УДК 512

Л. Н. Кусковский, С. А. Плетюхина

ОБ ОДНОМ ВИДЕ ГИПЕРКОМПЛЕКСНЫХ ФУНКЦИЙ

В конечномерной алгебре, заданной определяющим уравнением, строится базис с очень удобным законом умножения, указываются структура моногенной функции, некоторые приложения.

Ключевые слова: алгебра, базис, гиперкомплексная функция, моногенность.

In the finite-dimensional algebra, which defined by polynomial equation, the basis is constructed with a convenient multiplication law. The structure of the monogenic function and some applications are described.

Key words: algebra, basis, hypercomplex function, monogeneity.

Введение

Румынский математик Г. К. Моисил в работе [5] рассмотрел функции от двух вещественных переменных x и y, принимающих значения в алгебре Собреро (L. Sobrero), т. е. алгебре с базой

$$1, j, j^2, j^3 \tag{0.1}$$

и определяющим уравнением $(j^2+1)^2 = 0$. Было показано применение гиперкомплексных функций, моногенных в смысле В. С. Федорова (в дальнейшем F-моногенных) относительно функции $\xi = x + jy$, в теории медленных плоских установившихся движений несжимаемой вязкой жидкости.

В [3] рассматривается алгебра с базой (0.1) и определяющим уравнением $j^4 + pj^2 + q = 0$, где p, q — вещественные постоянные. Найден общий вид F-моногенных по $\xi = x + jy$ гиперкомплексных функций при различных значениях p и q.

В настоящей статье мы рассмотрим алгебру, обобщающую алгебру Собреро. Укажем базис с очень удобным законом умножения, структуру моногенной гиперкомплексной функции, некоторые приложения.

§ 1. О рассматриваемой алгебре

Четырехмерное линейное пространство над полем комплексных чисел C наделим структурой алгебры A с единицей, коммутативной, ассоциативной, с базой

$$\varepsilon^0 = 1_A = 1, \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \varepsilon^k \cdot \varepsilon^h = \varepsilon^h \cdot \varepsilon^k, h, k = 0, 1, 2, 3 \tag{1.1}$$

и определяющим уравнением

$$P(\varepsilon) = (\varepsilon - a)^2(\varepsilon - b)^2 = 0, \tag{1.2}$$

где a и b — комплексные постоянные, причем $a \neq b \neq 0$.

Ясно, что если $a = -i$, $b = i$, $i = -1$, то имеем алгебру Собреро.

Замечание 1.1. Вместо уравнения (1.2) рассмотрим уравнение

$$\left(\frac{\varepsilon - a}{b - a}\right)^2 \cdot \left(\frac{\varepsilon - b}{b - a}\right)^2 = 0. \tag{1.2'}$$

В обозначении $\dfrac{\varepsilon - a}{b - a} = \varepsilon_1$ уравнение (1.2′) примет вид

$$\varepsilon_1^2(\varepsilon_1 - 1)^2 = 0. \tag{1.3}$$

Имея $\varepsilon^\nu = (a + (b - a) \cdot \varepsilon_1)^\nu$, $\nu = 1, 2, 3$, нетрудно установить, что элементы $1_A, \varepsilon_1, \varepsilon_1^2, \varepsilon_1^3$ образуют базис в A как в линейном пространстве.

Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать алгебру A с базисом (1.1) и определяющим уравнением (1.3): $\varepsilon^2(\varepsilon - 1)^2 = 0$.

Теорема 1.1. *Справедлива формула*

$$\varepsilon^N = (N - 2)\varepsilon^3 - (N - 3)\varepsilon^2, N = 4, 5, \ldots . \tag{1.4}$$

Доказательство. Из (1.3) имеем $\varepsilon^4 = 2\varepsilon^3 - \varepsilon^2$, откуда

$$\varepsilon^5 = \varepsilon \cdot \varepsilon^4 = 2\varepsilon^4 - \varepsilon^3 = 2(2\varepsilon^3 - \varepsilon^2) - \varepsilon^3 = 3\varepsilon^3 - 2\varepsilon^2,$$

т.е. для $N = 5$ формула (1.4) справедлива. Предположив, что формула (1.4) справедлива для любого натурального $N = n$, получим

$$\begin{aligned}\varepsilon^{n+1} &= \varepsilon(\varepsilon^n) = \varepsilon((n-2)\varepsilon^3 - (n-3)\varepsilon^2) = (n-2)\varepsilon^4 - (n-3)\varepsilon^3 = \\ &= (n-2)(2\varepsilon^3 - \varepsilon^2) - (n-3)\varepsilon^3 = [(n+1) - 2]\varepsilon^3 - [(n+1) - 3]\varepsilon^2,\end{aligned}$$

что завершает доказательство.

Из (1.4) для любого $N = 4, 5, \ldots$ сразу следует

$$\varepsilon^N - \varepsilon^{N-1} = \varepsilon^3 - \varepsilon^2. \tag{1.5}$$

Введем новые элементы алгебры A:

$$\begin{aligned}&e_0 = 1_A, \\ &e_1 = \varepsilon(\varepsilon - 1)^2 = \varepsilon - 2\varepsilon^2 + \varepsilon^3, \\ &e_2 = \varepsilon^2(\varepsilon - 1) = -\varepsilon^2 + \varepsilon^3, \\ &\omega = \varepsilon^2(1 - 2(\varepsilon - 1)) = 3\varepsilon^2 - 2\varepsilon^3.\end{aligned} \tag{1.6}$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1.1. *Элементы* $e_0 = 1_A,\ e_1,\ e_2,\ \omega$ (1.6) *образуют базис в алгебре* A.

Доказательство. Элементы $e_1,\ e_2,\ \omega$ (1.6) линейно независимы, т. к. матрица

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

перехода от $\varepsilon,\ \varepsilon^2,\ \varepsilon^3$ к $e_1,\ e_2,\ \omega$ невырождена: $\det B = -1$. Поэтому $e_1,\ e_2,\ \omega$ в совокупности с единичным элементом 1_A образуют базис в A как в линейном пространстве.

Отсюда сразу следует лемма, определяющая формулы перехода от базиса $1_A,\ e_1,\ e_2,\ \omega$ к базису $\varepsilon^0\ \varepsilon,\ \varepsilon^2,\ \varepsilon^3$.

Лемма 1.2.

$$\begin{aligned} \varepsilon^0 &= 1_A, \\ \varepsilon\ &= e_1 + e_2 + \omega, \\ \varepsilon^2 &= 2e_2 + \omega, \\ \varepsilon^3 &= 3e^2 + \omega. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Правила перемножения элементов $e_1,\ e_2,\ \omega$ определяет лемма.

Лемма 1.3.

$$(i)\ e_1^2 = 0, \quad (ii)\ e_2^2 = 0, \quad (iii)\ e_1e_2 = 0, \quad (iv)\ e_1\omega = 0,$$
$$(v)\ \omega e_2 = e_2, \quad (vi)\ \omega^2 = \omega.$$

Доказательство. Свойства (i) — (iv) следуют сразу. В силу теоремы 1.1, формулы (1.5) и представления (1.6) следуют и остальные свойства:

$$\begin{aligned} \omega e_2 = \varepsilon^2(1-2(\varepsilon-1))\varepsilon^2(\varepsilon-1) = \varepsilon^5 - \varepsilon^4 = \varepsilon^3 - \varepsilon^2 = e_2, \\ \omega^2 = \varepsilon^4(1-4(\varepsilon-1)+4(\varepsilon-1)^2) = 5\varepsilon^4 - 4\varepsilon^5 = -4(\varepsilon^5 - \varepsilon^4) + \varepsilon^4 = \\ = -4(\varepsilon^3 - \varepsilon^2) + (2\varepsilon^3 - \varepsilon^2) = \omega. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Таким образом, e_1 и e_2 — нильпотентные, а ω — идемпотентный элемент алгебры A.

§ 2. О некоторых гиперкомплексных функциях от гиперкомплексной переменной

Теперь для любых элементов $\xi,\ \tilde{\xi} \in A$:

$$\xi = \alpha_0 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3\omega, \quad \tilde{\xi} = \tilde{\alpha}_0 + \tilde{\alpha}_1 e_1 + \tilde{\alpha}_2 e_2 + \tilde{\alpha}_3\omega$$

в силу леммы 1.3 имеем

$$\begin{aligned} \xi \cdot \tilde{\xi} = \alpha_0\tilde{\alpha}_0 + (\alpha_0\tilde{\alpha}_1 + \alpha_1\tilde{\alpha}_0)e_1 + [(\alpha_0+\alpha_3)\tilde{\alpha}_2 + \alpha_2(\tilde{\alpha}_0 + \tilde{\alpha}_3)]e_2 + \\ + [(\alpha_0+\alpha_3)\tilde{\alpha}_3 + \alpha_3\tilde{\alpha}_0]\omega. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Отсюда для заданного элемента ξ, полагая $\xi\tilde{\xi} = 1_A$, получим элемент ξ^{-1}, обратный к ξ при всех $\alpha_0 \neq 0$, $\alpha_0 + \alpha_3 \neq 0$:

$$\tilde{\xi} = \xi^{-1} = \frac{1}{\xi} = \frac{1}{\alpha_0} - \frac{\alpha_1}{\alpha_0^2}e_1 - \frac{\alpha_2}{(\alpha_0+\alpha_3)^2}e_2 - \frac{\alpha_3}{\alpha_0(\alpha_0+\alpha_3)}\omega.$$

В силу свойств элементов $e_1,\ e_2,\ \omega$ (лемма 1.3) имеем

$$\begin{aligned} e^{t\xi} =& e^{t(\alpha_0+\alpha_1 e_1+\alpha_2 e_2+\alpha_3\omega)} = e^{t\alpha_0}e^{t\alpha_1 e_1}e^{t\alpha_2 e_2}e^{t\alpha_3\omega} = \\ &= e^{t\alpha_0}[1 + t\alpha_1 e_1 + t\alpha_2 e^{t\alpha_3}e_2 + (e^{t\alpha_3}-1)\omega]. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Далее, для любого натурального числа n определим степенную функцию ξ^n:

$$\xi^n = (\alpha_0+\alpha_1 e_1+\alpha_2 e_2+\alpha_3\omega)^n = (\zeta+\eta)^n, \text{где} \zeta = \alpha_0+\alpha_1 e_1, \eta = \alpha_2 e_2+\alpha_3\omega.$$

Применяя лемму 1.3, нетрудно сосчитать, что

$$\xi^n = (\zeta+\eta)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \zeta^k \eta^{n-k},$$

где $\zeta^k = \alpha_0^k + k\alpha_0^{k-1}\alpha_1 e_1$,

$$\eta^{n-k} = \begin{cases} 1, \text{ если } n-k=0, \\ \alpha_3\omega + \alpha_2 e_2, \text{ если } n-k=1, \\ \alpha_3^{n-k}\omega + (n-k)\alpha_2\alpha_3^{n-k-1}e_2, \text{ если } n-k>1. \end{cases}$$

Таким образом, можно строить различные функции от переменной $\xi \in A$.

§ 3. Некоторые приложения

1. *Задача Коши.* Рассмотрим задачу

$$\frac{dx}{dt} = Ax,\ x(0) = x_0, \tag{3.1}$$

где $x = x_1(t) + x_2(t)e_1 + x_3(t)e_2 + x_4(t)\omega$, x_0, A — постоянные элементы алгебры A:

$$x_0 = x_0^0 + x_0^1 e_1 + x_0^2 e_2 + x_0^3\omega,$$

$$A = a_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3\omega,\ ||A|| = \sum_{k=0}^{3}|a_k|.$$

Известно, что $x = \exp\langle tA\rangle x_0$ — решение задачи.

Не выписывая систему уравнений, соответствующую уравнению (3.1), в силу (2.1) и (2.2) нетрудно определить компоненты решения задачи (3.1). Имеем

$$\begin{aligned} x_1 &= e^{ta_0}x_0^0, \\ x_2 &= e^{ta_0}[x_0^1 + ta_1 x_0^0], \\ x_3 &= e^{t(a_0+a_3)}[x_0^2 + ta_2(x_0^0 + x_0^3)], \\ x_4 &= e^{t(a_0+a_3)}(x_0^0 + x_0^3) - e^{ta_0}x_0^0. \end{aligned}$$

2. *Моногенность.* Пусть G — конечная односвязная область комплексной плоскости $z = x + iy$, A — коммутативная и ассоциативная конечномерная алгебра с единицей над полем комплексных чисел. $C^k(G, A)$ — множество функций, определенных в G и принимающих значения в A, обладающих непрерывными частными производными до порядка k включительно.

Определение [2, 1]. Функция $f \in C^1(G, A)$ называется моногенной (F-моногенной) по функции $p \in C^2(G, A)$ в области G, если в каждой точке $z \in G$

$$\frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \ \ (\text{эквивалентно} \ \ \frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial p}{\partial \bar{z}}\frac{\partial f}{\partial z} = 0). \tag{3.2}$$

Здесь $\dfrac{\partial}{\partial z} = \dfrac{1}{2} \cdot \left(\dfrac{\partial}{\partial x} - i\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$, $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}} = \dfrac{1}{2} \cdot \left(\dfrac{\partial}{\partial x} + i\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$ формальные производные из комплексного анализа [4].

Пусть $p(x, y) \in C^1(\bar{G}, A)$ удовлетворяет условиям

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2 = 0, \tag{I}$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^{-1} \text{существует.} \tag{II}$$

В дальнейшем, говоря о функции $p \in C^1(G, A)$, всегда будем предполагать, что она удовлетворяет условиям (I), (II).

