УДК 512.543

Д. Н. Азаров, Д. В. Гольцов

О ПОЧТИ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ КОНЕЧНЫМИ *p*-ГРУППАМИ СВОБОДНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ГРУПП С ОДНОЙ ОБЪЕДИНЕННОЙ КОНЕЧНОЙ ПОДГРУППОЙ

Получен критерий почти аппроксимируемости конечными *p*-группами свободного произведения любого семейства групп с одной объединенной конечной подгруппой.

Ключевые слова: свободное произведение с объединенной подгруппой, почти аппроксимируемость конечными *p*-группами.

The criterion of almost approximability of free product of any class of groups with an amalgamated finite subgroup by finite p-groups was received.

Key words: free product with amalgamated subgroups, virtually residually a finite *p*-group.

1. Введение

Группа G называется финитно аппроксимируемой, если для любого неединичного элемента a группы G существует гомоморфизм группы G на некоторую конечную группу, при котором образ элемента a отличен от 1. Наряду с финитной аппроксимируемостью изучается также свойство аппроксимируемости конечными p-группами, где p — простое число. Группа G называется аппроксимируемой конечными p-группами (или, короче, F_p-аппроксимируемой), если для любого неединичного элемента a группы G существует гомоморфизм группы G на некоторую конечную p-группу, при котором образ элемента a отличен от 1. Здесь через F_p обозначается класс всех конечных p-групп. Группа G называется почти F_p-аппроксимируемой, если она содержит некоторую F_p-аппроксимируемую подгруппу конечного индекса.

Пусть группа G почти F_p-аппроксимируема. Рассмотрим семейство $(H_i)_{i\in I}$ всех F_p-аппроксимируемых подгрупп конечного индекса группы G. Число

$$n = \min_{i\in I} \left[G : H_i\right]$$

будем называть индексом почти F_p-аппроксимируемости группы G.

Пусть $(G_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ — некоторое (возможно бесконечное) семейство групп. И пусть

$$G = \left(\underset{\lambda \in \Lambda}{*} G_\lambda, H \right)$$

— свободное произведение групп G_λ с одной объединенной подгруппой H. В работе [1] доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть для каждого $\lambda \in \Lambda$ группа G_λ финитно аппроксимируема и подгруппа H конечна. Группа G финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда для каждого $\lambda \in \Lambda$ в группе G_λ существует нормальная подгруппа U_λ конечного индекса, тривиально пересекающая H и такая, что индексы $[G_\lambda : U_\lambda]$ ограничены в совокупности.*

Там же получен аналогичный критерий для F_p-аппроксимируемости группы G. Здесь мы докажем следующий результат.

Теорема 2. *Пусть для каждого $\lambda \in \Lambda$ группа G_λ почти F_p-аппроксимируема и подгруппа H конечна. Группа G почти F_p-аппроксимируема тогда и только тогда, когда она финитно аппроксимируема и индексы почти F_p-аппроксимируемости групп G_λ ограничены в совокупности.*

Из теоремы 1 следует, что свободное произведение конечного числа финитно аппроксимируемых групп с конечной объединенной подгруппой является финитно аппроксимируемой группой. Это утверждение доказано еще в работе Г. Баумслага [4]. Аналогично из теоремы 2 следует, что свободное произведение конечного числа почти F_p-аппроксимируемых групп с конечной объединенной подгруппой само является почти F_p-аппроксимируемой группой. Этот результат был доказан в работе авторов [2].

Еще одним следствием из теоремы 2 будет следующее утверждение. Свободное произведение семейства почти F_p-аппроксимируемых групп является почти F_p-аппроксимируемой группой тогда и только тогда, когда индексы почти F_p-аппроксимируемости свободных множителей ограничены. Заметим, что для прямых произведений групп аналогичное утверждение не верно.

2. Вспомогательные утверждения

Пусть $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ — некоторое семейство групп и пусть

$$A = \underset{\lambda \in \Lambda}{*} A_\lambda$$

— свободное произведение групп A_λ.

Лемма 1. *Пусть все группы* A_λ *конечны и их порядки ограничены. Тогда существует гомоморфизм групп* A *на конечную группу, инъективный на всех* A_λ.

Доказательство. Так как порядки групп A_λ ограничены, то все эти группы с точностью до изоморфизма исчерпываются конечным набором групп B_1, B_2, …, B_n. Для каждого $\lambda \in \Lambda$ обозначим через φ_λ изоморфизм группы A_λ на одну из групп B_i. Тогда изоморфизмы φ_λ можно продолжить до гомоморфизма φ группы A на прямое произведение групп B_1, B_2, …, B_n. Этот гомоморфизм является искомым.

Лемма 2. *Пусть для каждого* $\lambda \in \Lambda$ *группа* A_λ *почти* F_p*-аппроксимируема и индексы почти* F_p*-аппроксимируемости групп* A_λ *ограничены. Тогда свободное произведение* A *групп* A_λ *почти* F_p*-аппроксимируемо.*

Доказательство. По условию для каждого $\lambda \in \Lambda$ в группе A_λ существует F_p-аппроксимируемая подгруппа B_λ такая, что индексы $[A_\lambda : B_\lambda]$ ограничены. Без потери общности можно считать, что для каждого $\lambda \in \Lambda$ подгруппа B_λ является нормальной в группе A_λ. Пусть

$$C = \mathop{*}_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda / B_\lambda$$

— свободное произведение фактор-групп A_λ / B_λ. И пусть ε — гомоморфизм группы A на группу C, продолжающий естественные гомоморфизмы $A_\lambda \to A_\lambda / B_\lambda$. Так как порядки групп A_λ / B_λ ограничены, то по лемме 1 существует гомоморфизм ρ группы C на некоторую конечную группу D, инъективный на всех A_λ / B_λ. Обозначим через L ядро гомоморфизма $\varepsilon\rho$. Тогда L — нормальная подгруппа конечного индекса группы A и для каждого $\lambda \in \Lambda$ $A_\lambda \cap L = B_\lambda$. По теореме Куроша подгруппа L раскладывается в свободное произведение некоторой свободной группы F и некоторых подгрупп вида

$$x^{-1} A_\lambda x \cap L = x^{-1}(A_\lambda \cap L)x = x^{-1} B_\lambda x,$$

где $x \in A$. Так как свободная группа F и подгруппы $x^{-1} B_\lambda x \cong B_\lambda$ являются F_p-аппроксимируемыми, то и группа L также F_p-аппроксимируема. Таким образом, группа A почти F_p-аппроксимируема.

3. Доказательство теоремы 2

Пусть $G = \left(\underset{\lambda \in \Lambda}{*} G_\lambda, H \right)$ — свободное произведение групп G_λ с конечной объединенной подгруппой H. И пусть для каждого $\lambda \in \Lambda$ группа G_λ почти F_p-аппроксимируема.

Предположим, что группа G почти F_p-аппроксимируема, т. е. содержит F_p-аппроксимируемую подгруппу конечного индекса n. Очевидно, что она финитно аппроксимируема и индексы почти F_p-аппроксимируемости групп G_λ ограничены числом n.

Наоборот, пусть группа G финитно аппроксимируема и индексы почти F_p-аппроксимируемости групп G_λ ограничены числом n. Так как группа G финитно аппроксимируема и H — конечная подгруппа группы G, то в группе G существует нормальная подгруппа N конечного индекса такая, что $N \cap H = 1$. По теореме Х. Нейман [3, с. 122] подгруппа N раскладывается в свободное произведение некоторой свободной группы F и некоторых подгрупп вида

$$x^{-1} G_\lambda x \cap N = x^{-1} (G_\lambda \cap N) x,$$

где $x \in G$. Так как группы G_λ почти F_p-аппроксимируемы и индексы почти F_p-аппроксимируемости групп G_λ ограничены, то аналогичным свойством обладают и подгруппы $x^{-1}(G_\lambda \cap N)x$. Так как свободная группа F является F_p-аппроксимируемой, группы $x^{-1}(G_\lambda \cap N)x$ почти F_p-аппроксимируемы и их индексы почти F_p-аппроксимируемости ограничены, то по лемме 2 группа N почти F_p-аппроксимируема. Отсюда и из того, что индекс подгруппы N в группе G конечен, следует, что и группа G почти F_p-аппроксимируема. Теорема 2 доказана.

Библиографический список

1. *Азаров Д. Н.* О финитной аппроксимируемости свободных произведений групп с одной объединенной подгруппой // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38. С. 3—13.
2. *Азаров Д. Н., Гольцов Д. В.* Почти аппроксимируемость конечными *p*-группами свободного произведения двух групп с конечными объединенными подгруппами // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер.: Естественные, общественные науки. 2011. Вып. 2. С. 94—97.
3. *Линдон Р., Шупп П.* Комбинаторная теория групп. М. : Мир, 1980. 447 с.
4. *Baumslag G.* On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. Vol. 106, № 2. P. 193—209.