой записью, содержащей более одного слога, то он отличен от единицы. Отсюда легко следует, что любые две несократимые записи элемента $g \in G$ имеют одно и то же число слогов, которое мы будем называть длиной элемента g и обозначать через $l(g)$.

Элемент $g \in G$ называется циклически несократимым, если в его несократимой записи $g = g_1 \dots g_m$ при $m > 1$ сомножители g_1 и g_m не лежат одновременно в A или в B. Легко видеть, что любой элемент группы G сопряжен с некоторым циклически несократимым элементом. Пользуясь определением несократимой записи элемента, нетрудно доказать также

Предложение 3.2. *Если один из любых двух элементов $g, h \in G$ имеет четную длину и $h = g^q$ для некоторого положительного числа q, то другой элемент также имеет четную длину и $l(h) = l(g)q$.*

В заключение этого параграфа покажем, что необходимость во втором утверждении основной теоремы имеет место для любого обобщенного свободного произведения G и класса $\mathcal{C}$.

Предложение 3.3. *Если циклическая подгруппа группы G $\mathcal{C}$-отделима в этой группе, то она не сопряжена ни с какой подгруппой из семейства $\Delta_{\mathcal{C}}(G, A) \cup \Delta_{\mathcal{C}}(G, B)$.*

Доказательство. Предположим противное: пусть подгруппа X группы G $\mathcal{C}$-отделима в G и при этом $X = g^{-1}Yg$ для некоторого элемента $g \in G$ и некоторой подгруппы Y, принадлежащей, для определенности, семейству $\Delta_{\mathcal{C}}(G, A)$. Тогда для каждой подгруппы $N \in \mathcal{C}^*(G)$ имеют место соотношения

$$XN = g^{-1}YgN = g^{-1}YNg \supseteq g^{-1}Y(N \cap A)g.$$

Из этих соотношений ввиду $\mathcal{C}$-отделимости подгруппы X в группе G вытекает, что

$$g^{-1}Yg = X =$$

$$= \bigcap_{N \in \mathcal{C}^*(G)} XN \supseteq \bigcap_{N \in \mathcal{C}^*(G)} g^{-1}Y(N \cap A)g \supseteq g^{-1} \left(\bigcap_{M \in \mathcal{C}^*(G,A)} YM \right) g$$

и, следовательно,

$$\bigcap_{M \in \mathcal{C}^*(G,A)} YM \subseteq Y.$$

Поскольку обратное включение всегда имеет место, мы получаем, что

$$Y = \bigcap_{M \in \mathcal{C}^*(G,A)} YM,$$

т. е. подгруппа Y отделима семейством $\mathcal{C}^*(G, A)$, что противоречит предположению.

§ 4. Доказательство основной теоремы

С учетом предложения 3.3 нам осталось проверить первое утверждение теоремы и достаточность во втором. Начнем с утверждения 1.

Пусть $g \in G \backslash \{1\}$ — произвольный элемент и $g = g_1 g_2 \dots g_m$ — его несократимая запись. Укажем подгруппу $M \in \mathcal{C}^*(G)$ такую, что $g \notin M$.

По условию теоремы единичная подгруппа группы A отделима в ней семейством $\mathcal{C}^*(G, A)$. Поэтому в случае, когда $g \in A$, найдется подгруппа $M \in \mathcal{C}^*(G)$ такая, что $g \notin M \cap A$. Очевидно, что тогда $g \notin M$.

Аналогичным образом рассматривается случай, когда $g \in B$.

Пусть $g \notin A \cup B$. Тогда каждый слог g_i несократимой записи элемента g принадлежит одному из свободных множителей и не входит в объединяемую подгруппу.

По условию теоремы объединяемые подгруппы отделимы в свободных множителях семействами $\mathcal{C}^*(G, A)$ и $\mathcal{C}^*(G, B)$. Поэтому для каждого i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ можно указать подгруппу $N_i \in \mathcal{C}^*(G)$ такую, что $g_i \notin H(N_i \cap A)$, если $g_i \in A$, и $g_i \notin K(N_i \cap B)$, если $g_i \in B$. Из условия

(a) следует, что найдется подгруппа $N \in \mathcal{C}^*(G)$, лежащая в пересечении $\bigcap_{i=1}^{m} N_i$.

