УДК 512.543

Е. А. Туманова

ОБ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ КОНЕЧНЫМИ π-ГРУППАМИ *HNN*-РАСШИРЕНИЙ ГРУПП

Получены некоторые необходимые и достаточные условия аппроксимируемости конечными π-группами *HNN*-расширения, связанные подгруппы которого совпадают и являются нормальными в базовой группе.

Ключевые слова: *HNN*-расширение, аппроксимируемость конечными π-группами.

Some necessary and sufficient conditions of approximability of *HNN*-extensions which associated subgroups are coincident and normal in the basic groups by finite π-groups are obtained.

Key words: *HNN*-extension, residuality by finite π-groups.

Введение

Напомним определения основных понятий, используемых в данной статье.

Пусть π — непустое множество простых чисел. Группа G называется аппроксимируемой конечными π-группами (Φ_π-аппроксимируемой), если для любого неединичного элемента $g \in G$ существует гомоморфизм φ группы G на некоторую конечную π-группу такой, что $g\varphi \neq 1$.

Подмножество M группы G отделимо конечными π-группами (Φ_π-отделимо) в группе G, если для любого элемента g группы G, не принадлежащего подмножеству M, существует гомоморфизм φ группы G на конечную π-группу такой, что $g\varphi \notin M\varphi$.

Пусть группа G задана представлением $G = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n; W\rangle$, в группе G фиксированы две изоморфные подгруппы H и K и некоторый изоморфизм $\varphi : H \to K$. *HNN*-расширением группы G с проходной буквой t и подгруппами H и K, связанными относительно изоморфизма φ, называется группа $G^* = (G, t;\ t^{-1}Ht = K, \varphi)$, порождаемая элементами $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и еще одним элементом t и определяемая множеством слов W и всевозможными соотношениями вида $t^{-1}ut = u\varphi$, где u — слово от порождающих $a_1, a_2, \ldots, a_n$, определяющее элемент из подгруппы H, и $u\varphi$ — слово от $a_1, a_2, \ldots, a_n$, определяющее элемент из подгруппы K, являющийся φ-образом элемента, определяемого словом u.

В этой статье рассматривается частный случай введенной выше конструкции, когда подгруппы H и K совпадают и, следовательно, φ является автоморфизмом подгруппы H. При таких ограничениях строение группы G^* описывается при помощи конструкций расщепляемого расширения и свободного произведения двух групп с объединенной подгруппой (см. предложение 3), что позволяет использовать доказанные ранее результаты об аппроксимируемости обобщенных свободных произведений групп.

Если Y — нормальная подгруппа некоторой группы X, то ограничение на подгруппу Y любого внутреннего автоморфизма группы X является автоморфизмом группы Y. Множество $\mathrm{Aut}_X(Y)$ всех таких автоморфизмов является подгруппой группы $\mathrm{Aut}\,Y$ всех автоморфизмов группы Y.

Если подгруппа H является нормальной в G, то она нормальна и в группе G^*, поэтому можно рассмотреть подгруппу $\mathrm{Aut}_{G^*}(H)$ группы $\mathrm{Aut}\,H$, которая, как легко видеть, порождается подгруппой $\mathrm{Aut}_G(H)$ и автоморфизмом φ.

Первым из основных результатов работы является

Теорема 1. Пусть G — Φ_π-аппроксимируемая группа, H — конечная нормальная подгруппа группы G, φ — некоторый автоморфизм группы H. Группа $G^* = (G,\ t;\ t^{-1}Ht = H,\ \varphi)$ Φ_π-аппроксимируема тогда и только тогда, когда подгруппа группы $\mathrm{Aut}\,H$, порожденная подгруппой $\mathrm{Aut}_G(H)$ и автоморфизмом φ, является конечной π-группой.

Следствие. Пусть G — Φ_π-аппроксимируемая группа, H — конечная циклическая нормальная подгруппа группы G, φ — некоторый автоморфизм группы H. Группа $G^*= (G,\ t;\ t^{-1}Ht = H,\ \varphi)$ Φ_π-аппроксимируема тогда и только тогда, когда порядок автоморфизма φ является π-числом.

