УДК 517.55

Л. Н. Кусковский

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ОБОБЩЁННОЙ СИСТЕМЫ КОШИ – РИМАНА

В выпуклой области четырёхмерного евклидова пространства для одной системы дифференциальных уравнений в частных производных, обобщающей известную систему Коши – Римана, находятся все решения.

Ключевые слова: система Коши – Римана, комплексное уравнение, невырожденное линейное преобразование.

All the solutions are found in a convex 4-Euclidean space for a specific system of partial differential equations generalizing a well-known Cauchy – Riemann system.

Key words: Cauchy – Riemann system, complex equation, nondegenerate linear transformation.

1. Введение

Системы дифференциальных уравнений, обобщающие известную систему Коши – Римана, в различных пространствах вещественных функций от двух вещественных переменных изучались многими математиками [2,с. 455 – 456].

В настоящей работе мы рассмотрим систему

$$\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial z_1} = a(z, z_1)u - b(z, z_1)v + \varphi,$$
$$\frac{\partial u}{\partial z_1} + \frac{\partial v}{\partial z} = b(z, z_1)u + a(z, z_1)v + \psi, \qquad (1)$$

где $z = x + iy$, $z_1 = x_1 + iy_1$, $u, v, a, b, \varphi, \psi$ – комплексные функции, определённые в *выпуклой области* D вещественного евклидова пространства E^4 переменных x, y, x_1, y_1, $\partial/\partial z$ и $\partial/\partial z_1$ – известные дифференциальные операторы:

$$\partial/\partial z \equiv \partial_z = (1/2)(\partial/\partial x - i\partial/\partial y), \quad \partial/\partial z_1 \equiv \partial z_1 = (1/2)(\partial/\partial x_1 - i\partial/\partial y_1). \qquad (2)$$

Если $z = x$, $z_1 = y$ и искомые $u(x, y)$, $v(x, y)$ и заданные функции $a(x, y)$, $b(x, y)$, $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ вещественные, система (1) полностью изучена И. Н. Векуа [1]. Комплексные решения $w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ такой системы названы им *обобщёнными аналитическими функциями.* Ф. Д. Гаховым [2, с. 434] такая система названа *нормальной.*

Аналогичная система с комплекснозначными искомыми и заданными функциями исследована в [3]. В ней найдены все решения системы, получены интегральные представления решений, ставится и решается краевая задача типа Римана – Гильберта. Для этой же системы в [4] рассматривается краевая задача типа Пуанкаре. Следуя Ф. Д. Гахову мы систему (1) будем также называть *нормальной.*

Л. Г. Михайловым [6] указан способ исследования обобщённой системы Коши – Римана

$$\partial_{\bar z} w = aw + b\bar w + f, \qquad \partial_{\bar z_1} w = cw + d\bar w + g$$

с двумя независимыми z и z_1 комплексными переменными.

В данной статье мы укажем простой метод исследования системы (1). Именно, считая функции $a, b, \varphi, \psi, u, v \in C^1(D)$ ($C^1(D)$ —класс комплексных непрерывно дифференцируемых в D функций) рассмотрим [5] линейное преобразование

$$\Lambda X = Q, \qquad (3)$$

где

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} p \\ q \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \qquad (4)$$

области D в область G переменных $p, q, \lambda, \mu,$ сводящее систему (1) *к двум комплексным дифференциальным уравнениям.*

Так как $\det \Lambda = 4,$ то (3) – невырожденное преобразование $D \to G$, и, следовательно, существует единственное обратное преобразование $G \to D$: $X = \Lambda^{-1}Q.$

Далее, имея (в силу (3), (4))

$$z - iz_1 = (x + y_1) + i(y - x_1) = \lambda + i\mu = \eta,$$

согласно (2), получим

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\partial}{\partial \eta}, \qquad \frac{\partial}{\partial z_1} = i\left(\frac{\partial}{\partial \zeta} - \frac{\partial}{\partial \eta}\right).$$

Откуда

$$\frac{\partial}{\partial z} + i\frac{\partial}{\partial z_1} = 2\frac{\partial}{\partial \eta}, \qquad \frac{\partial}{\partial z} - i\frac{\partial}{\partial z_1} = 2\frac{\partial}{\partial \zeta}. \qquad (5)$$