Обозначив $\left(\dfrac{\partial p}{\partial x}\right)^{-1}\left(\dfrac{\partial p}{\partial y}\right) = \lambda$, из [1] сразу получаем, что $\lambda = const \in A$, $\lambda^2 = -1$, функция $p(x, y)$ — F-моногенная по $\gamma(z) = x + \lambda y$, причем $p \in C^\infty(G, A)$, и гармоническая в G, т. е. каждая компонента функции $p(z)$ является гармонической в G.

Справедлива теорема.

Теорема [1]. *Если функция $f \in C^1(G, A)$ моногенна по $p \in C^2(G, A)$, то в каждой точке $z \in G$*

$$f(z) = \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^{-1}(F_1(z) + F_2(\bar{z})), \tag{3.3}$$

где F_1 (F_2) — функция, голоморфная (антиголоморфная) от z в G.

Замечание 3.1. Не всякая функция вида (3.3) будет моногенной по $p(z)$ в G, она может не быть и гармонической [4].

Однако справедлива следующая теорема.

Теорема 3.1. *Для того чтобы функция $f \in C^1(G, A)$ была моногенной по $p(z) \in C^2(G, A)$, удовлетворяющей условиям (I), (II), необходимо и достаточно, чтобы*

$$\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial p}{\partial \bar{z}} = 0 \ \ \text{и} \ \ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\frac{\partial p}{\partial z} = 0, \ \ \forall z \in G. \tag{3.4}$$

Доказательство. Достаточность следует из определения (3.2).
Необходимость. Согласно (3.3) имеем

$$f\frac{\partial p}{\partial z} = F_1(z), \quad f\frac{\partial p}{\partial \bar{z}} = F_2(z).$$

Отсюда

$$0 = \frac{\partial F_1}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\frac{\partial p}{\partial z} + f\frac{\partial^2 p}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\frac{\partial p}{\partial z}.$$

Аналогично доказывается второе равенство из (3.4).

Так как [1] всякая функция $f \in C^1(G, A)$, моногенная по $p \in C^1(G, A)$, будет моногенной по функции $\gamma(z) = x + \lambda y$ и наоборот, то здесь мы рассмотрим функцию $f \in C^1(G, A)$, моногенную по $\gamma(z) = x + \lambda y \in C^\infty(G, A)$, где A — алгебра, рассмотренная нами в § 1. Условием моногенности функции $f \in C^1(G, A)$ по $\gamma(z) = x + \lambda y$ в силу (3.2) является

$$\lambda\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \tag{3.5}$$

Полагая

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 \omega,$$

$$f(z) = f_0(x, y) + f_1(x, y)e_1 + f_2(x, y)e_2 + f_3(x, y)\omega$$

и пользуясь свойствами базисных элементов (лемма 1.3), нетрудно выписать дифференциальную систему, соответствующую уравнению (3.5):

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_0 & 0 & 0 \\ \lambda_2 & 0 & \lambda_0 + \lambda_3 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & 0 & 0 & \lambda_0 + \lambda_3 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}. \tag{3.6}$$

Таким образом, при условии (3.4) всякая функция $f \in C^1(G, A)$ вида

$$f(z) = F_1(z) + F_2(\bar{z}),$$

где $F_1(z)$ $(F_2(\bar{z}))$ — голоморфная (антиголоморфная) от z в G функция, т. е. каждая компонента функции F_1 (F_2) является голоморфной (антиголоморфной) от z в G, является решением системы (3.6).

Библиографический список

1. *Кусковский Л. Н.* Обобщенные ареолярные производные и их приложения к дифференциальным уравнениям // Rev. Roum. de math. : pures et appl. 1986. Т. 31, № 7. P. 625—637.
2. *Федоров В. С.* Основные свойства обобщенных моногенных функций // Изв. вузов. Сер.: Математика. 1958. № 6 (7). 1958. С. 257—265.
3. *Федоров В. С., Затуловская К. Д.* Об одном классе гиперкомплексных функций // Учен. зап. Иван. гос. пед. ин-та. Т. 44 (1969). С. 93—100.
4. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. 3-е изд. М. : Наука, 1985. Ч. 1. : Функции одного переменного. 336 с.
5. *Moisil Gr. C.* Metoda functiilor de variabila ipercomplexa in idrodinamica plana a lichidelor vascoase incompresibile // Extras din Studii si Cercet. Math. Acad. RPR. 1950. Vol. 1. P. 9—35.