Подгруппу R группы G назовем $(H,\ \varphi)$-совместимой, если выполнено равенство $(H \cap R)\varphi = H \cap R$.

Если при этом подгруппа R нормальна в группе G, то отображение $\varphi_R : HR/R \to HR/R$, действующее по правилу $(hR)\varphi_R = (h\varphi)R$, где $h \in H$, определено корректно и является автоморфизмом подгруппы HR/R фактор-группы G/R. Это позволяет построить HNN-расширение

$$G_R^* = (G/R,\ \tau;\ \tau^{-1}HR/R\tau = HR/R,\ \varphi_R).$$

Нетрудно показать, что естественный гомоморфизм $\rho : G \to G/R$ может быть продолжен до гомоморфизма $\rho_R : G^* \to G_R^*$, переводящего t в τ.

При дополнительном предположении о нормальности подгруппы H группы G определим следующую специализацию понятия $(H,\ \varphi)$-совместимой подгруппы. Нормальную подгруппу R группы G назовем $(H,\ \varphi,\ \pi)$-совместимой, если:

1) подгруппа R $(H,\ \varphi)$-совместима;
2) индекс подгруппы R в группе G конечен и является π-числом;
3) подгруппа $\mathrm{Aut}_{G_R^*}(HR/R)$ группы $\mathrm{Aut}(HR/R)$, порождаемая подгруппой $\mathrm{Aut}_{G/R}(HR/R)$ и автоморфизмом φ_R, является конечной π-группой.

Теорема 2. Пусть G — некоторая группа, H — нормальная подгруппа группы G, φ — некоторый автоморфизм группы H, $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ — семейство всех $(H,\ \varphi,\ \pi)$-совместимых подгрупп группы G. Тогда

1) если группа $G^* = (G,\ t;\ t^{-1}Ht = H,\ \varphi)$ Φ_π-аппроксимируема, то семейство $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ является фильтрацией;

2) если семейство $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ является H-фильтрацией, то группа $G^* = (G, t;\ t^{-1}Ht = H, \varphi)$ Φ_π-аппроксимируема.

Напомним, что семейство $\{Y_i\}_{i\in I}$ нормальных подгрупп некоторой группы X называется фильтрацией, если $\bigcap_{i\in I} Y_i = 1$. Пусть Z — подгруппа группы X. Фильтрация $\{Y_i\}_{i\in I}$ называется Z-фильтрацией, если $\bigcap_{i\in I} ZY_i = Z$.

Теорема 3. Пусть G — Φ_π-аппроксимируемая группа, H — нормальная подгруппа группы G, φ — автоморфизм группы H, являющийся ограничением на подгруппу H внутреннего автоморфизма группы G. Группа $G^* = (G, t;\ t^{-1}Ht = H, \varphi)$ Φ_π-аппроксимируема тогда и только тогда, когда подгруппа H Φ_π-отделима в группе G.

Теорема 4. Пусть G — Φ_π-аппроксимируемая конечно порожденная нильпотентная группа, H — центральная подгруппа группы G, φ — автоморфизм группы H, порядок которого конечен и является π-числом. Группа $G^* = (G, t;\ t^{-1}Ht = H, \varphi)$ Φ_π-аппроксимируема тогда и только тогда, когда подгруппа H Φ_π-отделима в группе G.

Теорема 5. Пусть G — Φ_π-аппроксимируемая группа, H — нормальная бесконечная циклическая подгруппа группы G, φ — автоморфизм группы H. Если автоморфизм φ является тождественным, то группа $G^* = (G, t; t^{-1}Ht = H, \varphi)$ Φ_π-аппроксимируема тогда и только тогда, когда подгруппа H Φ_π-отделима в группе G. Если автоморфизм φ не является тождественным, то группа $G^* = (G, t;\ t^{-1}Ht = H, \varphi)$ Φ_π-аппроксимируема тогда и только тогда, когда подгруппа H Φ_π-отделима в группе G и множество π содержит число 2.

§ 1. Доказательства теоремы 1 и следствия

Предложение 1. Пусть X — произвольная группа, Y — конечная нормальная подгруппа группы X. Если существует гомоморфизм γ группы X в конечную π-группу, инъективный на Y, то $\mathrm{Aut}_X(Y)$ — конечная π-группа. В частности, если группа X Φ_π-аппроксимируема, то $\mathrm{Aut}_X(Y)$ — конечная π-группа.

