УДК 512.543

А. В. Розов

ОБ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ КОНЕЧНЫМИ *p*-ГРУППАМИ СВОБОДНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ НИЛЬПОТЕНТНЫХ ГРУПП КОНЕЧНОГО РАНГА С ЦЕНТРАЛЬНЫМИ ОБЪЕДИНЕННЫМИ ПОДГРУППАМИ

Получен критерий аппроксимируемости конечными p-группами свободного произведения нильпотентных групп конечного ранга с центральными объединенными подгруппами.

***Ключевые слова*:** нильпотентная группа конечного ранга, центр группы, обобщенное свободное произведение групп, аппроксимируемость конечными p-группами.

The criterion of approximability of free product of nilpotent groups of finite rank with central amalgamated subgroup by finite p-groups was received.

***Key words*:** nilpotent group of finite rank, group center, generalized free product of groups, residually a finite p-group.

1. Введение

Пусть K — некоторый класс групп. Напомним, что группа G называется аппроксимируемой группами из класса K (или, короче, K-аппроксимируемой), если для каждого неединичного элемента x из G существует гомоморфизм группы G на группу из класса K, при котором образ элемента x отличен от единицы. Если F обозначает класс всех конечных групп, то понятие F-аппроксимируемой группы совпадает с классическим понятием финитно аппроксимируемой группы. Наряду с финитной аппроксимируемостью изучается также свойство F_p-аппроксимируемости, где p — простое число, F_p — класс всех конечных p-групп. Здесь будет рассмотрено еще и свойство почти F_p-аппроксимируемости, являющееся промежуточным между финитной аппроксимируемостью и F_p-аппроксимируемостью. Напомним, что группа G называется почти F_p-аппроксимируемой, если она содержит F_p-аппроксимируемую подгруппу конечного индекса.

Перейдем теперь к свободным произведениям с объединенными подгруппами. Пусть A и B — произвольные группы, H и K — подгруппы групп A и B соответственно, φ — изоморфизм подгруппы H на подгруппу K. И пусть

$$G = (A * B;\ H = K, \varphi)$$

— свободное произведение групп A и B с подгруппами H и K, объединенными относительно изоморфизма φ. Напомним, что группа G порождается всеми порождающими групп A и B и определяется всеми определяющими соотношениями этих групп, а также соотношениями вида $h\varphi = h$, где $h \in H$.

Очевидным необходимым условием финитной аппроксимируемости (F_p-аппроксимируемости, почти F_p-аппроксимируемости) группы G является финитная аппроксимируемость (F_p-аппроксимируемость, почти F_p-аппроксимируемость) групп A и B. Несложные примеры показывают, что перечисленные условия не являются достаточными.

Наиболее распространенный подход к изучению финитной аппроксимируемости (F_p-аппроксимируемости, почти F_p-аппроксимируемости) группы G состоит в том, что на свободные множители A и B, помимо условия финитной аппроксимируемости (F_p-аппроксимируемости, почти F_p-аппроксимируемости), накладываются еще некоторые дополнительные условия. Дополнительные ограничения, как правило, накладываются и на объединяемые подгруппы H и K. Примером таких ограничений может служить конечность подгрупп H и K, их цикличность, конечность индексов подгрупп H и K в группах A и B, а также их нормальность в группах A и B соответственно. Ранее нами был получен следующий результат.

Теорема 1 [2]. *Пусть G — свободное произведение финитно аппроксимируемых групп A и B с нормальными объединенными подгруппами H и K, не совпадающими с группами A и B соответственно. Если группы A и B являются разрешимыми группами конечного ранга, то группа G тогда и только тогда финитно аппроксимируема, когда фактор-группы A/H и B/K финитно аппроксимируемы.*

Напомним, что группа G называется группой конечного ранга, если существует целое положительное число r такое, что любая конечно порожденная подгруппа группы G порождается не более чем r элементами.

Заметим, что теорема 1 не может быть распространена с финитной аппроксимируемости на F_p-аппроксимируемость, поскольку даже свободное произведение двух конечных p-групп с нормальными объединенными подгруппами не обязано быть F_p-аппроксимируемой группой. Иначе дело обстоит с почти F_p-аппроксимируемостью. Для свободного произведения нильпотентных групп конечного ранга с нормальными объединенными подгруппами в [4] был получен следующий результат.