2. О решениях системы

Умножив второе уравнение системы (1) на i и сложив с первым, получим,

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + i\frac{\partial}{\partial z_1}\right) h(z, z_1) = A(z, z_1)\, h(z, z_1) + \Psi(z, z_1), \qquad (6)$$

где $h(z, z_1) = u + iv$, $A(z, z_1) = a + ib$, $\Psi(z, z_1) = \varphi + i\psi.$

Рассмотрим уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + i\frac{\partial}{\partial z_1}\right) h(z, z_1) = f(z, z_1). \qquad (7)$$

В обозначениях

$h(z, z_1) = H(p, q, \lambda, \mu) = H(\zeta, \eta)$, $f(z, z_1) = F(\zeta, \eta)$, уравнение (7) (в силу (5)) в области G примет вид

$$\partial H(\zeta, \eta)/\partial \eta = (1/2)\, F(\zeta, \eta). \qquad (8)$$

Далее, умножив первое уравнение системы (1) на i и сложив со вторым уравнением, получим

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} - i\frac{\partial}{\partial z_1}\right) h_1(z, z_1) = A_1(z, z_1) h_1(z, z_1) + \Psi_1(z, z_1), \qquad (9)$$

где $h_1(z, z_1) = u - iv$, $A_1(z, z_1) = a - ib$, $\Psi_1(z, z_1) = \varphi - i\psi.$

Поскольку все рассматриваемые функции комплекснозначные, то функции h и h_1, A и A_1, Ψ и Ψ_1 не являются комплексно *сопряжёнными.*

Теперь, рассмотрев уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} - i\frac{\partial}{\partial z_1}\right) h_1(z, z_1) = f_1(z, z_1) \qquad (10)$$

и полагая $h_1(z, z_1) = H_1(p, q, \lambda, \mu) = H_1(\zeta, \eta)$, $f_1(z, z_1) = F_1(\zeta, \eta)$, уравнение (10) в области G (согласно (5)) запишется в виде

$$\partial H_1(\zeta, \eta)/\partial\zeta = (\tfrac{1}{2})\, F_1(\zeta, \eta). \tag{11}$$

В уравнении (8) ((11)) переменная ζ (η) играет роль параметра. Будем называть эти уравнения *основными.* Они подробно изучены И. Н. Векуа [1]. Откуда сразу следуют [1, с. 41 – 42], [2, с. 432 – 435]:

Теорема 1. *Функция*

$$H(\zeta, \bar{\eta}) = -\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{G(\zeta)} \frac{F(p, q, \lambda^0\mu^0)}{\bar{\eta}^0 - \bar{\eta}}\, d\lambda^0 \wedge d\mu^0 + \widetilde{H}(p, q, \lambda - i\mu),$$

где $\widetilde{H}(p, q, \lambda - i\mu) -$ *любая функция, голоморфная от* $\lambda - i\mu = \bar{\eta}$, *является общим решением уравнения (8).*

Теорема 2. *Общее решение уравнения (6) в G имеет вид*

$$\widehat{H}(\zeta, \eta) = exp\langle\omega(\zeta, \bar{\eta})\rangle\, [\Phi(\zeta, \bar{\eta}) + \omega^0(\zeta, \eta)],$$

где

$$\omega(\zeta,\ \overline{\eta)} = -\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{G(\zeta)} \frac{A(\zeta,\ \eta^0)}{\bar{\eta}^0 - \bar{\eta}}\, d\lambda^0 \wedge d\mu^0,$$

$\Phi(\zeta, \bar{\eta}) -$ *любая функция, голоморфная от* $\bar{\eta}$, $\omega^0(\zeta, \eta) -$ *частное решение уравнения* $\frac{\partial\omega^0}{\partial\eta} = exp\langle-\omega(\zeta, \bar{\eta})\rangle\, \Psi(\zeta, \eta)$.

Теорема 3. *Функция*

$$H_1(\bar{\zeta}, \eta) = -\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{G(\eta)} \frac{F_1(p^0, q^0, \lambda,\ \mu)}{\bar{\zeta}^0 - \bar{\zeta}}\, dp^0 \wedge dq^0 + \widetilde{H_1}(p - iq, \lambda, \mu),$$

где $\widetilde{H}_1(p - iq, \lambda, \mu) -$ *любая функция, голоморфная от* $p - iq = \bar{\zeta}$, *является общим решением уравнения* (11).