Доказательство. Пусть гомоморфизм с требуемыми свойствами существует и пусть N — ядро этого гомоморфизма. Тогда N — нормальная подгруппа конечного π-индекса группы X и $Y \cap N = 1$. Значит, подгруппы Y и N поэлементно перестановочны. Следовательно, N содержится в централизаторе $C_X(Y)$ подгруппы Y группы X. Поэтому $C_X(Y)$ — подгруппа конечного π-индекса группы X. Отсюда и из того, что группа $\mathrm{Aut}_X(Y)$, как легко видеть, изоморфна фактор-группе $X/C_X(Y)$, следует, что $\mathrm{Aut}_X(Y)$ — конечная π-группа. Предложение доказано.

Предложение 2. Пусть X — расщепляемое расширение группы Z при помощи группы Y, $\rho : Y \to \mathrm{Aut}Z$ — сопровождающий гомоморфизм. Пусть также группа $Y\rho$ конечна. Группа X Φ_π-аппроксимируема тогда и только тогда, когда группы Z и Y Φ_π-аппроксимируемы и $Y\rho$ — конечная π-группа.

Доказательство. Докажем достаточность условия. Обозначим через C ядро гомоморфизма ρ. Очевидно, что подгруппа C поэлементно перестановочна с Z. Отсюда следует, что подгруппа CZ нормальна в группе X, поскольку $X = YZ$ и подгруппа C нормальна в группе Y. Из соотношений

$$X/CZ = YZ/CZ = YCZ/CZ \cong Y/(Y \cap CZ) = Y/C \cong Y\rho$$

и из того, что $Y\rho$ — конечная π-группа, получаем, что CZ — нормальная подгруппа конечного π-индекса группы X.

Так как подгруппа C поэлементно перестановочна с Z, то подгруппа CZ является прямым произведением Φ_π-аппроксимируемых групп C, Z и, следовательно, Φ_π-аппроксимируема. Значит, группа X Φ_π-аппроксимируема как расширение Φ_π-аппроксимируемой группы при помощи конечной π-группы [2, лемма 1.5].

Теперь покажем необходимость условия. Из Φ_π-аппроксимируемости расщепляемого расширения X следует Φ_π-аппроксимируемость его подгрупп Z и Y, а также Φ_π-отделимость централизатора $C_X(Z)$. Как уже было отмечено выше, $\mathrm{Aut}_X(Z) \cong X/C_X(Z)$. Поэтому группа $\mathrm{Aut}_X(Z)$ Φ_π-аппроксимируема. Значит, ее подгруппа $Y\rho$ также Φ_π-аппроксимируема. При этом $Y\rho$ конечна, следовательно, она является конечной π-группой. Предложение доказано.

Предложение 3. Пусть G — произвольная группа, H — подгруппа группы G, φ — некоторый автоморфизм группы H. Пусть также A — подгруппа группы $G^* = (G, t;\ t^{-1}Ht = H, \varphi)$, порожденная подгруппой H и элементом t. Тогда

1) подгруппа A является расщепляемым расширением группы H при помощи бесконечной циклической группы, порожденной элементом t, с сопровождающим гомоморфизмом, переводящим t в автоморфизм φ группы H;

2) группа G^* представляет собой свободное произведение своих подгрупп A и G с объединенной подгруппой H.

Доказательство. Пусть H' — изоморфная подгруппе H группа и $\psi : H' \to H$ — изоморфизм. Обозначим через A' расщепляемое расширение группы H' при помощи бесконечной циклической группы, порожденной элементом t', с сопровождающим гомоморфизмом $\rho : t' \to \varphi' = \psi\varphi\psi^{-1}$.

Пусть P — свободное произведение групп A' и G с подгруппами H' и H, объединенными относительно изоморфизма ψ. Нетрудно показать, что с помощью преобразований Тице представление группы P может быть преобразовано в представление группы G^*. При этом элементы подгруппы H' переходят в элементы подгруппы H, а элемент t' — в элемент t. Таким образом, оба утверждения предложения имеют место. Предложение доказано.