Теорема 2. *Пусть G — свободное произведение почти F_p-аппроксимируемых групп A и B с нормальными объединенными подгруппами H и K, не совпадающими с группами A и B соответственно. Если группы A и B являются нильпотентными группами конечного ранга, то группа G тогда и только тогда почти F_p-аппроксимируема, когда фактор-группы A/H и B/K почти F_p-аппроксимируемы.*

Выше говорилось, что теорема 1 не может быть распространена с финитной аппроксимируемости на F_p-аппроксимируемость. Тем не менее, требуя дополнительно от объединяемых подгрупп H и K, чтобы они содержались в центрах групп A и B, мы докажем здесь следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть G — свободное произведение* F_p *-аппроксимируемых групп A и B с центральными объединенными подгруппами H и K, не совпадающими с группами A и B соответственно. Если группы A и B являются нильпотентными группами конечного ранга, то группа G тогда и только тогда* F_p *-аппроксимируема, когда фактор-группы A/H и B/K* F_p *-аппроксимируемы.*

Эта теорема обобщает аналогичный результат, доказанный в работе [5] для частного случая, когда *A* и *B* — конечно порожденные нильпотентные группы.

Для доказательства теоремы 3 нам понадобится ряд вспомогательных утверждений.

2. Вспомогательные утверждения

В работе [2, лемма 4] нами был получен следующий результат.

Лемма 1. *Пусть G — нильпотентная группа конечного ранга. Если группа G является расширением конечной группы с помощью финитно аппроксимируемой группы, то группа G финитно аппроксимируема.*

Верно будет и аналогичное утверждение для F_p -аппроксимируемости группы *G*.

Лемма 2. *Пусть G — нильпотентная группа конечного ранга. Если группа G является расширением конечной p-группы с помощью* F_p *-аппроксимируемой группы, то группа G* F_p *-аппроксимируема.*

Доказательство. Пусть *H* — конечная нормальная *p*-подгруппа группы *G* и фактор-группа G/H F_p-аппроксимируема. Покажем, что группа *G* F_p-аппроксимирума. Для этого рассмотрим произвольный неединичный элемент g из *G* и укажем для него гомоморфизм группы *G* на конечную *p*-группу, переводящий g в элемент, отличный от 1.

Предположим сначала, что $g \notin H$. Пусть $\varepsilon : G \to G/H$ — естественный гомоморфизм. Тогда $g\varepsilon \neq 1$. Отсюда и из того, что G/H F_p -аппроксимируема, следует, что существует гомоморфизм ρ группы G/H на конечную *p*-группу такой, что $g\varepsilon\rho \neq 1$. Поэтому $\varepsilon\rho$ — искомый гомоморфизм.

Теперь предположим, что $g \in H$. В силу леммы 1 группа *G* финитно аппроксимируема. Отсюда и из того, что ее подгруппа *H* конечна, следует, что существует гомоморфизм ρ группы *G* на некоторую конечную группу *F*, инъективный на *H*. Хорошо известно (см., напр., [3, п. 17.1.4]), что любая конечная нильпотентная группа раскладывается в прямое произведение своих силовских q-подгрупп. Поэтому *F* раскладывается в прямое произведение вида $F = P \times T$, где *P* — наибольшая *p*-подгруппа группы *F*. Очевидно, что $H\rho \subseteq P$. Рассмотрим проекцию π группы *F* на ее подгруппу *P*. Тогда $\rho\pi$ — гомоморфизм группы *G* на конечную *p*-группу *P*, инъективный на *H*. Поэтому $g\rho\pi \neq 1$. Таким образом, $\rho\pi$ — искомый гомоморфизм. Лемма доказана.

Пусть $G = (A * B; H = K, \varphi)$ — свободное произведение групп A и B с подгруппами H и K, объединенными относительно изоморфизма φ. Хорошо известно, что группы A и B естественным образом вложимы в группу G. Поэтому далее будем считать, что A и B — подгруппы группы G. Тогда $A \cap B = H = K$. Далее для группы G будем использовать более компактное обозначение $G = (A * B, H)$ и называть ее свободным произведением групп A и B с объединенной подгруппой H.

Лемма 3. *Пусть G — свободное произведение F_p-аппроксимируемых групп A и B с конечной объединенной подгруппой H. Если H центральна в группах A и B, то группа G F_p-аппроксимируема.*

Доказательство этого утверждения можно найти в [1, предл. 2.3].

Напомним, что подгруппа H группы G называется F_p-отделимой, если для каждого элемента x группы G, не принадлежащего H, существует гомоморфизм φ группы G на конечную p-группу такой, что $x\varphi \notin H\varphi$. Хорошо известна и легко проверяется следующая связь между понятиями F_p-аппроксимируемой группы и F_p-отделимой подгруппы.