В силу выбора подгруппы N $l(g\rho_N) = l(g) > 1$. Поэтому $g\rho_N \neq 1$, и, пользуясь предложением 3.1 и условием (b), мы можем выбрать в группе G_N подгруппу $M_N \in \mathcal{C}^*(G_N)$, не содержащую элемента $g\rho_N$. Легко видеть, что прообраз M этой подгруппы относительно гомоморфизма ρ_N будет принадлежать семейству $\mathcal{C}^*(G)$ и не будет содержать элемента g.

Перейдем теперь к доказательству утверждения 2.

Пусть X — $\pi(\mathcal{C})'$-изолированная циклическая подгруппа группы G, не сопряженная ни с какой подгруппой из семейства $\Delta_{\mathcal{C}}(G, A) \cup \Delta_{\mathcal{C}}(G, B)$, и пусть $g \in G$ — произвольный элемент, не принадлежащий X. Пусть также x — порождающий подгруппы X и $g = g_1 g_2 \ldots g_m$, $x = x_1 x_2 \ldots x_n$ — несократимые записи элементов g и x. Применяя при необходимости подходящий внутренний автоморфизм группы G, мы можем считать далее, что элемент x циклически несократим.

В силу предложения 3.1 и условия (c) для доказательства $\mathcal{C}$-отделимости подгруппы X нам достаточно указать подгруппу $N \in \mathcal{C}^*(G)$ такую, что либо $g \notin XN$, либо элемент $g\rho_N$ не принадлежит некоторой $\pi(\mathcal{C})'$-изолированной циклической подгруппе группы G_N, содержащей подгруппу $X\rho_N$.

Пусть сначала $n = 1$ и пусть, для определенности, $x \in A$.

В силу своего выбора подгруппа X отделима подгруппами из семейства $\mathcal{C}^*(G, A)$. Поэтому в случае, когда $g \in A$, найдется подгруппа $N \in \mathcal{C}^*(G)$ такая, что $g \notin X(N \cap A)$. Легко видеть, что тогда $g \notin XN$ и, следовательно, подгруппа N является искомой.

Пусть $g \notin A$. Тогда при $m = 1$ $g = g_1 \in B \backslash K$. Если же $m > 1$, то каждый слог g_i несократимой записи элемента g принадлежит одному из свободных множителей и не входит в объединяемую подгруппу. Как и при доказательстве утверждения 1, мы можем найти такую подгруппу $N \in \mathcal{C}^*(G)$, что $l(g\rho_N) = l(g)$, и если $m = 1$, то $g\rho_N \in B\rho_N \backslash K\rho_N$. Понятно, что тогда $g\rho_N \notin X\rho_N$.

Заметим теперь, что если класс $\mathcal{C}$ состоит из периодических групп, то свободные множители группы G_N вкладываются в периодическую $\pi(\mathcal{C})$-группу G/N. Поэтому все их циклические подгруппы, в том числе и $X\rho_N$, конечны. Но в силу предложений 3.1, 2.2 и условия (c) группа G_N $\mathcal{C}$-аппроксимируема и, стало быть, не имеет $\pi(\mathcal{C})'$-кручения. Отсюда следует, что подгруппа $X\rho_N$ $\pi(\mathcal{C})'$-изолирована в группе G_N.

Таким образом, искомая подгруппа N найдена.

Пусть теперь $n \geqslant 2$. Как и выше, выберем подгруппу $M \in \mathcal{C}^*(G)$ такую, что $l(g\rho_M) = l(g)$ и $l(x\rho_M) = l(x)$. Заметим, что запись элемента $x\rho_M$ по-прежнему является циклически несократимой.

Для любой подгруппы $N \in \mathcal{C}^*(G)$, лежащей в M, имеет место равенство $l(x\rho_N) = l(x) > 1$. Поэтому в силу предложения 3.2 из элемента $x\rho_N$ не могут извлекаться корни сколь угодно высокой степени. Поскольку группа G_N согласно предложениям 3.1, 2.2 и условию (c) $\mathcal{C}$-аппроксимируема, из предложения 2.3 теперь следует, что подгруппа $\pi(\mathcal{C})'\text{-}\mathrm{Is}(G_N, X\rho_N)$ является циклической. Покажем, что подгруппу N

можно выбрать таким образом, чтобы элемент $g\rho_N$ не принадлежал подгруппе $\pi(\mathcal{C})'$-$\mathrm{Is}(G_N, X\rho_N)$.