Доказательство теоремы 1. Необходимость условия следует из предложения 1, проверим его достаточность.

Обозначим через A подгруппу группы G^*, порожденную подгруппой H и элементом t, и покажем, что она Φ_π-аппроксимируема. Тогда группа G^* будет Φ_π-аппроксимируема в силу теоремы 2 из [1].

Бесконечная циклическая группа $\langle t\rangle$ Φ_π-аппроксимируема для любого множества π простых чисел. В силу предложения 3 образ подгруппы $\langle t\rangle$ относительно сопровождающего гомоморфизма расщепляемого расширения A совпадает с подгруппой $\langle\varphi\rangle$, которая является конечной π-группой. Следовательно, группа A Φ_π-аппроксимируема согласно предложению 2.

Доказательство следствия. Необходимость условия легко следует из теоремы 1, покажем его достаточность.

Заметим, что в силу предложения 1 $\mathrm{Aut}_G(H)$ — конечная π-группа.

Так как H — циклическая группа, то группа ее автоморфизмов абелева. Известно, что подгруппа, порожденная двумя подгруппами в абелевой группе, является их произведением. Следовательно, $\mathrm{Aut}_{G^*}(H)$ совпадает с произведением конечных π-групп $\mathrm{Aut}_G(H)$ и $\langle\varphi\rangle$. Значит, $\mathrm{Aut}_{G^*}(H)$ — конечная π-группа. Тогда ввиду доказанной выше теоремы группа G^* Φ_π-аппроксимируема.

§ 2. Доказательство теоремы 2

Предложение 4. Пусть G — некоторая группа, H — нормальная подгруппа группы G, φ — некоторый автоморфизм группы H. Нормальная подгруппа R группы G является (H, φ, π)-совместимой тогда и только тогда, когда существует нормальная подгруппа N конечного π-индекса группы $G^* = (G, t;\ t^{-1}Ht = H, \varphi)$ такая, что $N \cap G = R$.

Доказательство. Покажем достаточность условия. Пусть N — нормальная подгруппа конечного π-индекса группы G^* такая, что $N \cap G = R$. Тогда подгруппа R имеет конечный π-индекс в группе G.

Так как $t^{-1}Ht = H$ и подгруппа N нормальна в группе G^*, то

$$(H \cap R)\varphi = (H \cap N \cap G)\varphi = (H \cap N)\varphi =$$
$$= t^{-1}(H \cap N)t = H \cap N = H \cap N \cap G = H \cap R.$$

Следовательно, подгруппа R (H, φ)-совместима и определены HNN-расширение $G_R^* = (G/R, \tau;\ \tau^{-1}HR/R\tau = HR/R, \varphi_R)$ и гомоморфизм $\rho_R : G^* \to G_R^*$. Покажем, что группа G_R^* Φ_π-аппроксимируема. Тогда в силу предложения 1 $\mathrm{Aut}_{G_R^*}(HR/R)$ будет конечной π-группой, а R — (H, φ, π)-совместимой подгруппой.

Заметим, что $N\rho_R \cap G/R = 1$. Известно [3], что нормальная подгруппа HNN-расширения, тривиально пересекающаяся с базовой группой, свободна. Следовательно, группа $N\rho_R$ Φ_π-аппроксимируема для любого множества π простых чисел. Значит, группа G_R^* Φ_π-аппроксимируема как расширение Φ_π-аппроксимируемой группы $N\rho_R$ при помощи конечной π-группы $G\rho_R/N\rho_R \cong G/N$ [2, лемма 1.5].

Проверим необходимость условия. Пусть R — (H, φ, π)-совместимая подгруппа группы G. Тогда, как и выше, можем построить HNN-расширение $G_R^* = (G/R, \tau;\ \tau^{-1}HR/R\tau = HR/R, \varphi_R)$ и гомоморфизм ρ_R: $G^* \to G_R^*$. Легко видеть, что из (H, φ, π)-совместимости подгруппы R группы G в силу теоремы 1 следует Φ_{π}-аппроксимируемость HNN-расширения G_R^*.