Лемма 4. *Пусть G — группа, H — ее нормальная подгруппа. Подгруппа H F_p-отделима в группе G тогда и только тогда, когда фактор-группа G/H F_p-аппроксимируема.*

3. Доказательство теоремы 3

Пусть G — свободное произведение F_p-аппроксимируемых групп A и B с центральной объединенной подгруппой H, не совпадающей с группами A и B. И пусть A и B — нильпотентные группы конечного ранга. Докажем, что группа G F_p-аппроксимируема тогда и только тогда, когда фактор-группы A/H и B/H F_p-аппроксимируемы.

Пусть фактор-группы A/H и B/H F_p-аппроксимируемы. Докажем, что группа G F_p-аппроксимируема. Для этого достаточно для каждого неединичного элемента g из G указать гомоморфизм группы G на F_p-аппроксимируемую группу, при котором образ g будет отличен от 1.

Рассмотрим сначала случай, когда $g \notin H$. Пусть $\varepsilon : G \to G/H$ — естественный гомоморфизм. Тогда образ элемента g относительно ε отличен от 1. При этом фактор-группа G/H является свободным произведением F_p-аппроксимируемых групп A/H и B/H и поэтому сама F_p-аппроксимируема. Таким образом, ε — искомый гомоморфизм.

Теперь рассмотрим случай, когда $g \in H$. Так как группа H F_p-аппроксимируема, то в ней существует подгруппа N конечного p-индекса, не содержащая элемент g. При этом N нормальна в группе G, поскольку содержится в ее центре. Рассмотрим естественный гомоморфизм

$$\varepsilon : G \to G/N = (A/N * B/N, H/N).$$

Заметим, что группы A/N и B/N являются расширениями конечной p-группы H/N с помощью F_p-аппроксимируемых групп A/H и B/H соответственно. Отсюда и из того, что A/N и B/N — нильпотентные группы конечного ранга, по лемме 2 следует, что они F_p-аппроксимируемы. Таким образом, группа G/N является свободным произведением F_p-аппроксимируемых групп A/N и B/N с конечной центральной объединенной подгруппой H/N. Поэтому из леммы 3 получаем, что группа G/N F_p-аппроксимируема. Остается отметить, что $g\varepsilon \neq 1$ и ε — искомый гомоморфизм.

Докажем теперь необходимость в теореме 3. Пусть группа G F_p-аппроксимируема. Покажем, что группы A/H и B/H F_p-аппроксимируемы. В силу леммы 4 для этого достаточно доказать F_p-отделимость подгруппы H в группах A и B.

Предположим, что подгруппа H не F_p-отделима в группе A. Тогда в группе A существует элемент a, не принадлежащий H и такой, что для каждого гомоморфизма φ группы A на конечную p-группу $a\varphi \in H\varphi$. Зафиксируем элемент b группы B, не принадлежащий H, и рассмотрим коммутатор c элементов a и b, т. е. элемент вида

$$c = [a,b] = a^{-1}b^{-1}ab.$$

Элемент c имеет в группе G несократимую запись длины 4 и поэтому отличен от 1. Отсюда и из того, что G F_p-аппроксимируема, следует, что существует гомоморфизм ψ группы G на конечную p-группу такой, что $c\psi \neq 1$. Из сделанного выше предположения заключаем, что $a\psi \in H\psi$, т. е. $a\psi = h\psi$ для некоторого элемента h группы H. Используя центральность подгруппы H в группе B, получаем:

$$c\psi = [a,b]\psi = [a\psi, b\psi] = [h\psi, b\psi] = [h,b]\psi = 1\psi = 1.$$

Однако раньше было сказано, что $c\psi \neq 1$. Таким образом, подгруппа H F_p-отделима в группе A. Аналогично доказывается F_p-отделимость подгруппы H в группе B. Теорема доказана.

Библиографический список

1. *Азаров Д. Н.* О финитной аппроксимируемости свободных произведений групп с одной объединенной подгруппой // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 1. С. 3—13.

2. *Азаров Д. Н., Розов А. В.* О финитной аппроксимируемости свободного произведения разрешимых групп конечного ранга с нормальными объединенными подгруп-

пами // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер.: Естественные, общественные науки. 2011. Вып. 2. С. 98—103.

3. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. М. : Наука, 1977. 240 с.
4. *Розов А. В.* Некоторые аппроксимационные свойства свободных произведений разрешимых групп конечного ранга с нормальными объединенными подгруппами // Чебышевский сб. Тула, 2012. Т. 13, вып. 1. С. 130—142.
5. *Kim G., Lee Y., McCarron J.* Residual *p*-finiteness of certain generalized free products of nilpotent groups // Kyoungpook Math. J. 2008. Vol. 48, № 3. P. 495—502.