УДК 512.543

Е. А. Туманова

АППРОКСИМИРУЕМОСТЬ КОНЕЧНЫМИ *P*-ГРУППАМИ *HNN*-РАСШИРЕНИЙ ГРУПП

Получено достаточное условие аппроксимируемости конечными p-группами HNN-расширения конечной p-группы с центральными связанными подгруппами.

Ключевые слова: HNN-расширение, аппроксимируемость конечными p-группами.

The sufficient condition for the HNN-extension of a finite p-group with central associated subgroups to be residually a finite p-group is obtained.

Key words: HNN-extension, residuality by finite p-groups.

Напомним определения основных понятий, используемых в данной статье.

Пусть группа G задана представлением $G = \langle a_1, a_2, \dots, a_n; W\rangle$, в группе G фиксированы две изоморфные подгруппы A и B и некоторый изоморфизм $\varphi : A \to B$. HNN-расширением группы G с проходной буквой t и подгруппами A и B, связанными относительно изоморфизма φ, называется группа

$$G^* = (G, t; t^{-1}At = B, \varphi),$$

порождаемая элементами $a_1, a_2, \dots, a_n$ и еще одним элементом t и определяемая множеством слов W и всевозможными соотношениями вида $t^{-1}ut = u\varphi$, где u — слово от порождающих $a_1, a_2, \dots, a_n$, определяющее элемент из подгруппы A, и $u\varphi$ — слово от $a_1, a_2, \dots, a_n$, определяющее элемент из подгруппы B, являющийся φ-образом элемента, определяемого словом u.

Пусть p — простое число. Группа G называется аппроксимируемой конечными p-группами, если для любого неединичного элемента $g \in G$ существует гомоморфизм φ группы G на некоторую конечную p-группу такой, что $g\varphi \neq 1$.

Критерий аппроксимируемости конечными p-группами HNN-расширения конечной p-группы получен Д. И. Молдаванским и сформулирован, по существу, в тех же терминах, что и соответствующий критерий Хигмана [2] для свободных произведений с объединенной подгруппой.

Теорема 1 [1]. *Пусть G — конечная p-группа, A и B — изоморфные подгруппы группы G и $\varphi : A \to B$ — изоморфизм. Группа $G^* = (G, t; t^{-1}At = B, \varphi)$ аппроксимируема конечными p-группами тогда и только тогда, когда существует главный ряд*

$$1 = G_0 \leqslant G_1 \leqslant \ldots \leqslant G_n = G$$

группы G, удовлетворяющий следующим требованиям:

а) для каждого $i = 0, 1, \dots, n$ подгруппа G_i является (A, B, φ)-совместимой, т. е. $(A \cap G_i)\varphi = (B \cap G_i)$;

б) для каждого $i = 0, 1, \dots, n-1$ и любого элемента $a \in A \cap G_{i+1}$ выполнено сравнение $a\varphi \equiv a \pmod{G_i}$.

Напомним, что нормальный ряд группы называется главным, если он не допускает нормальных нетривиальных уплотнений. Очевидно, что каждая конечная группа обладает главным рядом. Легко видеть, что нормальный ряд конечной p-группы является главным тогда и только тогда, когда все его факторы имеют порядок p.

Основным результатом данной статьи является следующее достаточное условие аппроксимируемости конечными p-группами HNN-расширения конечной p-группы.

Теорема 2. *Пусть G — конечная p-группа, A и B — центральные подгруппы группы G, $\varphi : A \to B$ — изоморфизм. Если $A \cap B = 1$, то группа $G^* = (G, t; t^{-1}At = B, \varphi)$ аппроксимируема конечными p-группами.*

Доказательство. В силу теоремы 1 доказательство аппроксимируемости конечными p-группами группы G^* сводится к построению в группе G главного ряда, удовлетворяющего условиям а) и б).

Так как подгруппы A и B содержатся в центре группы G, то подмножество $C = \{a(a\varphi)^{-1} \mid a \in A\}$ также содержится в центре группы G. Легко видеть, что C — центральная подгруппа группы G, следовательно, C нормальна в G.

Из условия $A \cap B = 1$ вытекает, что $A \cap C = 1$ и $B \cap C = 1$.

Зафиксируем в группе A некоторый главный ряд

$$1 = A_0 \leqslant A_1 \leqslant \dots \leqslant A_r = A.$$

Для каждого $i = 0, \dots, r$ обозначим через B_i образ подгруппы A_i относительно φ. Тогда в группе B получаем главный ряд

$$1 = B_0 \leqslant B_1 \leqslant \dots \leqslant B_r = B.$$

Непосредственно проверяется, что $A_iC = B_iC$ для всех $i = 0, \dots, r$. Теперь нетрудно показать, что $AC = BC = AB$.

Пусть

$$1 = C_0 \leqslant C_1 \leqslant \dots \leqslant C_r = C$$

— некоторый главный ряд группы C.

Заметим, что длина r этого ряда совпадает с длиной главного ряда группы A, поскольку, как легко видеть, $|C| = |A|$.

Пусть

$$1 = H_0/AB \leqslant H_1/AB \leqslant \dots \leqslant H_s/AB = G/AB$$

— некоторый главный ряд фактор-группы G/AB. Тогда по теореме о соответствии подгрупп при гомоморфизме H_i — нормальная подгруппа группы G и

$$|H_{i+1}/H_i| = \left| {H_{i+1}/AB} \Big/ {H_i/AB} \right| = p$$

для всех $i = 0, \ldots, s-1$.

Покажем, что последовательность

$$\begin{aligned}1 = C_0 \leqslant C_1 \leqslant \ldots \leqslant C_r = C = \\ = A_0C \leqslant A_1C \leqslant \ldots \leqslant A_rC = AC = \\ = AB = H_0 \leqslant H_1 \leqslant \ldots \leqslant H_s = G \quad (*)\end{aligned}$$

является главным рядом группы G, удовлетворяющим условиям а) и б).

Так как C_i и A_iC — центральные подгруппы группы G, то они нормальны в G. По построению все подгруппы H_i нормальны в G. Таким образом, ряд (*) является нормальным.

Поскольку

$$1 = C_0 \leqslant C_1 \leqslant \ldots \leqslant C_r = C$$

— главный ряд группы C, $|C_{i+1}/C_i| = p$ для всех $i = 0, \ldots, r-1$. По построению $|H_{i+1}/H_i| = p$ для всех $i = 0, \ldots, s-1$. Наконец,

$$A_{i+1}C/A_iC \cong A_{i+1}/A_i(A_{i+1} \cap C).$$

Но $A_{i+1} \cap C \leqslant A \cap C = 1$. Следовательно, $A_{i+1}C/A_iC \cong A_{i+1}/A_i$ и $|A_{i+1}C/A_iC| = |A_{i+1}/A_i| = p$, т.к.

$$1 = A_0 \leqslant A_1 \leqslant \ldots \leqslant A_r = A$$

— главный ряд.

Таким образом, все факторы ряда (*) имеют порядок p, т. е. (*) — главный ряд.

Так как $C \cap A = 1 = C \cap B$, то $C_i \cap A = 1 = C_i \cap B$, и поэтому

$$(A \cap C_i)\varphi = 1\varphi = 1 = B \cap C_i. \quad (1)$$

Легко проверить, что $A \cap A_iC = A_i$, $B \cap A_iC = B_i$. Отсюда

$$(A \cap A_iC)\varphi = A_i\varphi = B_i = B \cap A_iC. \quad (2)$$

Так как $A \subseteq AB \subseteq H_i$, то $A \cap H_i = A$ и

$$(A \cap H_i)\varphi = A\varphi = B = B \cap H_i. \quad (3)$$

Из (1), (2), (3) следует, что ряд (*) является (A, B, φ)-совместимым, т. е. выполняется условие а). Остается проверить выполнение условия б).

Если $a \in A \cap C_{i+1}$, то, учитывая, что $A \cap C_{i+1} = 1$, получаем, что $a = 1$, $a\varphi = 1$ и поэтому $a \equiv a\varphi \pmod{C_i}$.

Если $a \in A \cap A_{i+1}C$, то $a \in A$. Тогда по определению подгруппы C $a(a\varphi)^{-1} \in C$, и т. к. $C \subseteq A_iC$, то $a(a\varphi)^{-1} \in A_iC$, т. е. $a \equiv a\varphi \pmod{A_iC}$.

Если $a \in A \cap H_{i+1}$, то $a \in A$, и тогда $a(a\varphi)^{-1} \in AB \subseteq H_i$, т. е. $a \equiv a\varphi \pmod{H_i}$.

Итак, ряд (*) удовлетворяет условию б). Теорема доказана.

Библиографический список

1. *Молдаванский Д. И.* Аппроксимируемость конечными p-группами HNN-расширений // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер.: Биология. Химия. Физика. Математика. 2000. Вып. 3. С. 129—140.
2. *Higman G.* Amalgams of p-groups // J. Algebra. 1963. Vol. 1. P. 301—305.