Так как G/R — конечная подгруппа Φ_{π}-аппроксимируемой группы G_R^*, то существует подгруппа M конечного π-индекса группы G_R^* такая, что $M \cap G/R = 1$. Обозначим через N прообраз подгруппы M относительно гомоморфизма ρ_R. Тогда N — нормальная подгруппа конечного π-индекса группы G^* и $N \cap G = R$. Предложение доказано.

Доказательство теоремы 2. Покажем справедливость необходимого условия. Пусть g — произвольный неединичный элемент группы G. Тогда он отличен от единицы и в группе G^*. Группа G^* Φ_{π}-аппроксимируема, следовательно, в ней найдется нормальная подгруппа N конечного π-индекса, не содержащая элемент g. Обозначим $N \cap G$ через R. Тогда $g \notin R$ и в силу предложения 4 подгруппа R (H, φ, π)-совместима в группе G.

Таким образом, если группа G^* Φ_{π}-аппроксимируема, то семейство $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ всех (H, φ, π)-совместимых подгрупп группы G является фильтрацией.

Проверим справедливость достаточного условия. Пусть g — произвольный неединичный элемент группы G^*. Найдем (H, φ, π)-совместимую подгруппу R группы G такую, что образ элемента g относительно гомоморфизма ρ_R отличен от единицы в группе G_R^*. Тогда группа G_R^* будет Φ_{π}-аппроксимируема в силу теоремы 1 и гомоморфизм ρ_R удастся продолжить до гомоморфизма группы G^* на конечную π-группу, переводящего g в элемент, не равный единице.

Возможны два случая: $g \in G$ и $g \notin G$. В первом случае существование искомой подгруппы следует из того, что $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ — фильтрация.

Пусть теперь $g \notin G$. Зафиксируем некоторую его приведенную запись

$$g = g_0 t^{\varepsilon_1} g_1 t^{\varepsilon_2} g_2 \ldots g_{n-1} t^{\varepsilon_n} g_n, \text{ где } n > 0.$$

Так как $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ — H-фильтрация, то для каждого g_i такого, что $1 \le i \le n-1$ и $\varepsilon_i + \varepsilon_{i+1} = 0$, найдется $\lambda_i \in \Lambda$, удовлетворяющее условию $g \notin HR_{\lambda_i}$. Согласно предложению 4 для всякого $\lambda_i \in \Lambda$ существует нормальная подгруппа N_{λ_i} конечного π-индекса группы G^* такая, что $N_{\lambda_i} \cap G = R_{\lambda_i}$. Положим $N = \bigcap\limits_{\lambda_i} N_{\lambda_i}$ и $R = N \cap G$. Тогда снова по предложению 4 подгруппа R группы G (H, φ, π)-совместима.

В силу выбора подгрупп R_{λ_i} и соотношения $R = \bigcap\limits_{\lambda_i} R_{\lambda_i}$ запись

$$g\rho_R = g_0R\, \tau^{\varepsilon_1} g_1R\, \tau^{\varepsilon_2} g_2R \ldots g_{n-1}R\, \tau^{\varepsilon_n} g_nR$$

элемента $g\rho_R$ является приведенной в группе G_R^* и имеет длину, большую 1. Следовательно, $g\rho_R$ отличен от единицы в группе G_R^*. Таким образом, подгруппа R является искомой. Теорема доказана.

§ 3. Доказательства теорем 3—5

Доказательство теоремы 3. Пусть φ — ограничение на подгруппу H внутреннего автоморфизма группы G, порожденного элементом g_0 группы G.

Для проверки достаточности условия покажем, что в данном случае семейство всех (H, φ, π)-совместимых подгрупп группы G совпадает с семейством всех нормальных подгрупп конечного π-индекса группы G.

Так как группа G Φ_π-аппроксимируема и подгруппа H Φ_π-отделима в ней, то последнее семейство является H-фильтрацией. Поэтому группа G^* будет Φ_π-аппроксимируема в силу теоремы 2.

Пусть N — произвольная нормальная подгруппа конечного π-индекса группы G. (H, φ)-совместимость подгруппы N следует из нормальности подгрупп H и N в группе G. Справедливость второго условия из определения (H, φ, π)-совместимой подгруппы очевидна.

