Библиографический список

1. *Векуа И. Н.* Обобщённые аналитические функции. М.: Физматгиз,1959. 628 с.
2. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. 2-е изд. М. : Физматгиз, 1963. 640 с.
3. *Кусковский Л. Н.* О краевой задаче типа Римана – Гильберта // Дифференциальные уравнения. 1975. Т. 11, №3. С. 523—532.
4. *Кусковский Л. Н.* Об одной краевой задаче Пуанкаре // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер.: Естественные, общественные науки. 2014. Вып. 2. С. 99—104 .
5. *Кусковский Л. Н.* Об одной обобщённой системе Коши – Римана с двумя независимыми комплексными переменными // Изв. вузов. Математика. 1980. № 7(218). С. 45—46.
6. *Михайлов Л. Г.* Об одном способе исследования обобщённой системы Коши – Римана с двумя независимыми комплексными переменными // ДАН ТаджССР. 1974. Т. 17, №9. С. 7—9.

УДК 512.543

Н. С. Савельичева, Е. В. Соколов

ОДНО НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ НИЛЬПОТЕНТНОЙ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ HNN-РАСШИРЕНИЯ НИЛЬПОТЕНТНОЙ ГРУППЫ

Пусть G — HNN-расширение нильпотентной группы A со связанными подгруппами H и K, причем $A \neq H \cup K$. Доказано, что если группа G аппроксимируется нильпотентными группами, то существует такое простое число p, что подгруппы H и K p'-изолированы в группе A.

Ключевые слова: нильпотентная аппроксимируемость, HNN-расширение.

Let G be an HNN extension of a nilpotent group A with associated subgroups H and K, $A \neq H \cup K$. We prove that if G is residually nilpotent then there exists a prime p such that H and K are p'-isolated in A.

Key words: residual nilpotence, HNN extension.

1. Введение. Формулировка результатов

Напомним, что группа X называется аппроксимируемой классом групп C, если для любого неединичного элемента $x \in X$ существует гомоморфизм группы X на группу из класса C, переводящий x в элемент, отличный от 1. Д. Н. Азаровым и Е. А. Ивановой в работе [1] было доказано следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть P — свободное произведение некоторого семейства локально нильпотентных групп с одной объединенной подгруппой Q. И пусть подгруппа Q хотя бы в двух свободных множителях содержится собственным образом. Если группа P аппроксимируется нильпотентными группами, то существует такое простое число p, что подгруппа Q p'-изолирована в каждом свободном множителе.

Напомним, что подгруппа Y группы X называется p'-изолированной в группе X, если для всякого элемента $x \in X$ и для всякого простого числа $q \neq p$ из условия $x^q \in Y$ следует, что $x \in Y$.

Пусть до конца изложения A — некоторая нильпотентная группа; H и K — изоморфные подгруппы группы A такие, что $A \neq H \cup K$; $\varphi: H \to K$ — изоморфизм; $G = \langle A, t; t^{-1}Ht = K, \varphi \rangle$ — HNN-расширение группы A с проходной буквой t и подгруппами H и K, связанными при помощи изоморфизма φ. Целью настоящей статьи является доказательство следующего утверждения.

Теорема 2. Если группа G аппроксимируется нильпотентными группами, то существует такое простое число p, что подгруппы H и K p'-изолированы в группе A.

2. Вспомогательные утверждения

Говорят, что конечная группа имеет примарный порядок, если ее порядок является степенью некоторого простого числа.

Предложение 1. Пусть группа X аппроксимируется нильпотентными группами, Y — конечно порожденная подгруппа группы X. Тогда для любого неединичного элемента $y \in Y$существует гомоморфизм группы Y на конечную группу примарного порядка, при котором образ элемента y по-прежнему отличен от 1.

Доказательство. Так как группа X аппроксимируется нильпотентными группами, то существует гомоморфизм ρ этой группы на нильпотентную группу, переводящий y в неединичный элемент.

