Библиографический список

1. *Хашин С. И.* Кратные множители псевдопростых чисел // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер.: Естественные, общественные науки. 2013. Вып. 2. С. 102—107.
2. *Crandall R. E., Pomerance C.* Prime Numbers : a Computational Perspective. 2nd ed. New York, etc. : Springer, 2005. 597 p.
3. *Damgard I. B., Frandsen G. S.* An extended quadratic Frobenius primality test with average- and worst-case error estimate // J. of Cryptology. 2006. Vol. 19, № 4. P. 489—520.
4. *Grantham J.* Frobenius pseudoprimes // Math. of Comp. 2000. Vol. 70, № 234. P. 873—891.
5. *Khashin S. I.* Counterexamples for Frobenius primality test // arXiv: abs/1307.7920.2013. URL: http://arxiv.org (дата обращения: 01.12.2013).

УДК: 512.544, 512.546, 512.582

Н. И. Яцкин

ФУНКТОРЫ ПОДГРУППОВОЙ ТОПОЛОГИЗАЦИИ ГРУПП

Рассматриваются функторы топологизации, действующие из категории групп в полную подкатегорию категории топологических групп, объектами которой служат группы, наделенные подгрупповыми топологиями, т. е. обладающие базисом окрестностей нейтрального элемента, составленным из нормальных подгрупп. Изучается соответствие между такими функторами и некоторыми абстрактными классами групп.

Ключевые слова: категория групп, подгрупповая топология, функтор подгрупповой топологизации, абстрактный класс групп, псевдомногообразие групп, радикальный класс групп, полупростой класс групп.

We consider the topologization functors acting from the category of groups into the full subcategory of the category of topological group whose objects are groups with subgroup topologies. We study the correspondence between such functors and some abstract classes of groups.

Key words: category of groups, topologization functor, abstract class of groups, pseudovariety of groups, radical class of groups, semisimple class of groups.

1. Введение. В теории *абелевых* групп значительный интерес, начиная с работы Б. Шарля [16] (1964), вызывают так называемые *функториальные топологии* (т. е. фактически — функторы из категории абелевых групп в категорию топологических абелевых групп, тождественные на морфизмах). Функторы такого типа определенным образом наделяют каждую из абелевых групп топологией, причем так, что все гомоморфизмы групп становятся непрерывными (в смысле введенных топологий). Понятие функториальной топологии упоминается в монографии Л. Фукса [19, § 7] (1970). Этапными в изучении функторов топологизации абелевых групп представляются работы [15, 18, 17] (1980, 1982, 2011).

В настоящей статье предпринимается попытка перенести некоторые из результатов, полученных в указанных выше (и других) работах, на категорию *всех* групп. При этом мы ограничиваемся так называемыми *подгрупповыми* топологиями, которые характеризуются тем, что для них существует *базис* окрестностей нейтрального элемента, состоящий из *нормальных подгрупп*.

«Неабелево обобщение» известных результатов о функторах топологизации, полученных для абелевых групп, оказывается достаточно нетривиальным. В частности, существенно используется теория радикальных классов групп (см. работы А. Г. Куроша, Б. И. Плоткина и др. [4, 8, 9, 10, 12], а также более новые публикации Б. Гарднера [20, 21]).

Основными результатами настоящей работы можно считать теоремы 1—3, связывающие функторы топологизации с определенными (*абстрактными*) классами групп. Всякий функтор задает два класса групп, *дискрет* и *индискрет*, состоящих (соответственно) из тех групп, на которых этот функтор наводит дискретную и индискретную (слабейшую) топологии. Обратно, по заданным абстрактным классам групп, удовлетворяющим некоторым условиям замкнутости, восстанавливаются (хотя и не вполне однозначно) функторы топологизации на категории групп.

2. Топологические NS-группы. Как хорошо известно, структура топологической группы (G,τ) может быть однозначно определена заданием какого-либо базиса $\mathcal{B}$ фильтра $\mathcal{U}$ окрестностей нейтрального элемента. Базис $\mathcal{B}$ обязан удовлетворять нескольким условиям (см. [22, теорема 4.5]). Условия эти будут автоматически соблюдены, если в качестве базисных окрестностей выбираются нормальные подгруппы группы G. Такие топологии принято называть *подгрупповыми.*

Определение 1. Топологическую группу (G,τ), наделенную подгрупповой топологией τ , т. е. обладающую базисом окрестностей нейтрального элемента, составленным из нормальных подгрупп, будем называть **NS**-*группой*.

Замечание 1. Мы имеем в виду выражение «normal subgroups neighborhood system», но отказываемся от удвоения аббревиатуры **NS**. Похожее сокращение, SNS-groups, использовалось в работе [24]. Метку **NS** будем относить не только к группе G, но и к заданной на ней топологии τ, называя ее **NS**-*топологией*. Базис $\mathcal{B}$ фильтра $\mathcal{U}$ окрестностей единицы, составленный из нормальных подгрупп данной группы G, всегда может быть расширен до фильтра $\mathcal{F}$ в частично упорядоченном (ч.у.) множестве $\mathcal{N}$ всех нормальных подгрупп группы G; при этом $\mathcal{F}$ остается фильтровым базисом в ч.у. множестве всех подмножеств в группе G. Будем называть фильтр $\mathcal{F}$ *определяющим* для **NS**-группы (G,τ).

Пример 1. Тривиальные примеры **NS**-топологий: 1) сильнейшая (*дискретная*) топология δ ; $\mathcal{F}=\mathcal{N}$; $\mathcal{B}=\{E\}$, где $E=\{1\}$; 2) слабейшая (*индискретная*) топология ι; $\mathcal{F}=\{G\}$. *Коконечная* топология γ на произвольной группе G порождается всеми нормальными подгруппами *конечного индекса*; $\mathcal{F}=\mathcal{N}_f=\{N\in\mathcal{N}:[G:N]<\infty\}$. Используется и другой термин — *проконечная* топология, или же, с необходимым уточнением (см. [25, p. 75]), — *полная проконечная* (full profinite). В случае хаусдорфовости топологии γ топологическая группа (G,γ) допускает *проконечное пополнение* (profinite completing), т. е. плотное вложение в *проконечную группу* (проективный предел конечных групп).

Фильтровые базисы могут порождаться с помощью более узких совокупностей — *предбазисов*. Для **NS**-топологии в качестве предбазиса определяющего фильтра $\mathcal{F}$ может фигурировать произвольное семейство нормальных подгрупп $\mathcal{P}$. Всевозможные конечные пересечения подгрупп, принадлежащих $\mathcal{P}$, составят базис $\tilde{\mathcal{P}}=\mathcal{B}$ фильтра $\mathcal{F}$. Соответствие $\tau \leftrightarrows \mathcal{F}$ между ч.у. множеством всех подгрупповых топологий на группе G и ч.у. множеством всех фильтров в $\mathcal{N}$ является (решеточным) изоморфизмом. Подгрупповые топологии на данной группе G (фильтры в $\mathcal{N}$) образуют (см. [14, 24]) *полную* решетку.

Инфимум $\tau_* = \wedge_{i\in I}\tau_i$ семейства подгрупповых топологий описывается с помощью пересечения определяющих фильтров $\mathcal{F}_* = \cap_{i\in I}\mathcal{F}_i$; *супремум* (*джойн*) $\tau^* = \vee_{i\in I}\tau_i$ — с помощью джойна $\mathcal{F}^* = \vee_{i\in I}\mathcal{F}_i$, предбазисом которого служит объединение фильтров $\cup_{i\in I}\mathcal{F}_i$; базис $\mathcal{F}^*$ составляют всевозможные конечные пересечения вида $H_{i_1}\cap\ldots\cap H_{i_p}$, где H_{i_k} ($k=1,\ldots,p$) пробегает фильтр $\mathcal{F}_{i_k}$ (или, что достаточно, базис этого фильтра).