Проверим выполнимость третьего условия. Заметим, что автоморфизм φ_N является ограничением внутреннего автоморфизма группы G/N, порожденного элементом g_0N, на подгруппу HN/N. Поэтому $\varphi_N \in \mathrm{Aut}_{G/N}(HN/N)$. Значит, группы $\mathrm{Aut}_{G_N^*}(HN/N)$ и $\mathrm{Aut}_{G/N}(HN/N)$ совпадают. В силу предложения 1 $\mathrm{Aut}_{G/N}(HN/N)$ — конечная π-группа. Следовательно, подгруппа N (H, φ, π)-совместима.

Необходимость условия теоремы будем доказывать от противного. Предположим, что подгруппа H не является Φ_π-отделимой в группе G. Тогда существует элемент g группы G, не принадлежащий подгруппе H, такой, что для любой нормальной подгруппы N конечного π-индекса группы G справедливо включение $g \in HN$.

Рассмотрим элемент $u = t^{-1}g^{-1}t\,g_0^{-1}gg_0$ группы G^*. Так как $g^{-1} \notin H$, то элемент u имеет приведенную запись длины 2, следовательно, отличен от единицы. Пусть M — произвольная нормальная подгруппа конечного π-индекса группы G^*. Обозначим $M \cap G$ через N. Тогда N — нормальная подгруппа конечного π-индекса группы G и, следовательно, $g \in HN$, т. е. для некоторого элемента h подгруппы H выполнено сравнение $h \equiv g \pmod N$. Значит, $h \equiv g \pmod M$. Тогда $t^{-1}g^{-1}t\,g_0^{-1}gg_0 \equiv t^{-1}h^{-1}t\,g_0^{-1}hg_0 \pmod M$. Заметим, что $t^{-1}h^{-1}t = (h^{-1})\varphi = g_0^{-1}h^{-1}g_0$. Следовательно, $u \equiv g_0^{-1}h^{-1}g_0\,g_0^{-1}hg_0 = 1 \pmod M$, что противоречит Φ_π-аппроксимируемости группы G^*.

Значит, подгруппа H Φ_π-отделима в группе G. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 4. Согласно предложению 3 подгруппа A, порожденная подгруппой H и элементом t, является расщепляемым расширением группы H при помощи бесконечной циклической группы с порождающим элементом t. В силу предложений 2 и 3 группа A Φ_π-аппроксимируема.

Фактор-группа A/H изоморфна бесконечной циклической группе, порожденной элементом t, следовательно, она Φ_π-аппроксимируема. Значит, подгруппа H Φ_π-отделима в группе A.

Таким образом, если подгруппа H совпадает с группой G, то она Φ_π-отделима в G, а группа G^* совпадает с A и потому Φ_π-аппроксимируема. В противном случае утверждение теоремы следует из теоремы 3 статьи [1]. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 5. Первое утверждение теоремы следует из теоремы 3. Покажем справедливость второго утверждения.

Как и при доказательстве теоремы 3, для проверки достаточности условия покажем, что в данном случае семейство $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ всех (H, φ, π)-совместимых подгрупп группы G совпадает с семейством всех нормальных подгрупп конечного π-индекса группы G. Тогда Φ_π-аппроксимируемость группы G^* будет следовать из теоремы 2.

Пусть N — произвольная нормальная подгруппа конечного π-индекса группы G. (H, φ)-совместимость подгруппы N следует из того, что автоморфизм φ переводит каждую подгруппу группы H в себя. Справедливость второго условия из определения (H, φ, π)-совместимой подгруппы очевидна.

Проверим выполнимость третьего условия. Так как H — циклическая группа, то фактор-группа HN/N также является циклической. Следовательно, $\mathrm{Aut}(HN/N)$ — абелева группа и ее подгруппа $\mathrm{Aut}_{G_N^*}(HN/N)$, порождаемая подгруппами $\mathrm{Aut}_{G/N}(HN/N)$ и $\langle\varphi_N\rangle$, является их произведением. В силу предложения 1 $\mathrm{Aut}_{G/N}(HN/N)$ — конечная π-группа. Так как порядок автоморфизма φ_N равен 2 и число 2 содержится в множестве простых чисел π, то $\langle\varphi_N\rangle$ — также конечная π-группа. Тогда $\mathrm{Aut}_{G_N^*}(HN/N)$ — конечная π-группа как произведение двух конечных π-групп $\mathrm{Aut}_{G/N}(HN/N)$ и $\langle\varphi_N\rangle$. Следовательно, подгруппа N (H, φ, π)-совместима.