Так как гомоморфный образ конечно порожденной группы является конечно порожденной группой, следовательно, ограничение σ гомоморфизма ρ на подгруппу Y является гомоморфизмом этой подгруппы на конечно порожденную нильпотентную группу и $y\sigma \neq 1$.

Если порядок элемента $y\sigma$ бесконечен, то он не принадлежит периодической части $\tau(Y\sigma)$ группы $Y\sigma$ и, значит, $(y\sigma)\tau(Y\sigma)$ — неединичный элемент фактор-группы $Y\sigma/\tau(Y\sigma)$. Группа $Y\sigma/\tau(Y\sigma)$ является конечно порожденной нильпотентной и не имеет кручения. Поэтому по теореме Грюнберга [4, теорема 2.1] она аппроксимируется конечными -группами для любого простого числа p.

Если порядок элемента $y\sigma$ конечен, выберем простое число p, которое делит порядок $y\sigma$. Тогда $y \notin \tau_{p'}(Y\sigma)$, где $\tau_{p'}(Y\sigma)$ обозначает множество всех элементов группы $Y\sigma$, порядки которых конечны и взаимно просты с p. Множество $\tau_{p'}(Y\sigma)$ является характеристической подгруппой группы $Y\sigma$ (см., например, [3, с. 12]), поэтому определена фактор-группа $Y\sigma/\tau_{p'}(Y\sigma)$ и $(y\sigma)\tau_{p'}(Y\sigma)$ — ее неединичный элемент. Так как порядки всех элементов группы $Y\sigma/\tau_{p'}(Y\sigma)$ либо бесконечны, либо являются степенями числа p, то снова по теореме Грюнберга она аппроксимируется конечными p-группами.

Таким образом, в обоих случаях мы можем продолжить гомоморфизм σ до гомоморфизма группы Y на группу примарного порядка, переводящего y в отличный от 1 элемент.

Предложение 2. Пусть p и q — различные простые числа, X — конечная группа, порядок которой равен p^n для некоторого $n \geq 1$. Тогда для любого элемента $x \in X$ найдется целое число m такое, что $x = x^{qm}$.

Доказательство. Пусть $x \in X$. Тогда $x^{p^n} = 1$. Из неравенства $q \neq p$ следует, что $(q, p^n) = 1$ и, значит, существуют числа $m, k \in \mathbb{Z}$ такие, что $qm + p^n k = 1$. Тогда $x = x^{qm+p^n k} = (x^q)^m (x^{p^n})^k = x^{qm}$, что и требовалось.

Пусть $\varepsilon, \delta \in \{1, -1\}$, $a, b, c, d \in A$. Рассмотрим две последовательности простых коммутаторов:

$$u_1 = c, u_2 = [t^{-\varepsilon} a t^{\varepsilon}, u_1], u_3 = [t^{-\varepsilon} a t^{\varepsilon}, u_2], \dots$$
$$v_1 = d, v_2 = [t^{-\delta} b t^{\delta}, v_1], v_3 = [t^{-\delta} b t^{\delta}, v_2], \dots$$

и положим $w_n = [u_n,\ t^{-3} v_n t^3]$ для всех $n \geq 1$.

Предложение 3. Пусть m — ступень нильпотентности группы A. Если выполняется одно из следующих двух условий:

1) $\varepsilon = 1$ и $a \in H$,

2) $\varepsilon = -1$ и $a \in K$ —

то для каждого $n > 1$ u_n — простой коммутатор веса n элементов группы A и при $n > m$ $u_n = 1$.

Если выполняется одно из следующих двух условий:

3) $\delta = 1$ и $b \in H$,

4) $\delta = -1$ и $b \in K$ —

то для каждого $n > 1$ v_n — простой коммутатор веса n элементов группы A и при $n > m$ $v_n = 1$.

Если выполняется хотя бы одно из условий 1 – 4, то при $n > m$ $w_n = 1$.

Доказательство. Покажем, что для каждого $n > 1$ u_n — простой коммутатор веса n элементов группы A. Будем рассуждать индукцией по n.

Если $\varepsilon = 1$ и $a \in H$, то $t^{-\varepsilon} a t^{\varepsilon} \in K$. Если $\varepsilon = -1$ и $a \in K$, то $t^{-\varepsilon} a t^{\varepsilon} \in H$. Поэтому база индукции очевидна.

Предположим, что u_n обладает указанным свойством. Тогда при выполнении любого из условий 1 – 2 элемент $u_{n+1} = [t^{-\varepsilon} a t^{\varepsilon}, u_n]$ является коммутатором элементов из группы A и, следовательно, сам принадлежит этой группе.

Так как m — ступень нильпотентности группы A, то при $n > m$ $u_n = 1$.

Свойства элементов v_n проверяются аналогично.

Пусть выполняется хотя бы одно из условий 1 – 4 и $n > m$. Тогда $u_n = 1$ или $v_n = 1$. Если $u_n = 1$, то $[u_n, t^{-3} v_n t^3] = 1$, если же $v_n = 1$, то $[u_n, t^{-3} v_n t^3] = [u_n, 1] = 1$. Предложение доказано.

Напомним, что любой элемент $g \in G$ может быть записан в приведенной форме:

$$g = g_0 t^{\varepsilon_0} \dots g_{n-1} t^{\varepsilon_{n-1}} g_n,$$

где $g_i \in A$, $\varepsilon_i = \pm 1$ и, если $\varepsilon_{i-1} = -1$, $\varepsilon_i = 1$, то $g_i \notin H$, если же $\varepsilon_{i-1} = 1$, $\varepsilon_i = -1$, то $g_i \notin K$. Лемма Бриттона (см., например, [2, с. 249]) утверждает, что любой элемент, обладающий приведенной записью, в которой есть хотя бы одна буква t или t^{-1}, отличен от единицы в группе G. Отсюда следует, что хотя один и тот же элемент может иметь различные приведенные записи, однако число вхождений букв t и t^{-1} во всех них одинаково. Оно называется длиной элемента g.

Предложение 4. Пусть выполняются следующие условия:
1) $a \notin H$, если $\varepsilon = 1$, и $a \notin K$, если $\varepsilon = -1$;
2) $b \notin H$, если $\delta = 1$, и $b \notin K$, если $\delta = -1$;
3) $c, d \notin H \cup K$.
Тогда для любого $n > 1$:
1) элемент u_n имеет приведенную запись длины 2^n вида
$$u_n = (t^{-\varepsilon}at^{\varepsilon})^{-1}c^{-1} \ldots (t^{-\varepsilon}at^{\varepsilon})c;$$
2) элемент v_n имеет приведенную запись длины 2^n вида
$$v_n = (t^{-\delta}bt^{\delta})^{-1}d^{-1} \ldots (t^{-\delta}bt^{\delta})d;$$
3) элемент w_n отличен от 1.

Доказательство. Проверим, что имеет место утверждение 1, воспользовавшись для этого индукцией по n. База индукции очевидна, поэтому, предполагая справедливость равенства при n, покажем, что оно верно и при $n+1$.

Пусть $u_n = (t^{-\varepsilon}at^{\varepsilon})^{-1}c^{-1} \ldots (t^{-\varepsilon}at^{\varepsilon})c$. Тогда
$$\begin{aligned}u_{n+1} &= \\ &= (t^{-\varepsilon}at^{\varepsilon})^{-1}u_n^{-1}(t^{-\varepsilon}at^{\varepsilon})u_n = \\ &= (t^{-\varepsilon}at^{\varepsilon})^{-1}\big(c^{-1}(t^{-\varepsilon}at^{\varepsilon})^{-1} \ldots c(t^{-\varepsilon}at^{\varepsilon})\big) \times \\ &\qquad \times (t^{-\varepsilon}at^{\varepsilon})((t^{-\varepsilon}at^{\varepsilon})^{-1}c^{-1} \ldots (t^{-\varepsilon}at^{\varepsilon})c) = \\ &= (t^{-\varepsilon}at^{\varepsilon})^{-1}c^{-1}(t^{-\varepsilon}at^{\varepsilon})^{-1} \ldots c(t^{-\varepsilon}at^{\varepsilon})c^{-1} \ldots (t^{-\varepsilon}at^{\varepsilon})c.\end{aligned}$$
Так как выражения
$$(t^{-\varepsilon}at^{\varepsilon})u_n = c^{-1} \ldots (t^{-\varepsilon}at^{\varepsilon})c$$
и
$$u_n^{-1} = c^{-1}(t^{-\varepsilon}at^{\varepsilon})^{-1} \ldots c(t^{-\varepsilon}at^{\varepsilon})$$
приведены по индуктивному предположению, следовательно, все выражение приведено. И поэтому приведенная запись элемента u_{n+1} имеет длину
$$2 + 2 + 2^n + 2^n - 4 = 2^{n+1}.$$

Утверждение 2 проверяется аналогично. Докажем утверждение 3.
$$\begin{aligned}w_n &= \\ &= u_n^{-1}t^{-3}v_n^{-1}t^3u_nt^{-3}v_nt^3 = \\ &= ((t^{-\varepsilon}at^{\varepsilon})^{-1}c^{-1} \ldots (t^{-\varepsilon}at^{\varepsilon})c)^{-1}t^{-3}((t^{-\delta}bt^{\delta})^{-1}d^{-1} \ldots (t^{-\delta}bt^{\delta})d)^{-1}t^3 \times \\ &\qquad \times ((t^{-\varepsilon}at^{\varepsilon})^{-1}c^{-1} \ldots (t^{-\varepsilon}at^{\varepsilon})c)t^{-3}\big((t^{-\delta}bt^{\delta})^{-1}d^{-1} \ldots (t^{-\delta}bt^{\delta})d\big)t^3 = \\ &= \big(c^{-1}(t^{-\varepsilon}at^{\varepsilon})^{-1} \ldots c(t^{-\varepsilon}at^{\varepsilon})\big)t^{-3}\big(d^{-1}(t^{-\delta}bt^{\delta})^{-1} \ldots dt^{-\delta}bt^{\delta}\big)t^3 \times \\ &\qquad \times ((t^{-\varepsilon}at^{\varepsilon})^{-1}c^{-1} \ldots (t^{-\varepsilon}at^{\varepsilon})c)t^{-3}\big((t^{-\delta}bt^{\delta})^{-1}d^{-1} \ldots \big(t^{-\delta}bt^{\delta}\big)d\big)t^3 = \\ &= c^{-1}(t^{-\varepsilon}at^{\varepsilon})^{-1} \ldots ct^{-\varepsilon}at^{\varepsilon-3}d^{-1}(t^{-\delta}bt^{\delta})^{-1} \ldots dt^{-\delta}bt^{\delta+3-\varepsilon} \times \\ &\qquad \times a^{-1}t^{\varepsilon}c^{-1} \ldots (t^{-\varepsilon}at^{\varepsilon})ct^{-3-\delta}b^{-1}t^{\delta}d^{-1} \ldots (t^{-\delta}bt^{\delta})dt^3.\end{aligned}$$
Так как $\varepsilon - 3 < 0$, то при $\varepsilon = 1$ выражение $t^{-\varepsilon}at^{3-\varepsilon}$ приведено. Если же $\varepsilon = -1$, то $a \notin K$ и произведение $t^{-\varepsilon}at^{3-\varepsilon}$ также приведено. Аналогично проверяется приведенность выражений $t^{\delta+3-\varepsilon}a^{-1}t^{\varepsilon}$,$t^{-\delta}bt^{\delta+3-\varepsilon}$ и $t^{-3-\delta}b^{-1}t^{\delta}$. Здесь всегда $\delta + 3 - \varepsilon > 0$ и $-3 - \delta < 0$.