Пусть далее G — произвольная группа, (K,τ) — топологическая **NS**-группа (с определяющим фильтром $\mathcal{F}$), $\varphi: G\to K$ — некоторый гомоморфизм; прообраз $\varphi^{-1}(\tau)$ также будет **NS**-топологией; для нее определяющий фильтр $\varphi^{-1}(\mathcal{F})$ порождается базисом $\mathcal{B}=\{\varphi^{-1}(F): F\in\mathcal{F}\}$. Топология $\varphi^{-1}(\tau)$ является *слабейшей* из топологий на G, обеспечивающих непрерывность φ. В частности, для гомоморфизма вложения $\alpha: G'\to G$ произвольной подгруппы G' в **NS**-группу G мы получаем, что индуцированная топология $\tau'=\alpha^{-1}(\tau)$ на G' также относится к классу **NS**; соответствующий фильтр порождается базисом $\mathcal{B}'=\{F\cap G': F\in\mathcal{F}\}$. Более общим образом, семейство (возможно, даже собственный класс) гомоморфизмов $\varphi_i: G\to K_i$ ($i\in I$), действующих из G в **NS**-группы (K_i,τ_i), с определяющими фильтрами $\mathcal{F}_i$, задает на группе G *инициальную* **NS**-топологию τ^* как *супремум* семейства топологий $\varphi_i^{-1}(\tau_i)$, или, что равносильно, как *слабейшую* из таких топологий на G, относительно которых все гомоморфизмы φ_i непрерывны. Определяющий фильтр $\mathcal{F}^*$ для топологии τ^* порождается *базисом*, состоящим из всевозможных пересечений вида $H_{i_1}\cap\ldots\cap H_{i_p}$, где $H_{i_k}=\varphi_{i_k}^{-1}(F_{i_k})$ и F_{i_k} пробегает $\mathcal{F}_{i_k}$.

Переходим к описанию образа **NS**-топологии и финальных **NS**-топологий. Пусть G — группа, (L,τ) — топологическая **NS**-группа (с определяющим фильтром $\mathcal{F}$), $\varphi: L\to G$ — гомоморфизм. *Образ* $\varphi(\tau)$ также является **NS**-топологией, определяемой фильтром $\varphi(\mathcal{F})$, который порождается базисом $\mathcal{B}=\{\varphi(F)^G: F\in\mathcal{F}\}$, составленным из *нормальных оболочек* образов подгрупп $F \in \mathcal{F}$. Иначе говоря, нормальная подгруппа $N \trianglelefteq G$ тогда и только тогда принадлежит $\mathcal{B}$, когда ее прообраз $\varphi^{-1}(F)$ принадлежит $\mathcal{F}$. Топология $\varphi(\tau)$ является *сильнейшей* из топологий на *G,* обеспечивающих непрерывность φ. В частности, для гомоморфизма проектирования $\pi : G \to G^{\wedge}$ **NS**-группы *G* на фактор-группу $G^{\wedge} = G / H$ (где $H \trianglelefteq G$) мы получаем, что *фактор-топология* $\tau^{\wedge} = \pi(\tau)$ также относится к классу **NS** и порождается базисом $\mathcal{B} = \{FH / H : F \in \mathcal{F}\}$. Эпиморфизм π оказывается при этом не только непрерывным (в смысле топологий τ и $\tau^{\wedge}$), но и *открытым* отображением. Более общим образом, семейство (возможно, даже собственный класс) гомоморфизмов $\varphi_i : L_i \to G$, действующих из **NS**-групп (L_i, τ_i) в группу *G*, определяет на *G* *финальную* **NS**-топологию τ_* как *инфимум* семейства топологий $\varphi_i(\tau_i)$, или, что равносильно, как *сильнейшую* из таких топологий на *G*, относительно которых все гомоморфизмы φ_i непрерывны. Определяющий фильтр $\mathcal{F}_*$ для топологии τ_* задается как пересечение всех фильтров $\mathcal{F}_i$, каждый из которых строится по базису $\mathcal{B}_i = \{\varphi(F_i)^G : F_i \in \mathcal{F}_i\}$. Другое описание: нормальная подгруппа $N \trianglelefteq G$ тогда и только тогда принадлежит $\mathcal{F}_*$, когда для любого $i \in I$ прообраз $\varphi_i^{-1}(N)$ принадлежит $\mathcal{F}_i$.

На *декартовом* произведении $G = \Pi_{i \in I} G_i$ **NS**-групп (G_i, τ_i) инициальная топология τ^* строится как слабейшая из обеспечивающих непрерывность всех проекций $\pi_i : G \to G_i$; она порождается базисом $\mathcal{B}^*$, состоящим из всевозможных конечных пересечений вида $\pi_{i_1}^{-1}(F_{i_1}) \cap \ldots \cap \pi_{i_p}^{-1}(F_{i_p})$, где каждая подгруппа F_{i_k} пробегает определяющий фильтр $\mathcal{F}_{i_k}$ для топологии τ_{i_k}. Иначе элементы базиса $\mathcal{B}^*$ можно описать как *большие ящики*, т. е. произведения вида $\Pi_{i \in I} F_i$, где *почти все* (все, кроме конечного числа) подгруппы F_i максимальны (совпадают с группой G_i). Это — обычная (*тихоновская*) топология произведения. Финальная топология τ_* на произведении *G* определяется как сильнейшая из обеспечивающих непрерывность всех вложений $\alpha_i : G_i \to G$; соответствующий фильтр состоит из таких нормальных подгрупп $N \trianglelefteq G$, для которых каждая из подгрупп-прообразов $F_i = \alpha_i^{-1}(N)$ принадлежит $\mathcal{F}_i$. Это равносильно тому, что *N* содержит некоторое объединение образов $\cup_{i \in I} F_i$, нормальной оболочкой которого является *ящик* $\Pi_{i \in I} F_i$, уже произвольный (не обязательно большой). Обе топологии, тихоновская τ^* и *ящичная* τ_*, по построению относятся к типу **NS**; τ_* мажорирует τ^*; в случае конечного произведения они совпадают.

Напомним для дальнейшего использования некоторые элементарные факты из теории топологических групп. В любой топологической группе

(G,τ) замыкание $\mathbf{cl}_\tau(M)$ произвольного подмножества $M \subseteq G$ может быть выражено формулой $\mathbf{cl}_\tau(M) = \cap_{N\in\mathcal{B}} MN$, где $\mathcal{B}$ — базис фильтра окрестностей нейтрального элемента. Замыкание (нормальной) подгруппы снова является (нормальной) подгруппой, замыкание тривиальной подгруппы $\mathbf{A}(G,\tau) = \mathbf{cl}_\tau(E) = \cap_{N\in\mathcal{B}} N$ — наименьшей замкнутой нормальной подгруппой в G; тривиальность $\mathbf{A}(G,\tau)$ является критерием *хаусдорфовости* топологической группы. В случае **NS**-групп каждая из нормальных групп, входящих в определяющий фильтр $\mathcal{F}$, является *открыто-замкнутой*. Выделяется следующий специфический класс **NS**-топологий.

Определение 2. **NS**-топология на группе называется *цокольной*, если она имеет одноэлементный базис $\mathcal{B} = \{S\}$, где S — нормальная подгруппа, называемая (топологическим) *цоколем*.

Цоколь является наименьшей окрестностью единицы. К числу цокольных топологий могут быть отнесены индискретная (цоколь совпадает со всей группой) и дискретная (цоколь тривиален). За исключением последнего случая цокольная топология не может быть хаусдорфовой. Гомоморфизм $\varphi: G \to G'$ групп с цокольными топологиями (и цоколями S и S' соответственно) *непрерывен* (непрерывен и *открыт*) тогда и только тогда, когда $\varphi(S) \subseteq S'$ (соответственно $\varphi(S) = S'$).

