26. *Borisov A., Sapir M.* Polynomial maps over finite fields and residual finiteness of mapping tori of group endomorphisms // arXiv: 0309121V1 [math. GR]. 2003. URL: http://arxiv.org (дата обращения: 14.01.2014).
27. *Dyer J.* On the residual finiteness of generalized free products // Trans. Amer. Math. Soc. 1968. Vol. 133, № 1. P. 131—143.
28. *Hirsh K. A.* On infinite soluble groups // J. Lond. Math. Soc. 1952. Vol. 27. P. 81—85.
29. *Hsu T., Wise D.* Ascending HNN-extensions of polycyclic groups are residually finite // J. Pure Appl. Algebra. 2003. Vol. 182, № 1. P. 65—78.
30. *Lennox J., Robinson D.* The theory of infinite soluble groups. Oxford : Clarendon press, 2004. 342 p.
31. *Lubotzki A*. A group-theoretic characterization of lenear groups // J. of Algebra. 1988. Vol. 113. P. 207—214.
32. *Lubotzki A*. Normal automorphisms of free groups // J. of Algebra. 1980. Vol. 63. P. 494—498.
33. *Lubotzki A., Mann A*. Residually finite groups of finite rank // Math. Proc. Comb. Phil. Soc. 1989. Vol. 106. P. 185—188.
34. *Meskin S*. Nonresidually finite one-relator groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1972. Vol. 164. P. 105—114.
35. *Paris L*. Residual p-properties of mapping class groups and surface groups // arXiv: GR/0703703v1. 23 Mar. 2007. URL: http://arxiv.org (дата обращения: 14.01.2014).
36. *Rhemtulla A., Shirvani M.* The residual finiteness of ascending HNN-extensions of certain soluble groups // Illinois J. of Math. 2003. Vol. 47. P. 477—484.

УДК 512.543

Д. В. Гольцов

ОБ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ КОРНЕВЫМИ КЛАССАМИ СВОБОДНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ГРУПП

Сделан обзор основных результатов об аппроксимируемости корневыми классами свободных произведений групп.

Ключевые слова: свободное произведение с объединенной подгруппой, корневой класс групп, $\mathcal{K}$-аппроксимируемость групп.

A survey of the main results on the root-class residuality of free products group.

Key words: free product with amalgamated subgroups, root-class of groups, residually $\mathcal{K}$-group.

Пусть $\mathcal{K}$ — непустой класс групп. Группа G называется $\mathcal{K}$-аппроксимируемой, если для любого неединичного элемента a группы G существует гомоморфизм группы G на некоторую группу из класса $\mathcal{K}$, при котором образ элемента a отличен от 1. Группа G называется почти $\mathcal{K}$-аппроксимируемой, если она содержит некоторую $\mathcal{K}$-аппроксимируемую подгруппу конечного индекса.

Класс $\mathcal{K}$ называется корневым, если он замкнут относительно подгрупп и для любой субнормальной последовательности $C \le B \le A$ из того, что факторы A/B и B/C принадлежат классу $\mathcal{K}$, следует, что в группе A существует нормальная подгруппа D такая, что $D \subseteq C$ и A/D принадлежит классу $\mathcal{K}$. Примером корневого класса может служить класс F всех конечных групп и класс F_p всех конечных p-групп.

В. Магнус, А. Каррас и Д. Солитэр в книге «Комбинаторная теория групп» приводят следующий результат К. Грюнберга: для того чтобы любое свободное произведение групп, аппроксимируемых данным корневым классом $\mathcal{K}$, само было $\mathcal{K}$-аппроксимируемой группой, необходимо и достаточно, чтобы любая свободная группа была $\mathcal{K}$-аппроксимируемой.

Д. Н. Азаров в [13] доказал, что любая свободная группа аппроксимируема любым корневым классом, поэтому результат Грюнберга принимает следующий вид.

Теорема 1. *Свободное произведение любого семейства групп, аппроксимируемых корневым классом $\mathcal{K}$, само является $\mathcal{K}$-аппроксимируемой группой.*

С помощью теоремы 1 в работе [12] получены некоторые результаты, относящиеся к обобщенным свободным произведениям групп. В частности, доказано, что если $\mathcal{K}$ — корневой класс групп, замкнутый относительно факторизации, то свободное произведение двух групп из класса $\mathcal{K}$ с центральными объединенными подгруппами аппроксимируемо классом $\mathcal{K}$. Там же доказано, что если $\mathcal{K}$ — произвольный корневой класс групп, то свободное произведение любых двух $\mathcal{K}$-аппроксимируемых групп с объединенными ретрактами является $\mathcal{K}$-аппроксимируемой группой.

Г. Баумслаг в [15] доказал, что свободное произведение двух F-аппроксимируемых групп с конечными объединенными подгруппами является F-аппроксимируемой группой. Для произвольного корневого класса $\mathcal{K}$ этот результат не является справедливым: свободное произведение двух $\mathcal{K}$-аппроксимируемых групп с конечными объединенными подгруппами не обязано быть $\mathcal{K}$-аппроксимируемой группой. Тем не менее такое свободное произведение является почти $\mathcal{K}$-аппроксимируемой группой. Справедливо следующее утверждение, полученное в работе [10].

Теорема 2. *Пусть $G = (A * B, H = K)$ — свободное произведение групп A и B с конечными объединенными подгруппами H и K. Если группы A и B F-аппроксимируемы и почти аппроксимируемы корневым классом $\mathcal{K}$, то и группа G почти $\mathcal{K}$-аппроксимируема. В частности, если группы A и B почти аппроксимируемы корневым классом $\mathcal{K}$, состоящим из конечных групп, то группа G почти $\mathcal{K}$-аппроксимируема.*

Недавно автору удалось получить аналогичный результат для HNN-расширений. Доказано, что если группа почти аппроксимируема корневым классом, состоящим из конечных групп, то тем же свойством обладает и любое HNN-расширение этой группы с конечными связанными подгруппами.

Ранее аналоги этого утверждения и теоремы 2 были получены Д. Н. Азаровыми и Д. В. Гольцовым для частного случая, когда корневой класс состоит из конечных p-групп. Следует заметить, что далеко не все известные результаты об аппроксимируемости конечными p-группами удается распространить на аппроксимируемость произвольным корневым классом.

Рассмотрим теперь свободное произведение $G=\left(\underset{\lambda\in\Lambda}{*}G_\lambda, H\right)$ произвольного семейства групп $\left(G_\lambda\right)_{\lambda\in\Lambda}$ с одной объединенной подгруппой H. Для такого свободного произведения в работе [7] получен критерий финитной аппроксимируемости.

Теорема 3. *Пусть для каждого $\lambda\in\Lambda$ группа G_λ финитно аппроксимируема и подгруппа H конечна. Тогда группа G финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда для каждого $\lambda\in\Lambda$ в группе G_λ существует нормальная подгруппа U_λ конечного индекса такая, что $U_\lambda\cap H=1$ и индексы $\left[G_\lambda : U_\lambda\right]$ ограничены в совокупности.*

Там же получен аналогичный результат об аппроксимируемости конечными p-группами.

В работе [14] нами доказан подобный результат и для почти аппроксимируемости группы $G=\left(\underset{\lambda\in\Lambda}{*}G_\lambda, H\right)$ произвольным корневым классом $\mathcal{K}$. Этот результат формулируется следующим образом.

Теорема 4. *Пусть $G=\left(\underset{\lambda\in\Lambda}{*}G_\lambda, H\right)$ — свободное произведение групп G_λ некоторого семейства $\left(G_\lambda\right)_{\lambda\in\Lambda}$ с одной объединенной подгруппой H. Пусть $\mathcal{K}$ — некоторый класс конечных групп, являющийся корневым. И пусть для каждого $\lambda\in\Lambda$ группа G_λ почти $\mathcal{K}$-аппроксимируема и подгруппа H конечна. Группа G почти $\mathcal{K}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда для каждого $\lambda\in\Lambda$ в группе G_λ существует нормальная подгруппа U_λ конечного индекса такая, что выполняются три условия:*

(1) $U_\lambda\cap H=1$;

(2) *группа U_λ аппроксимируема классом $\mathcal{K}$*;

(3) *индексы $\left[G_\lambda : U_\lambda\right]$ ограничены в совокупности.*

Некоторые результаты об аппроксимируемости и почти аппроксимируемости обобщенных свободных произведений групп для конкретного корневого класса $\mathcal{K}$ получены в работах [1—6, 8, 9, 11]. Так, в [2, 3, 4, 9] исследуется вопрос о почти F_p-аппроксимируемости некоторых разрешимых групп, а также групп автоморфизмов и расщепляемых расширений. К сожалению, пока не удается распространить каким-либо образом эти результаты на почти аппроксимируемость произвольным корневым классом. В работе [5] исследуется свойство почти F_p-аппроксимируемости для некоторых HNN-расширений. Эти результаты также не удается обобщить на почти аппроксимируемость произвольным корневым классом групп. В [1, 6, 7, 8] исследуются свойства финитной аппроксимируемости, почти F_p-аппроксимируемости, F_p-аппроксимируемости и нильпотентной аппроксимируемости для обобщенных свободных произведений. Например, в [6] эти свойства полностью исследованы для свободного произведения свободных групп с циклическим объединением. Там же для такого свободного произведения доказано свойство аппроксимируемости разрешимыми группами. Заметим, что класс разрешимых групп является корневым.

Библиографический список

1. *Азаров Д. Н.* О нильпотентной аппроксимируемости свободных произведений свободных групп с циклическим объединением // Мат. заметки. 1998. Т. 64, вып. 1. С. 3—8.
2. *Азаров Д. Н.* О почти аппроксимируемости конечными p-группами // Чебышевский сб. Тула, 2010. Т. 11, вып. 3. С. 11—20.
3. *Азаров Д. Н.* О почти аппроксимируемости конечными p-группами групп Баумслага — Солитэра // Моделирование и анализ информационных систем. 2013. Т. 20, № 1. С. 116—123.
4. *Азаров Д. Н.* О почти аппроксимируемости конечными p-группами некоторых разрешимых групп конечного ранга // Вестн. Иван. гос ун-та. Сер.: Естественные, общественные науки. 2012. Вып. 2. С. 80—85.
5. *Азаров Д. Н.* О финитной аппроксимируемости HNN-расширений и обобщенных свободных произведений групп конечного ранга // Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54, № 6. С. 1203—1215.
6. *Азаров Д. Н.* О финитной аппроксимируемости свободного произведения разрешимых минимаксных групп с циклическими объединенными подгруппами // Мат. заметки. 2013. Т. 93, вып. 4. 483—491.
7. *Азаров Д. Н.* О финитной аппроксимируемости свободных произведений групп с одной объединенной подгруппой // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 1. С. 3—13.
8. *Азаров Д. Н.* О финитной аппроксимируемости свободных произведений групп с циклическим объединением // Чебышевский сб. Тула, 2013. Т. 14, вып. 3. С. 9—19.
9. *Азаров Д. Н.* Об аппроксимируемости конечными p-группами групп конечного ранга // Вестн. Иван. гос ун-та. Сер.: Биология. Химия. Физика. Математика. 2001. Вып. 3. С. 103—105.
10. *Азаров Д. Н., Гольцов Д. В.* О почти аппроксимируемости конечными p-группами свободных произведений групп с одной объединенной конечной подгруппой // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер.: Естественные, общественные науки. 2013. Вып. 2. С. 74—77.
11. *Азаров Д. Н., Розов А. В.* О финитной аппроксимируемости свободного произведения разрешимых групп конечного ранга с нормальными объединенными подгруппами // Вестн. Иван. гос ун-та. Сер.: Естественные, общественные науки. 2011. Вып. 2. С. 98—103.
12. *Азаров Д. Н., Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости обобщенных свободных произведений групп корневыми классами // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. 2008. Вып. 6. С. 29—42.
13. *Азаров Д. Н., Тьеджо Д.* Об аппроксимируемости свободного произведения групп с объединенной подгруппой корневым классом групп // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. 2002. Вып. 5. С. 6—10.
14. *Гольцов Д. В.* О почти аппроксимируемости корневыми классами обобщенных свободных произведений и HNN-расширений групп // Чебышевский сб. Тула, 2013. Т. 14, вып. 3. С. 53—59.
15. *Baumslag G.* On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. Vol. 106, № 2. P. 193—209.