Поскольку $c, d \notin H \cup K$, при любых значениях степеней t, которые их окружают, t-редукция невозможна. Таким образом, элемент w_n имеет приведенную запись ненулевой длины и, следовательно, отличен от 1.

3. Доказательство теоремы 2

Приводимое далее рассуждение следует идеям работы [1].

Если подгруппа H изолирована в группе A, то доказывать нечего. Поэтому далее будем, считать, что H не является изолированной в A. Следовательно, существует элемент $a \in A \backslash H$ и простое число p такие, что $a^p \in H$. Покажем, что H — p'-изолированная подгруппа группы A.

Предположим противное. Тогда найдутся простое число $q \neq p$ и элемент $b \in A \backslash H$ такие, что $b^q \in H$. Возьмем $c, d \in A \backslash (H \cup K)$ и положим $\varepsilon = \delta = 1$. Тогда по предложению 4 элемент w_n отличен от 1 для всех $n > 1$.

Обозначим через B подгруппу группы G, порожденную элементами a, b, c, d, t.

Будем далее считать, что n — фиксированное число, большее ступени нильпотентности группы A. По предложению 1 существует гомоморфизм σ группы B на конечную группу P порядка s^m, где s — некоторое простое число, $m \geq 1$, переводящий w_n в отличный от 1 элемент. Тогда хотя бы одно из чисел p или q не делит порядок группы P.

Отсюда и из предложения 2 следует, что $a\sigma = (a\sigma)^{pk}$ или $b\sigma = (b\sigma)^{ql}$ для подходящих целых чисел k и l. Положим $a' = a^{pk}$, если $a\sigma = (a\sigma)^{pk}$, и $a' = a$ в противном случае. Аналогично определим элемент b': если $b\sigma = (b\sigma)^{ql}$, то $b' = b^{ql}$, иначе $b' = b$. Положим также $c' = c$, $d' = d$, $\varepsilon' = \varepsilon$, $\delta' = \delta$ и определим элементы u_n', v_n' и w_n' согласно формулам, аналогичным приведенным перед предложением 3. Тогда $w_n'\sigma = w_n\sigma \neq 1$. Но $a^p, b^q \in H$ и по предложению 3 $w_n' = 1$, следовательно, $w_n'\sigma = 1$. Таким образом, получили противоречие, и подгруппа H p'-изолирована в группе A.

Покажем, что K — p'-изолированная подгруппа группы A. Допустим противное. Тогда найдутся простое число $r \neq p$ и элемент $b \in A \backslash K$ такие, что $b^r \in K$. Снова возьмем элементы $c, d \in A \backslash (H \cup K)$ и положим $\varepsilon = 1$, $\delta = -1$.

Рассуждая, как и выше (с точностью до замены q на r), мы получаем, что при n, большем ступени нильпотентности группы A, элемент w_n отличен от 1, но переходит в 1 при каждом гомоморфизме подгруппы

$$B = sgp\{a, b, c, d, t\}$$

на группу примарного порядка, что противоречит предложению 1.

Таким образом, подгруппа K также является p'-изолированной в группе A. Теорема доказана.

Библиографический список

1. *Азаров Д. Н., Иванова Е. А.* К вопросу о нильпотентной аппроксимируемости свободного произведения с объединением локально нильпотентных групп // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. Вып. 2 (1999). С. 5—7.
2. *Линдон Р., Шупп П.* Комбинаторная теория групп. М. : Мир, 1980.
3. *Холл Ф.* Нильпотентные группы // Математика. Период. сб. перев. иностр. ст. 1968. Т 12, № 1. С. 3—36.
4. *Gruenberg K. W.* Residual properties of infinite soluble groups // Proc. Lond. Math. Soc. 1957. V. 7. P. 29—62.