3. Функторы подгрупповой топологизации. Примем следующие обозначения: **Gr** — категория групп, $\mathcal{G}$ — класс объектов этой категории (т. е. класс всех групп), **TopGr** — категория топологических групп, **NSGr** — полная подкатегория в **TopGr**, состоящая из топологических **NS**-групп.

Определение 3. *Функтором топологизации* (*ф.т.*) на категории **Gr** называется произвольный функтор $T: \mathbf{Gr} \to \mathbf{TopGr}$; $G \mapsto T(G) = (G, \tau_G)$, $f \mapsto T(f) = f$, тождественный на морфизмах [$f \in \mathrm{Hom}(G,H)$; $G, H \in \mathcal{G}$]. Иначе говоря, ф.т. T наделяет каждую группу G определенной топологией τ_G так, что все гомоморфизмы оказываются непрерывными. Если при этом во всякой группе наводится подгрупповая (цокольная) топология, то T называется функтором *подгрупповой* (*цокольной*) топологизации.

Непосредственным следствием определения 3 является тот факт, что всякий *алгебраический* изоморфизм групп превращается функтором топологизации в *топологический* изоморфизм. Далее, непрерывность произвольного гомоморфизма проектирования $\pi: G \to G^\wedge$ ($G^\wedge = G/H$; $H \trianglelefteq G$) влечет следующее свойство ф.т.: $\tau_{G^\wedge} \subseteq (\tau_G)^\wedge$. Аналогично, непрерывность произвольного вложения $\alpha: G' \to G$ влечет свойство: $\tau_{G'} \supseteq (\tau_G)'$. Укажем на возможность *сравнения* функторов топологизации. Говорят, что ф.т. $T(G) = (G, \tau_G)$ *мажорирует* ф.т. $S(G) = (G, \sigma_G)$ (обозначение: $T \geq S$), если для каждой группы G топология τ_G мажорирует топологию σ_G (т. е. $\tau_G \supseteq \sigma_G$); допустимо другое словоупотребление: функтор S является *подфунктором* функтора T. Заметим также, что ф.т. могут рассматриваться не только на всей категории **Gr**, но и на полных подкатегориях в **Gr**, например на категории **AbGr** абелевых групп. Именно в теории абелевых групп эта тематика зародилась (см. [16, 19]) и достаточно активно развивалась (см. [15, 17, 18, 23]). Есть два варианта усиления определения 3.

Определение 4. Ф.т. $T(G)=(G,\tau_G)$ называется функтором *идеальной* (*наследственной*) топологизации, если для любой группы G и любой фактор-группы $G^{\wedge}=G/H$ (любой подгруппы $G'\le G$) выполняется равенство $\tau_{G^{\wedge}}=(\tau_G)^{\wedge}$ [$\tau_{G'}=(\tau_G)'$], т. е. если функтор T снабжает всякую фактор-группу *фактор-топологией* (всякую подгруппу *индуцированной* топологией). Будем использовать аббревиатуры: *ф.и.т.*, *ф.н.т.*, *ф.и.н.т.*

Условие идеальности равносильно требованию открытости всевозможных проекций на фактор-группы, что, в свою очередь, влечет уже открытость всех вообще *эпиморфизмов*. Условие наследственности можно выразить так: всякий гомоморфизм вложения $\alpha: G'\to G$ является *гомеоморфизмом* на свой образ. Иначе говоря, ф.н.т. превращает алгебраические вложения подгрупп в *топологические* вложения. Из этого вытекает, что аналогичным свойством обладают вообще все *мономорфизмы*.

Пример 2. Тривиальные примеры ф.т.: каждая группа снабжается дискретной $\Delta(G)=(G,\delta_G)$ или индискретной $I(G)=(G,\iota_G)$ топологией. Нетривиальный пример — функтор $\Gamma(G)=(G,\gamma_G)$, определяющий в произвольной группе коконечную топологию. Непрерывность гомоморфизмов имеет место, т. к. прообраз нормальной подгруппы конечного индекса снова является нормальной подгруппой конечного индекса. Еще один пример доставляет функтор *степенной* топологизации $\nabla(G)=(G,\nu_G)$, где топология ν_G задается (счетным) базисом, составленным из степенных подгрупп G^n. Функтор ∇ мажорирует функтор Γ, поскольку всякая нормальная подгруппа конечного индекса n в группе G содержит, очевидно, степенную подгруппу G^n. В работе [17] топология ν_G (рассматриваемая на абелевых группах) именуется *естественной* (natural). Каждый из функторов Δ, I, Γ, ∇ является функтором подгрупповой топологизации; все они являются идеальными, а первые два — наследственными.

Справедливо следующее легко доказываемое

Предложение 1. 1. *Пусть T — ф.т. из* Gr *в* **NSGr**; $G=\Pi_{i\in I}G_i$ — *некоторое декартово произведение;* $\tau_i=\tau_{G_i}$ — *топологии, наводимые функтором T на сомножителях;* $\mathcal{F}_i$ — *соответствующие фильтры нормальных подгрупп;* τ^* *и* τ_* — *тихоновская и ящичная топологии на группе G. Тогда топология τ_G, наводимая функтором T на G, удовлетворяет условиям* $\tau^*\subseteq\tau_G\subseteq\tau_*$.

2. *Если T является подфунктором функтора Γ коконечной топологизации, то первое включение обращается в равенство.*

3. *В случае конечного произведения (для любого ф.т. T) все три рассматриваемые топологии на G совпадают.*

4. Абстрактные классы групп. Некоторый (непустой) класс групп $\mathcal{C}$ принято называть *абстрактным*, если выполнено условие: **(A$_1$)** $\mathcal{C}$ *изоморфно замкнут*. Абстрактными являются класс $\mathcal{G}$ всех групп и класс тривиальных групп $\mathcal{E}$. В данной работе мы будем дополнительно предполагать, что абстрактный класс удовлетворяет условию: **(A$_2$)** $\mathcal{C}$ *содержит единичную группу* (т. е. включает в себя $\mathcal{E}$). С каждым абстрактным классом групп $\mathcal{C}$ и с каждой группой G свяжем следующие семейства подгрупп: 1) семейство $\mathcal{C}$*-подгрупп* $\mathcal{C}(G)$, состоящее из всех подгрупп в G, принадлежащих классу $\mathcal{C}$; оно непусто, поскольку содержит единичную подгруппу, входящую в $\mathcal{C}$ в силу **(A$_2$)**; 2) подсемейство $\mathcal{C}_*(G)$, состоящее из всевозможных *нормальных* $\mathcal{C}$*-подгрупп* (очевидно, также непустое); 3) семейство *ко-*$\mathcal{C}$*-подгрупп* $\mathcal{C}^*(G)$, состоящее из всех *нормальных* подгрупп $H \trianglelefteq G$ таких, что соответствующая фактор-группа G/H принадлежит классу $\mathcal{C}$; это семейство непусто, поскольку, снова в силу **(A$_2$)**, содержит $H = G$. Названия второго и третьего семейств выбраны в соответствии с терминологией [8, 9]; см. также [2]. Введем ряд определений и обозначений. Пусть $\mathcal{C}$ — абстрактный класс групп, G — группа.

Определение 5. 1. $\mathcal{C}$*-радикалом* G называется *порождение* (*произведение*) всех *нормальных* $\mathcal{C}$-подгрупп: $\mathbf{rad}_{\mathcal{C}}(G) = \langle \cup_{N \in \mathcal{C}_*(G)} N \rangle = \Pi_{N \in \mathcal{C}_*(G)} N$.

2. *Широким* $\mathcal{C}$*-радикалом* G называется *нормальное порождение* всех (необязательно нормальных) $\mathcal{C}$-подгрупп (произведение *нормальных оболочек* всех $\mathcal{C}$-подгрупп): $\mathbf{Rad}_{\mathcal{C}}(G) = \langle \cup_{H \in \mathcal{C}(G)} H \rangle^G = \Pi_{H \in \mathcal{C}(G)} H^G$.