Теорема 4. *Общее решение уравнения* (9) *в* G *имеет вид*

$$\widehat{H}_1(\zeta, \eta) = exp\langle\omega_1(\bar{\zeta}, \eta)\rangle[\Phi_1(\bar{\zeta}, \eta) + \omega_1^0(\zeta, \eta)],$$

где $\Phi_1(\bar{\zeta}, \eta) -$*любая функция, голоморфная от* $\bar{\zeta} = p - iq$,

$$\omega_1(\bar{\zeta}, \eta) = -\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{G(\eta)} \frac{A_1(\zeta^0, \eta)}{\bar{\zeta}^0 - \bar{\zeta}}\, dp^0 \wedge dq^0,$$

$\omega_1^0(\zeta, \eta) -$ *частное решение уравнения* $\frac{\partial\omega_1^0}{\partial\zeta} = exp\langle-\omega_1(\bar{\zeta}, \eta)\rangle\Psi_1(\zeta, \eta)$.

Замечания: 1. Теперь, зная в области D функции $h(z, z_1)$ и $h_1(z, z_1)$, получим необходимый вид всех решений $(u(z, z_1), v(z, z_1))$ системы (1), именно

$$\begin{pmatrix} u(z, z_1) \\ v(z, z_1) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h(z, z_1) \\ h_1(z, z_1) \end{pmatrix}.$$

2. Имея для каждого уравнения (8) и (11) эквивалентные интегральные уравнения, нетрудно получить интегральные представления всех решений $(u(z, z_1), v(z, z_1))$ системы (1) и по известной методике ставить и исследовать различные краевые задачи.

Библиографический список

1. *Векуа И. Н.* Обобщённые аналитические функции. М.: Физматгиз,1959. 628 с.
2. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. 2-е изд. М. : Физматгиз, 1963. 640 с.
3. *Кусковский Л. Н.* О краевой задаче типа Римана – Гильберта // Дифференциальные уравнения. 1975. Т. 11, №3. С. 523—532.
4. *Кусковский Л. Н.* Об одной краевой задаче Пуанкаре // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер.: Естественные, общественные науки. 2014. Вып. 2. С. 99—104 .
5. *Кусковский Л. Н.* Об одной обобщённой системе Коши – Римана с двумя независимыми комплексными переменными // Изв. вузов. Математика. 1980. № 7(218). С. 45—46.
6. *Михайлов Л. Г.* Об одном способе исследования обобщённой системы Коши – Римана с двумя независимыми комплексными переменными // ДАН ТаджССР. 1974. Т. 17, №9. С. 7—9.

УДК 512.543

Н. С. Савельичева, Е. В. Соколов

ОДНО НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ НИЛЬПОТЕНТНОЙ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ HNN-РАСШИРЕНИЯ НИЛЬПОТЕНТНОЙ ГРУППЫ

Пусть G — HNN-расширение нильпотентной группы A со связанными подгруппами H и K, причем $A \neq H \cup K$. Доказано, что если группа G аппроксимируется нильпотентными группами, то существует такое простое число p, что подгруппы H и K p'-изолированы в группе A.

Ключевые слова: нильпотентная аппроксимируемость, HNN-расширение.

Let G be an HNN extension of a nilpotent group A with associated subgroups H and K, $A \neq H \cup K$. We prove that if G is residually nilpotent then there exists a prime p such that H and K are p'-isolated in A.

Key words: residual nilpotence, HNN extension.

1. Введение. Формулировка результатов

Напомним, что группа X называется аппроксимируемой классом групп C, если для любого неединичного элемента $x \in X$ существует гомоморфизм группы X на группу из класса C, переводящий x в элемент, отличный от 1. Д. Н. Азаровым и Е. А. Ивановой в работе [1] было доказано следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть P — свободное произведение некоторого семейства локально нильпотентных групп с одной объединенной подгруппой Q. И пусть подгруппа Q хотя бы в двух свободных множителях содержится собственным образом. Если группа P аппроксимируется нильпотентными группами, то су-