Запишем число n в виде $n = qt$, где q является $\pi(\mathcal{C})$-числом, а t — $\pi(\mathcal{C})'$-числом, если $\pi(\mathcal{C})' \neq \varnothing$, и $t = 1$, если $\pi(\mathcal{C})' = \varnothing$. Заметим, что множество $\pi(\mathcal{C})$ не может быть пустым, т. к. класс $\mathcal{C}$ по условию теоремы содержит хотя бы одну неединичную группу.

Рассмотрим два случая.

Случай 1. n не делит mt.

Так как n не делит mt, то в силу предложения 3.2 $(g\rho_M)^t \notin X\rho_M$. Покажем, что тогда $g\rho_M \notin \pi(\mathcal{C})'$-$\mathrm{Is}(G_M, X\rho_M)$ и, стало быть, можно положить $N = M$.

Пусть y_M обозначает порождающий подгруппы $\pi(\mathcal{C})'$-$\mathrm{Is}(G_M, X\rho_M)$ и пусть $(y_M)^z = x\rho_M$. Из предложения 3.2 следует, что тогда $z|n$. Но z является $\pi(\mathcal{C})'$-числом, поэтому оно делит t и, стало быть, $\left(\pi(\mathcal{C})'\text{-}\mathrm{Is}(G_M, X\rho_M)\right)^t \leqslant X\rho_M$. Таким образом, предполагая, что $g\rho_M \in \pi(\mathcal{C})'$-$\mathrm{Is}(G_M, X\rho_M)$, мы приходим к утверждению $(g\rho_M)^t \in X\rho_M$, которое противоречит установленному ранее.

Случай 2. $mt = nk$ для некоторого положительного k.

Так как подгруппа X $\pi(\mathcal{C})'$-изолирована в группе G и $g \notin X$, то $g^t \neq x^{\pm k}$. Из доказанного выше утверждения 1 и предложения 2.2 следует, что группа G $\mathcal{C}$-аппроксимируема и потому существует подгруппа $L \in \mathcal{C}^*(G)$ такая, что $g^{-t}x^k$, $g^{-t}x^{-k} \notin L$. Воспользуемся условием (a) и выберем подгруппу $N \in \mathcal{C}^*(G)$ лежащей в $M \cap L$.

Тогда $(g\rho_N)^t \neq (x\rho_N)^{\pm k}$, и т. к. $l(g\rho_N) = l(g) = m$, $l(x\rho_N) = l(x) = n$, то $(g\rho_N)^t \notin X\rho_N$. Как и в разобранном выше случае, отсюда вытекает, что $g\rho_N \notin \pi(\mathcal{C})'$-$\mathrm{Is}(G_N, X\rho_N)$, и доказательство на этом закончено.

Библиографический список

1. *Азаров Д. Н., Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости обобщенных свободных произведений групп корневыми классами // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Сер.: Математика. Вып. 6 (2008). С. 29—42.
2. *Азаров Д. Н., Тьеджо Д.* Об аппроксимируемости свободного произведения групп с объединенной подгруппой корневым классом групп // Там же. Вып. 5 (2002). С. 6—10.
3. *Гольцов Д. В., Яцкин Н. И.* Классы групп и подгрупповые топологии // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер.: Естественные, общественные науки. 2011. Вып. 2. С. 115—128.
4. *Соколов Е. В.* Замечание об отделимости подгрупп в классе конечных π-групп // Мат. заметки. 2003. Т. 73, вып. 6. С. 904—909.
5. *Холл Ф.* Нильпотентные группы // Математика : период. сб. переводов иностранных статей. 1968. Т. 12, № 1. С. 3—36.
6. *Baumslag G.* On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. Vol. 106. P. 193—209.
7. *Gruenberg K. W.* Residual properties of infinite soluble groups // Proc. London Math. Soc. Ser. 3. 1957. Vol. 7. P. 29—62.
8. *Neumann H.* Generalized free products with amalgamated subgroups II // Amer. J. Math. 1949. Vol. 31. P. 491—540.