3. $\mathcal{C}$*-корадикалом* G называется *пересечение* всех ко-$\mathcal{C}$-подгрупп: $\mathbf{corad}_{\mathcal{C}}(G) = \cap_{N \in \mathcal{C}^*(G)} N$.

Замечание 2. Мы связываем понятия радикалов и корадикала группы с *произвольным* абстрактным классом групп $\mathcal{C}$. Специфические свойства радикала, открытые в работах А. Г. Куроша и других, имеют место при дополнительном предположении *радикальности* класса $\mathcal{C}$ (см. ниже определение 7 и замечание 5).

Поскольку всякий автоморфизм группы G задает биекцию каждого из семейств $\mathcal{C}(G)$, $\mathcal{C}_*(G)$ и $\mathcal{C}^*(G)$ на себя, радикалы **rad** и **Rad**, а также корадикал **corad** оказываются *характеристическими* подгруппами.

По каждому абстрактному классу групп $\mathcal{C}$ можно построить три новых класса групп.

Определение 6. 1. Класс $\mathcal{C}^{\circ}$ *анти-*$\mathcal{C}$*-групп* (класс $\mathcal{C}^{\varnothing}$ *строго анти-*$\mathcal{C}$*-групп*) состоит из групп, удовлетворяющих условию $\mathbf{rad}_{\mathcal{C}}(G) = E$ (соответственно $\mathbf{Rad}_{\mathcal{C}}(G) = E$).

2. Класс $\mathcal{C}^{\perp}$ *контр-*$\mathcal{C}$*-групп* содержит группы, для которых $\mathbf{corad}_{\mathcal{C}}(G) = G$.

Все три новых класса, $\mathcal{C}^{\circ}, \mathcal{C}^{\varnothing}, \mathcal{C}^{\perp}$, являются абстрактными и содержат единичную группу.

Пример 3. Обозначим Φ класс всех конечных подгрупп. Семейства $\Phi(G)$ и $\Phi_*(G)$ составляют соответственно все конечные и все конечные нормальные подгруппы в G. Семейство $\Phi^*(G)$ состоит из *коконечных* подгрупп (нормальных подгрупп конечного индекса). Класс Φ° *антиконечных* групп состоит из таких групп, в которых нет нетривиальных конечных нормальных подгрупп. Более узкий класс $\Phi^\varnothing$ *строго антиконечных* групп содержит группы, не имеющие никаких нетривиальных конечных подгрупп. Класс *контрконечных* групп $\Phi^\perp$ состоит из групп, в которых отсутствуют истинные коконечные подгруппы. Заметим, что здесь наше словоупотребление расходится с терминологией работы [21], в которой антиконечными называются как раз те группы, за которыми мы закрепляем термин «контрконечные». Вообще, класс $\Phi^\perp$ получил от множества пользователей множество названий; например, в книге [11, с. 85] группы этого класса именуются *квазиполными*.

Приведем далее список типичных свойств *замкнутости* для абстрактных классов групп, следуя, в основном, терминологии монографии [25] (см. также работу [2]). Класс $\mathcal{C}$ замкнут относительно: **(C$_0$)** *нормальных подгрупп*, **(C$_1$)** *подгрупп*, **(C$_2$)** *гомоморфных образов*, **(C$_3$)** *конечных прямых произведений*, **(C$_4$)** *конечных подпрямых произведений*, **(C$_5$)** *расширений*, **(C$_6$)** *аппроксимаций*. Условие **(C$_1$)** влечет, очевидно, **(C$_0$)** и **(A$_2$)**; **(C$_2$)** влечет **(A$_1$)**; **(C$_1$)** вместе с **(C$_3$)** влекут **(C$_4$)**; **(C$_5$)** влечет **(C$_3$)**. Класс $\mathcal{C}$ называется *псевдомногообразием*, если выполнены условия **(C$_1$) — (C$_3$)**.

Условие **(C$_6$)** означает, что всякая группа, аппроксимируемая группами из класса $\mathcal{C}$, т. е. (см. [3, с. 57; 6, с. 49] или, в более общем контексте, [13]) являющаяся поддекартовым произведением $\mathcal{C}$-групп, сама принадлежит этому классу. То же самое можно выразить в виде равенства классов $\mathcal{C}={}_R\mathcal{C}$, где в правой части фигурирует класс $\mathcal{C}$-аппроксимируемых групп. Класс ${}_R\mathcal{C}$ замкнут относительно аппроксимаций (при любом классе $\mathcal{C}$). Антиподом свойства **(C$_6$)** является свойство *плотности* класса: ${}_R\mathcal{C}=\mathcal{G}$ (всякая группа $\mathcal{C}$-аппроксимируема). Известен критерий: класс плотен тогда и только тогда, когда он содержит класс монолитических групп. (Группа называется *монолитической* (см. [7, с. 173]), если пересечение всех ее нетривиальных нормальных подгрупп является нетривиальной подгруппой, именуемой *монолитом*.) Классы $\mathcal{G}$ и $\mathcal{E}$, а также класс конечных групп Φ удовлетворяют всем условиям **(C$_0$) — (C$_6$)**.

Переходим к более сложным условиям, связанным с теорией радикалов в категории групп (см. классические работы А. Г. Куроша и учеников [4, 5, 10, 12]).

Определение 7. 1. Абстрактный класс групп $\mathcal{R}$ называется *радикальным*, если для него выполнены условия **(C$_2$)**, **(C$_5$)** и **(R)** *$\mathcal{R}$-радикал произвольной группы является $\mathcal{R}$-группой;* если, кроме того, выполнено условие **(R$_1$)** *во всякой группе нормальная оболочка любой $\mathcal{R}$-подгруппы является $\mathcal{R}$-подгруппой,* то класс $\mathcal{R}$ называется *строго радикальным*.

2. *Абстрактный* класс групп $\mathcal{S}$ называется *полупростым*, если выполнены условия **(C₀)**, **(C₅)** и **(C₆)**; если при этом условие **(C₀)** заменяется на более сильное **(C₁)**, то класс $\mathcal{S}$ называется *строго полупростым*.

Далее следует очень краткий обзор основных результатов теории групповых радикалов. Радикальные и полупростые классы групп встречаются попарно. Каждый радикальный класс $\mathcal{R}$ состоит из тех и только тех групп, которые совпадают со своим $\mathcal{R}$-радикалом, и однозначно определяет соответствующий полупростой класс: $\mathcal{S}=\{G\in\mathcal{G}:\mathbf{rad}_{\mathcal{R}}(G)=E\}$; $\mathcal{S}$-корадикал совпадает с $\mathcal{R}$-радикалом: $\mathbf{corad}_{\mathcal{S}}(G)=\mathbf{rad}_{\mathcal{R}}(G)$. Фактор-группа произвольной группы по ее $\mathcal{R}$-радикалу полупроста (принадлежит описанному выше классу $\mathcal{S}$), причем радикал является наименьшей из таких нормальных подгрупп, факторы по которым полупросты. Обратно, каждый полупростой класс $\mathcal{S}$ состоит из групп с тривиальным $\mathcal{S}$-корадикалом и однозначно определяет «парный» радикальный класс: $\mathcal{R}=\{G\in\mathcal{G}:\mathbf{corad}_{\mathcal{S}}(G)=G\}$. Если $(\mathcal{R},\mathcal{S})$ есть пара соответствующих друг другу классов (радикальный и полупростой), то всякая группа G однозначно представляется в виде расширения $\mathcal{R}$-группы $R=\mathbf{rad}_{\mathcal{R}}(G)$ с помощью $\mathcal{S}$-группы $S=G/R$. Строгая радикальность радикального класса $\mathcal{R}$ равносильна строгой полупростоте соответствующего полупростого класса $\mathcal{S}$.

Замечание 3. Наше условие строгой радикальности **(R₁)** отличается от условия А. Г. Куроша [4]: **(R₂)** *для любой группы G радикал* $\mathbf{rad}_{\mathcal{R}}(G)$ *содержит все* (не только нормальные) $\mathcal{R}$*-подгруппы группы G*. Однако на самом деле эти условия равносильны. Действительно, импликация **(R₁)** $\Rightarrow$ **(R₂)** очевидна; обратная импликация доказывается следующим образом. Пусть $A\le G$, $A\in\mathcal{R}$, $B=A^G$, $R=\mathbf{rad}_{\mathcal{R}}(G)$. Согласно **(R₂)** имеем: $A\le R\trianglelefteq G$ и, значит, $B\le R$, кроме того, по построению, $B\trianglelefteq G$. Докажем, что $B\in\mathcal{R}$, или, что равносильно, $R_1=B$, где $R_1=\mathbf{rad}_{\mathcal{R}}(B)$. Снова применяем **(R₂)**: $A\le R_1\trianglelefteq B$, причем R_1 является подгруппой, характеристической в *B*, и, следовательно, нормальной в *G*; значит, R_1 и B совпадают. Еще один вариант условия строгой радикальности таков: *для любой группы радикал и широкий радикал совпадают*. Строгая радикальность радикального класса $\mathcal{R}$ равносильна строгой полупростоте соответствующего полупростого класса $\mathcal{S}$.

Замечание 4. Строгая радикальность класса практически исключает его *наследственность*; в [20] показано, что строго радикальный класс групп $\mathcal{R}$ удовлетворяет **(C₁)** лишь в двух случаях: $\mathcal{R}=\mathcal{E}$ или $\mathcal{R}=\mathcal{G}$.

Замечание 5. В ряде работ (в частности, в [8]) систематически изучались «абстрактные теоретико-групповые функции» (*функториалы*), «функториально сопоставляющие» каждой группе определенную нормальную подгруппу в этой группе. Имеется тесная взаимосвязь между функториалами и классами групп. К числу функториалов относятся различные *предрадикалы* и радикалы, *копредрадикалы* и корадикалы. За счет более широкого понимания терминов (см. замечание 2) мы можем позволить себе отказаться от тонких различий (типа «предрадикал — радикал»), говоря всегда просто о радикалах (корадикалах) и об их общих и специфических свойствах.

Опишем далее простую конструкцию, приводящую к строго радикальным классам.

Предложение 2. *Для любого абстрактного класса групп $\mathcal{C}$, удовлетворяющего условию* **(C$_0$)**, *класс $\mathcal{R} = \mathcal{C}^{\perp}$ контр-$\mathcal{C}$-групп является радикальным. Если усилить условие* **(C$_0$)** *до* **(C$_1$)**, *то $\mathcal{R}$ будет строго радикальным классом.*

Доказательство является достаточно прямолинейным и непосредственным и поэтому опускается.

5. От функторов топологизации к классам групп. Следуя идеологии, развиваемой (применительно к категории **AbGr**) в работе [17], введем (но уже применительно к категории **Gr**) понятие эквалайзера для двух ф.т., а также, в качестве частных случаев, понятия дискрета и индискрета для ф.т. (в абелевой ситуации они изучались в работах [15, 18, 23] и назывались соответственно дискретным и индискретным классами групп).

Определение 8. 1. *Эквалайзером* двух функторов топологизации, $T(G) = (G, \tau_G)$ и $S(G) = (G, \sigma_G)$, называется класс таких групп, на которых значения этих функторов идентичны: $\mathbf{Eq}(T, S) = \{G \in \mathcal{G} : \tau_G = \sigma_G\}$.

2. *Дискретом* (*индискретом*) для ф.т. T называется эквалайзер $\mathcal{D}(T) = \mathbf{Eq}(T, \Delta)$ (соответственно $\mathcal{I}(T) = \mathbf{Eq}(T, I)$), где Δ и I — функторы дискретной и индискретной топологизации.

Предложение 3. 1. *Всякий эквалайзер является абстрактным классом групп, содержащим единичную группу, и замкнут относительно конечных прямых произведений.*

2. *Если функторы T и S оба являются наследственными* (*идеальными*), *то эквалайзер $\mathbf{Eq}(T, S)$ замкнут относительно подгрупп* (*гомоморфных образов*).

Доказательство практически очевидно. В той части, которая относится к свойству **(C$_3$)**, следует использовать предложение 1.

Теорема 1. 1. *Всякий дискрет $\mathcal{D}(T)$ удовлетворяет условиям* **(C$_1$)** *и* **(C$_3$)**, *а если ф.т. T идеален, то и условию* **(C$_2$)**.

2. *Всякий индискрет $\mathcal{I}(T)$ удовлетворяет условиям* **(C$_2$)**, **(R)** и **(R$_1$)**; если ф.т. *T идеален, то $\mathcal{I}(T)$ удовлетворяет* **(C$_5$)** *и, следовательно, является строго радикальным классом.*

3. *Если, функтор T является не только идеальным, но и наследственным, то либо* (3.1) $\mathcal{I}(T) = \mathcal{G}$ *(и тогда $T = I$), либо* (3.2) $\mathcal{I}(T) = \mathcal{E}$.

Доказательство. 1. По предложению 3 все эквалайзеры (и, в частности, все дискреты) удовлетворяют условию **(C$_3$)**. Докажем **(C$_1$)** для произвольного дискрета: пусть $G \in \mathcal{D}(T)$, т. е. $\tau_G = \delta_G$; для любой подгруппы $G' \le G$ топология $\tau_{G'}$ мажорирует топологию $(\tau_G)' = (\delta_G)' = \delta_{G'}$ и, следовательно, $G' \in \mathcal{D}(T)$. Далее, если функтор T идеален и $G \in \mathcal{D}(T)$, то для любой фактор-группы $G^{\wedge} = G/H$ топология $\tau_{G^{\wedge}}$ будет совпадать с фактор-топологией для дискретной топологии и, следовательно, также будет дискретной, тем самым доказано **(C$_2$)**.

2. Всякий индискрет удовлетворяет **(C$_2$)**. В самом деле, для $G \in \mathcal{I}(T)$ фактор-топология $(\tau_G)^\wedge$ на $G^\wedge$ индискретна и мажорирует топологию $\tau_{G^\wedge}$; следовательно, последняя также индискретна и $G^\wedge \in \mathcal{I}(T)$. Докажем теперь для индискретов справедливость условия **(R)**. Пусть $K = \Pi_{i \in I} K_i$ — произведение всех индискретных (по функтору T) нормальных подгрупп в группе G. Докажем, что $\tau_K = \iota_K$. Пусть нормальная подгруппа $U \trianglelefteq K$ является окрестностью единицы в смысле τ_K. Тогда каждая из подгрупп $U_i = K_i \cap U$ открыта в индуцированной топологии $(\tau_K)'_i$ на K_i, которая, как известно, минорирует топологию $\tau_{K_i} = \iota_{K_i}$ и, значит, тоже индискретна. Поэтому $U_i = K_i$ (для любого $i \in I$), и, следовательно, $U = K$. Индискретность топологии τ_K доказана. Переходим к доказательству **(R$_1$).** Пусть для подгруппы $H \leq G$ топология τ_H индискретна. Рассмотрим нормальную оболочку $L = H^G$ и докажем, что $\tau_L = \iota_L$. Для любой открытой в смысле τ_L нормальной подгруппы $U \trianglelefteq L$ пересечение $U' = U \cap H$ открыто в индуцированной топологии $(\tau_L)'$ на H, а значит, и в «своей» топологии $\tau_H = \iota_H$. Получаем $U' = H$, и, следовательно, $H \leq U \trianglelefteq H^G$. Все сопряженные подгруппы H^g ($g \in G$) алгебраически и топологически изоморфны H и, следовательно, также индискретны (по функтору T). Это позволяет получить включение $H^G \leq U$ и затем равенство $U = L$, свидетельствующее об индискретности τ_L. Для доказательства (строгой) радикальности класса $\mathcal{I}(T)$ недостает только **(C$_5$)** (замкнутости относительно расширений). Вывод этого условия потребует, однако, дополнительного предположения об идеальности функтора. Пусть T является ф.и.т. и пусть по функтору T нормальная подгруппа $H \trianglelefteq L$ и фактор-группа $G^\wedge = G/H$ индискретны. Докажем индискретность топологии τ_G. Возьмем произвольную нормальную подгруппу $U \trianglelefteq G$, являющуюся базисной окрестностью единицы в смысле τ_G. Эта топология индуцирует на H топологию $(\tau_G)'$, минорирующую $\tau_H = \iota_H$ и, следовательно, индискретную. Значит, $U \cap H = H$ и $H \leq U$. Эпиморфизм проектирования $\pi: G \to G^\wedge$, в силу идеальности функтора T, открыт (в смысле τ_G и $\tau_{G^\wedge} = \iota_{G^\wedge}$). Поэтому образ $\pi(U) = U/H$ открыт в индискретной группе $G^\wedge$. Значит, $U/H = G/H$ и $U = G$.

3. Если T — наследственный ф.т., то на всякой подгруппе группы с индискретной топологией этот функтор также наводит индискретную топологию. Значит, индискрет $\mathcal{I}(T)$ удовлетворяет **(C$_1$)**. Но, в соответствии с замечанием 4, только $\mathcal{G}$ и $\mathcal{E}$ являются строго радикальными классами, замкнутыми относительно подгрупп. В первом случае ($\mathcal{I}(T) = \mathcal{G}$) все группы оказываются индискретными, т. е. $T = I$; во втором случае ($\mathcal{I}(T) = \mathcal{E}$) индискретными являются лишь тривиальные группы (однако из этого еще не следует равенство $T = \Delta$). Таким образом, ф.и.н.т. либо совпадает с I, либо имеет тривиальный индискрет.

Пример 4. Для функтора Γ дискрет совпадает с классом Φ конечных групп, индискрет — с класом $\Phi^{\perp}$ контрконечных групп. Для функтора ∇ дискрет и индискрет равны соответственно классу групп *конечного периода* и классу групп, *полных по Черникову* (см. [11, с. 85]). Из теоремы 1 следует, в частности, строгая радикальность класса полных по Черникову групп (ср. с примером 4.4 в [21]).

6. От классов групп к функторам топологизации. В этом пункте мы пройдем обратный путь — от классов групп к ф.т. Впрочем, *обратным* он будет, вообще говоря, лишь односторонне — *справа*. Пусть $\mathcal{C}$ — произвольный абстрактный класс групп, а G — произвольная группа.

Определение 8. *Ко-*$\mathcal{C}$*-топологией* ($\mathcal{C}$*-топологией*) на G называется *инициальная* топология $\tau_G^{\mathcal{C}}$ (*финальная* топология ${}^{\mathcal{C}}\tau_G$), определяемая всевозможными эпиморфизмами $\varphi: G \to Y$ (мономорфизмами $\varphi: X \to G$) на группы $Y \in \mathcal{C}$ (групп $X \in \mathcal{C}$), каждая из которых наделяется *дискретной* (*индискретной*) топологией.

6.1. Ко-$\mathcal{C}$-топология $\tau_G^{\mathcal{C}}$ порождается *предбазисом* $\mathcal{P}_G^{\mathcal{C}} = \mathcal{C}^*(G)$ окрестностей единицы, составленным из *ядер* всевозможных эпиморфизмов данной группы на $\mathcal{C}$-группы; соответствующий фильтровый *базис* $\mathcal{B}_G^{\mathcal{C}} = \tilde{\mathcal{P}}_G^{\mathcal{C}}$ состоит из всевозможных конечных пересечений ко-$\mathcal{C}$-подгрупп; определяющий фильтр $\mathcal{F}_G^{\mathcal{C}}$ состоит из всевозможных нормальных подгрупп, каждая из которых содержит некоторое конечное пересечение ко-$\mathcal{C}$-подгрупп. Если класс $\mathcal{C}$ удовлетворяет условию **(C_4)**, то $\mathcal{P}_G^{\mathcal{C}} = \mathcal{B}_G^{\mathcal{C}}$; если, кроме того, $\mathcal{C}$ удовлетворяет **(C_2)**, то $\mathcal{P}_G^{\mathcal{C}} = \mathcal{B}_G^{\mathcal{C}} = \mathcal{F}_G^{\mathcal{C}}$, т. е. предбазис сам оказывается фильтром в $\mathcal{N}$. В дальнейшем конъюнкцию **(C_2)** $\wedge$ **(C_4)** мы будем, как правило, заменять на несколько более сильное предположение **(C_1)** $\wedge$ **(C_2)** $\wedge$ **(C_3)**, т. е. будем считать, что $\mathcal{C}$ является *псевдомногообразием*.

Теорема 2. 1. *Если класс групп* $\mathcal{C}$ *удовлетворяет* **(C_1)**, *то функтор* $T^{\mathcal{C}}(G) = (G, \tau_G^{\mathcal{C}})$ *является ф.т.*

2. *При дополнительном предположении* **(C_3)** *дискрет этого функтора совпадает с исходным классом групп:* $\mathcal{D}(T^{\mathcal{C}}) = \mathcal{C}$.

3. *Функтор* $T^{\mathcal{C}}$ *минорирует любой ф.т., имеющий тот же дискрет, т. е.* $[\mathcal{D}(T) = \mathcal{C}] \Rightarrow [T^{\mathcal{C}} \le T]$.

4. *В предположении* **(C_1)** $\wedge$ **(C_3)** *функтор* $T^{\mathcal{C}}$ *является ф.и.т. тогда и только тогда, когда выполнено* **(C_2)**.

5. *Ф.и.т. определяется по своему дискрету однозначно.*

Доказательство. 1. Непрерывность всех гомоморфизмов $\varphi: G \to G'$ в смысле ко-$\mathcal{C}$-топологий следует из того, что для любой предбазисной окрестности $K' \in \mathcal{C}^*(G')$ прообраз $K = \varphi^{-1}(K')$ также является ко-$\mathcal{C}$-подгруппой: $G/K \cong \varphi(G)/\varphi(K) \cong \varphi(G)/K' \le G'/K' \in \mathcal{C}$, откуда, в силу **($C_1$)**, вытекает $G/K \in \mathcal{C}$.

2. Если $G \in \mathcal{C}$, то единичная подгруппа как ядро тождественного автоморфизма является окрестностью единицы, что свидетельствует о дискрет-

ности топологии; так что $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}(T^{\mathcal{C}})$. Докажем обратное включение. Пусть $G \in \mathcal{D}(T^{\mathcal{C}})$. Значит, тривиальная подгруппа E является окрестностью единицы и поэтому должна принадлежать базису $\mathcal{B}_G^{\mathcal{C}}$, или, что, в силу **($C_3$)**, равносильно, предбазису $\mathcal{P}_G^{\mathcal{C}}$; стало быть, $G \cong G / E \in \mathcal{C}$.

3. Пусть дискрет некоторого ф.т. T совпадает с классом $\mathcal{C}$, по необходимости удовлетворяющим **(C_1)** и **(C_3)**. По определению ф.т. обеспечивает непрерывность всех гомоморфизмов, в том числе эпиморфизмов $\varphi : G \to Y$ на группы $Y \in \mathcal{D}(T)$. Поэтому для любой группы G топология τ_G мажорирует инициальную топологию $\tau_G^{\mathcal{C}}$.

4. Докажем, что если $\mathcal{C}$ удовлетворяет не только **(C_1)** и **(C_3)**, но и **(C_2)**, то ф.т. $T^{\mathcal{C}}$ идеален, т. е. обеспечивает открытость всех гомоморфизмов проектирования $\pi : G \to G^{\wedge}$ ($H \trianglelefteq G$, $G^{\wedge} = G / H$). Последний факт достаточно проверять на базисных окрестностях единицы, которыми в данной ситуации служат ко-$\mathcal{C}$-подгруппы. Но если $N \in \mathcal{C}^*(G)$, то $\pi(N) \in \mathcal{C}^*(G^{\wedge})$ (в самом деле, $G^{\wedge} / \pi(N) = (G / H)/(NH / H) \cong G / NH \cong (G / N)/(NH / N) \in \mathcal{C}$, где условие **($C_2$)** использовано на последнем шаге). Обратно, пусть $T^{\mathcal{C}}$ является ф.и.т. и, следовательно, наводит во всякой фактор-группе фактор-топологию. Фактор-топология для дискретной топологии снова является дискретной. Значит, дискрет $\mathcal{D}(T^{\mathcal{C}})$ удовлетворяет **(C_2)**.

5. Рассмотрим произвольный ф.и.т. T, имеющий дискретом псевдомногообразие $\mathcal{C}$. Мы уже знаем, что $T^{\mathcal{C}} \le T$; докажем противоположное мажорирование. На уровне фильтровых базисов (составленных из нормальных подгрупп) достаточно доказать включение $\mathcal{B}_G \subseteq \mathcal{B}_G^{\mathcal{C}}$ (G — произвольная группа). Любая окрестность $U \in \mathcal{B}_G$ является открытой в τ_G; следовательно, фактор-группа $G^{\wedge} = G / U$ дискретна в смысле фактор-топологии $(\tau_G)^{\wedge}$; следовательно, $G / U \in \mathcal{D}(T) = \mathcal{C}$, т. е. $U \in \mathcal{B}_G^{\mathcal{C}}$.

Замечание 6. Вместе с отображением $\mathcal{D}$, сопоставляющим ф.т. T его дискрет, рассмотрим отображение θ, сопоставляющее классу групп $\mathcal{C}$ соответствующий функтор ко-$\mathcal{C}$-топологизации: $\theta(\mathcal{C}) = T^{\mathcal{C}}$. В этих обозначениях второе и третье утверждения теоремы 2 принимают следующий вид: $\mathcal{D}(\theta(\mathcal{C})) = \mathcal{C}$; $\theta(\mathcal{D}(T)) \le T$; в случае идеальности T минорирование становится равенством.

Замечание 7. Замыканием единичной подгруппы в ко-$\mathcal{C}$-топологии является корадикал $\mathbf{corad}_{\mathcal{C}}(G)$; хаусдорфовость группы $(G, \tau_G^{\mathcal{C}})$ равносильна тривиальности этого корадикала, т. е. $\mathcal{C}$-аппроксимируемости группы G, в связи с чем корадикал называется также *$\mathcal{C}$-аппроксимантом* ($\mathcal{C}$-residual). В частности, псевдомногообразию Φ всех конечных групп отвечает функтор коконечной топологизации $T^{\Phi} = \Gamma$, являющийся, как уже отмечалось, ф.и.т. Тривиальность $\mathcal{C}$-аппроксиманта $A(G, \tau_G^{\Phi}) = \mathbf{corad}_{\Phi}(G)$ равносильна *финитной аппроксимируемости* группы G.

6.2. $\mathcal{C}$ **-топология** ${}^{\mathcal{C}}\tau_G$ всегда является *цокольной* и, конкретно, порождается одноэлементным базисом ${}^{\mathcal{C}}\mathcal{B}_G = \{{}^{\mathcal{C}}R_G\}$, с цоколем, являющимся *широким* $\mathcal{C}$*-радикалом*: ${}^{\mathcal{C}}R_G = \mathbf{Rad}_{\mathcal{C}}(G)$ (см. определение 5). Это следует из описания (см. п. 2) финальной топологии на G, порожденной всевозможными мономорфизмами $\varphi: X \to G$ всевозможных групп $X \in \mathcal{C}$, наделенных индискретными топологиями, в группу G: образ топологии $\varphi(\iota_X)$ является цокольной топологией на G, с цоколем H^G, где $H = \varphi(X) \cong X$ является $\mathcal{C}$-подгруппой в G; инфимум всех таких топологий также является цокольной топологией, с цоколем — нормальной оболочкой всех $\mathcal{C}$-подгрупп. При дополнительном условии **(R$_1$)** широкий радикал совпадает с обычным и описание цоколя приобретает вид ${}^{\mathcal{C}}R_G = \mathbf{rad}_{\mathcal{C}}(G)$.

Теорема 3. 1. *Если класс* $\mathcal{C}$ *удовлетворяет* **(C$_2$)**, *то функтор* ${}^{\mathcal{C}}T(G) = (G, {}^{\mathcal{C}}\tau_G)$ является ф.т.

2. *Если* $\mathcal{C}$ *строго радикален, то* (2.1) *индискрет* $\mathcal{I}({}^{\mathcal{C}}T) = \mathcal{C}$; (2.2) *функтор* ${}^{\mathcal{C}}T$ *мажорирует любой ф.т., имеющий тот же индискрет*: $[\mathcal{I}(T) = \mathcal{C}] \Rightarrow [{}^{\mathcal{C}}T \geq T]$; (2.3) *функтор* ${}^{\mathcal{C}}T$ *является ф.и.т.*

3. *Для строго радикального класса групп* $\mathcal{C}$ *функтор* ${}^{\mathcal{C}}T$ *является ф.и.н.т. тогда и только тогда, когда* (3.1) *либо* $\mathcal{C} = \mathcal{G}$ *(и тогда* ${}^{\mathcal{C}}T = I$*),* (3.2) *либо* $\mathcal{C} = \mathcal{E}$ *(и тогда* ${}^{\mathcal{C}}T = \Delta$*).*

Доказательство. 1. В силу **(C$_1$)** всякий гомоморфизм $\varphi: G \to G'$ переводит $\mathcal{C}$-подгруппы в $\mathcal{C}$-подгруппы и, следовательно, цоколь ${}^{\mathcal{C}}R_G$ в цоколь ${}^{\mathcal{C}}R_{G'}$; поэтому все гомоморфизмы непрерывны в смысле $\mathcal{C}$-топологий.

2. Пусть теперь класс $\mathcal{C}$ является *строго радикальным*. 2.1. Докажем, что $\mathcal{I}({}^{\mathcal{C}}T) = \mathcal{C}$. Индискретность топологии ${}^{\mathcal{C}}\tau_G$ равносильна тому, что цоколь ${}^{\mathcal{C}}R_G = \mathbf{rad}_{\mathcal{C}}(G) = G,$ и, следовательно, $G \in \mathcal{C}$. 2.2. Пусть индискрет некоторого ф.т. T совпадает с классом $\mathcal{C}$, по необходимости удовлетворяющим **(C$_1$)**, **(R)** и **(R$_1$)**. По определению ф.т. все гомоморфизмы $\varphi: X \to G$ должны быть непрерывными (в смысле топологий τ_X и τ_G); в частности, непрерывны все мономорфизмы $\mathcal{C}$-групп (наделенных индискретной топологией) в группу G. Поэтому топология τ_G обязана минорировать финальную топологию ${}^{\mathcal{C}}\tau_G$. 2.3. Для доказательства идеальности функтора ${}^{\mathcal{C}}T$ требуется проверить открытость произвольного эпиморфизма проектирования $\pi: G \to G^{\wedge}$ ($G^{\wedge} = G/H$) в смысле цокольных топологий, что (см. п. 2) равносильно равенству $\pi({}^{\mathcal{C}}R_G) = {}^{\mathcal{C}}R_{G^{\wedge}}$. Обозначим через L правую часть этого равенства. Группа L является наименьшей из таких нормальных в $G^{\wedge}$ подгрупп, фактор-группы по которым принадлежат полупростому классу групп, парному с радикальным классом $\mathcal{C}$. Докажем, что $K = \varphi^{-1}(L)$ совпадает с $\mathbf{rad}_{\mathcal{C}}(G)$. Во-первых, имеем изоморфизм $G/K \cong (G/H)/(K/H) = G^{\wedge}/L$, обеспечи-

вающий полупростоту фактор-группы G/K, а во-вторых, нетрудно понять, что K является наименьшей из нормальных в G подгрупп, факторы по которым полупросты.

3. Последний результат вытекает из третьего утверждения предложения 4. В отличие от случая общего ф.т. T, когда тривиальность индискрета $\mathcal{I}(T)$ не влечет равенство $T = \Delta$, для $T = {}^{\mathcal{C}}T$ в данном случае мы имеем $\mathcal{E} = \mathcal{I}({}^{\mathcal{C}}T) = \mathcal{C}$, откуда сразу получается ${}^{\mathcal{C}}T = {}^{\mathcal{E}}T = \Delta$.

Замечание 8. По аналогии с замечанием 6, наряду с отображением $\mathcal{I}$, сопоставляющим ф.т. T его индискрет, рассмотрим отображение χ, сопоставляющее классу $\mathcal{C}$ функтор ${}^{\mathcal{C}}T$. Утверждения (2.1) и (2.2) теоремы 3 приобретают следующий вид: $\mathcal{I}(\chi(\mathcal{C})) = \mathcal{C}$; $\chi(\mathcal{I}(T)) \geq T$, причем последнее мажорирование лишь в крайних (тривиальных) случаях обращается в равенство.

7. Продолжение функторов топологизации. Функторы топологизации можно задавать не только на всей категории **Gr**, но и на произвольной полной подкатегории **H** в ней (с классом элементов $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$). В некоторых случаях такие функторы допускают «разумные» *продолжения* на категорию **Gr**.

Предложение 4. *Пусть* **H** *— полная подкатегория в* **Gr***, класс объектов которой* $\mathcal{H}$ *является псевдомногообразием. Пусть* $T(G) = (G, \tau_G)$ *— ф.т., заданный на* **H**. *Существует заданный на* **Gr** *ф.т.* $\tilde{T}(G) = (G, \tilde{\tau}_G)$, *продолжающий* T *(* $\tilde{\tau}_G = \tau_G$ *для любой группы* $G \in \mathcal{H}$*) и имеющий тот же дискрет:* $\mathcal{D}(\tilde{T}) = \mathcal{D}(T)$.

Доказательство. Построение функтора $\tilde{T}$ осуществляется с помощью наведения в произвольной группе инициальной топологии, порожденной всевозможными эпиморфизмами этой группы на группы из класса $\mathcal{H}$, снабженные топологиями по функтору T (подробности опускаем, укажем только на необходимость использования некоторых общих свойств инициальных топологий — см. [1, с. 35]).

Замечание 9. В качестве **H** может быть выбрана категория **AbGr**. В частности, в [15] специфическими средствами теории абелевых групп построен пример двух различных ф.т., имеющих одинаковые дискреты. Эти функторы могут быть продолжены на категорию **Gr**, и мы получим следующее уточнение к третьему и пятому утверждениям теоремы 2: в неидеальном случае могут существовать различные ф.т. с одинаковыми дискретами.

Предложение 5. *Пусть* **H** *— полная подкатегория в* **Gr***, класс объектов которой* $\mathcal{H}$ *является строго радикальным. Пусть* $T(G) = (G, \tau_G)$ *— ф.т., заданный на* **H**. *Существует заданный на* **Gr** *ф.т.* $\breve{T}(G) = (G, \breve{\tau}_G)$, *продолжающий* T *(* $\breve{\tau}_G = \tau_G$ *для любой группы* $G \in \mathcal{H}$*) и имеющий тот же дискрет:* $\mathcal{I}(\breve{T}) = \mathcal{I}(T)$.

Доказательство. Функтор $\breve{T}$ строится с помощью наведения финальных топологий, порожденных мономорфизмами в данную группу из групп класса $\mathcal{H}$, снабженных топологиями по функтору T; необходимые свойства финальных топологий см. в [1, с. 38].

Библиографический список

1. *Бурбаки Н.* Общая топология : основные структуры. М. : Наука, 1968. 272 с.
2. *Гольцов Д. В., Яцкин Н. И.* Классы групп и подгрупповые топологии // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер.: Естественные, общественные науки. 2011. Вып. 2. С. 115—128.
3. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. М. : Наука, 1996. 288 с.
4. *Курош А. Г.* Радикалы в теории групп // Сиб. мат. журн. 1962. Т. 3, № 6. С. 912—931.
5. *Курош А. Г.* Теория групп. М. : Наука, 1967. 648 с.
6. *Нейман Х.* Многообразия групп. М. : Мир, 1969. 264 с.
7. Общая алгебра. М. : Наука, 1990. Т. 1 / под ред. Л. А. Скорнякова. 892 с. (Справ. мат. б-ка).
8. *Плоткин Б. И.* О функториалах, радикалах и корадикалах в группах // Мат. записки Урал. гос. ун-та. 1970. Т. 7, вып. 3. С. 150—182.
9. *Плоткин Б. И.* Общая теория групп // Итоги науки. Сер.: Математика : алгебра, топология, геометрия. М. : ВИНИТИ, 1970. Т. 9. С. 5—74.
10. *Чан Ван Хао.* О полупростых классах групп // Сиб. мат. журн. Т. 3. 1962. № 6. С. 943—949.
11. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами системы подгрупп. М. : Наука, 1989. 384 с.
12. *Щукин К. К.* К теории радикалов в группах // Сиб. мат. журн. 1962. Т. 3, № 6. С. 932—942.
13. *Яцкин Н. И.* К топологической трактовке аппроксимационных свойств групп, связанных с вербальными подгруппами // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер.: Естественные, общественные науки. 2010. Вып. 2. С. 118—127.
14. *Arnautov V. I., Filippov K. M.* Lattices of topologies of algebraic systems // Algebra and Discrete Math. 2006. № 2. P. 1—16.
15. *Boyer D., Mader A.* Functorial topologies on Abelian groups // Rocky Mountain J. of Math. 1980. Vol. 10, № 4. P. 695—708.
16. *Charles B.* Méthodes topologiques en théorie des groupes abéliens // Proc. Colloq. Abelian Groups. Budapest, 1964. P. 29—42.
17. *Dikranjan D., Giordano Bruno A.* Functorial topologies and finite-index subgroups of Abelian groups // Topology and Its Applications. 2011. Vol. 158. P. 2391—2407.
18. *Fay T. H., Walls G. L.* Maximal functorial topologies on Abelian groups // Arch. Math. 1982. Vol. 38. P. 167—174.
19. *Fuchs L.* Infinite Abelian Groups. New York : Acad. Press, 1970. Vol. 1. 290 p. (русское издание: *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы. М.: Мир, 1974. Т. 1. 336 с.).
20. *Gardner B. J.* A remark on strict radical classes of groups // Acta Math. Acad. Sci. Hung. 1981. Vol. 38, № 1/4. P. 61.
21. *Gardner B. J.* Kurosh — Amitsur radical theory for groups // An. Şt. Univ. Ovidius Constanța. 2010. Vol. 18 (2). P. 73—90.
22. *Hewitt E., Ross K. A.* Abstract Harmonic Analysis. Berlin, etc. : Springer-Verlag, 1963. Vol. 1. 525 p. (русское издание: *Хьюитт Э., Росс К.* Абстрактный гармонический анализ. М. : Наука, 1975. Т. 1. 656 с.).
23. *Mader A.* Basic concepts on functorial topologies : (Abelian group theory : proc. of the Oberwolfach conf., 1981) // Lecture Notes in Math. Berlin, etc. : Springer-Verlag, 1981. Vol. 874. P. 251—271.
24. *Pombo D. P. (Jr.)* On a class of topological groups // Bol. Soc. Paran. Mat. 2000. Vol. 24, № 1/2. P. 25—34.
25. *Ribes L., Zalesskii P.* Profinite Groups. Berlin, etc. : Springer-Verlag, 2010. 464 p.