Проверим необходимость условия. В силу предложения 3 подгруппа $A = H\langle t\rangle$ является расщепляемым расширением группы H при помощи бесконечной циклической группы, порожденной элементом t, с сопровождающим гомоморфизмом, переводящим t в автоморфизм φ группы H. Поэтому согласно предложению 2 подгруппа $\langle\varphi\rangle$ является конечной π-группой. При этом порядок автоморфизма φ равен 2, следовательно, множество простых чисел π содержит число 2.

Предположим теперь, что подгруппа H не является Φ_π-отделимой в группе G. Тогда существует элемент g группы G, не принадлежащий подгруппе H, такой, что для любой нормальной подгруппы N конечного π-индекса группы G справедливо включение $g \in HN$.

Рассмотрим элемент $u = [t^{-1}gt, g] = t^{-1}g^{-1}tg^{-1}t^{-1}gtg$ группы G^*. Поскольку $g^{-1} \notin H$, u имеет приведенную запись длины 4, следовательно, отличен от единицы. Пусть M — произвольная нормальная подгруппа конечного π-индекса группы G^*. Обозначим $M \cap G$ через N. Тогда N — нормальная подгруппа конечного π-индекса группы G, и, следовательно, для некоторого элемента h подгруппы H выполнено сравнение $h \equiv g \pmod N$. Значит, $h \equiv g \pmod M$. Тогда $[t^{-1}gt, g] \equiv [t^{-1}ht, h] \equiv [h', h] \pmod M$ для некоторого элемента

h' подгруппы H. Так как H — абелева группа, то $[h', h] = 1$. Следовательно, $u \equiv 1 \pmod M$, что противоречит Φ_π-аппроксимируемости группы G^*.

Значит, подгруппа H Φ_π-отделима в группе G. Теорема доказана.

Библиографический список

1. *Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости конечными группами обобщенных свободных произведений групп // Чебышевский сб. Тула, 2012. Т. 13, вып. 1. С. 150—152.
2. *Grunberg K. W.* Residual properties of infinite soluble groups // Proc. Lond. Math. Soc. 1957. Vol. 7. P. 29—62.
3. *Karras A., Solitar D.* Subgroups of HNN groups and groups with one defining relation // Can. J. Math. 1971. Vol. 23. P. 627—643.

УДК 513.64

С. И. Хашин

КРАТНЫЕ МНОЖИТЕЛИ ПСЕВДОПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

Доказываются свойства кратных множителей псевдопростых чисел. Основные результаты работы — теоремы 3, 4, 5. При практических вычислениях большой интерес могут представлять таблицы 1 и 2.

***Ключевые слова*:** псевдопростые числа, кратные множители.

The properties of the multiple factors of pseudoprime numbers are proved. The main results are theorems 3,4,5. Tables 1 and 2 are of great interest in practical calculations.

***Key words*:** pseudoprime numbers, multiple factors.

1. Введение

Одной из важнейших задач в теории чисел является проверка простоты числа. В настоящее время разработано множество самых разнообразных алгоритмов таких проверок [3, 4, 5, 6]. Если рассматриваемое число достаточно велико, например больше 10^{20}, то все эти методы дают лишь вероятностный ответ: число может оказаться гарантированно составным или «вероятно простым», т. е. каждый из этих методов может принять некоторое составное число за простое, но не наоборот. Такие числа называются псевдопростыми, с различными модификациями. Наиболее простой, популярный, хорошо изученный и довольно эффективный метод основан на малой теореме Ферма.

Определение 1. Составное число n называется псевдопростым по основанию a, если

$$a^{n-1} \equiv 1 \bmod n.$$

Псевдопростые числа по различным основаниям хорошо изучены. Например, имеется полный список [7] всех пседопростых по основанию 2 чисел, меньших 2^{64}, всего 118 968 378. Также можно выписать все числа, меньшие 2^{32}, псевдопростые одновременно по основаниям 2 и 3. Их оказывается 103: