УДК 517.55

Л. Н. Кусковский

ОБ ОДНОМ ВИДЕ ГИПЕРКОМПЛЕКСНЫХ ФУНКЦИЙ, МОНОГЕННЫХ ПО НЕСКОЛЬКИМ ФУНКЦИЯМ В ПРОСТРАНСТВЕ $\mathbb{C}^n$

Вводится понятие гиперкомплексной функции, моногенной по нескольким функциям в поликруге n-мерного комплексного пространства $\mathbb{C}^n$. Получены интегральные представления, разложение в ряд Тейлора. Приводится решение переопределенной системы, являющейся обобщением переопределенной системы Коши — Римана из теории функций нескольких комплексных переменных.

Ключевые слова: теория функций в поликруге, моногенность по нескольким функциям, система Коши — Римана.

The notion of hypercomplex function, which is monogenic in several functions, are introduced in a polydisc the n-dimensional complex space $\mathbb{C}^n$. The integral representations, Taylor series expansions for this function are obtained. We found a solution to the overdetermined system, which is a generalization of the overdetermined Cauchy — Riemann system from the theory of functions of several complex variables.

Key words: function theory in polydisc, monogeneity in the several functions, Cauchy — Riemann system.

1. Предварительные сведения

Мы изложим основные обозначения и определения, которыми будем пользоваться.

$\mathbb{C}$ — поле комплексных чисел.

$\mathbb{C}^n$ — декартово произведение n (n — натуральное число) экземпляров $\mathbb{C}$, т. е. $\mathbb{C}^n$ представляет собой n-мерное векторное пространство над $\mathbb{C}$ со стандартным ортонормированным базисом $e_1, e_2, \ldots, e_n$, где e_k — упорядоченный набор n чисел с 1 на k-м месте и с 0 на всех остальных местах.

Точками $\mathbb{C}^n$ являются упорядоченные наборы n независимых комплексных чисел $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$, где $z_j = x_j + iy_j \in \mathbb{C}$, $i^2 = -1$.

Каждая точка $z \in \mathbb{C}^n$ является также точкой пространства $\mathbb{R}^{2n}$, т. е.

$$z = (x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n).$$

$G = G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n \subset \mathbb{C}^n$, где G_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) — плоская область, лежащая в области изменения комплексной переменной $z_k = x_k + iy_k$, будем называть *полицилиндрической областью.*

$\partial_0 G = \partial G_1 \times \partial G_2 \times \ldots \times \partial G_n$, где ∂G_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) — граница области G_k, называется *остовом* области G.

Если все области G_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) *круги*, то область G будем называть *поликругом.*

Таким образом, если $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ — фиксированная точка и $r = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$, где $r_k > 0$ — целые числа, то множество

$$G(a; r) = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_k - a_k| < r_k,\ k = 1, \ldots, n\}$$

называется *открытым поликругом* с центром в точке $a \in \mathbb{C}^n$ и радиусами r_k.

A — ассоциативная и коммутативная алгебра с единицей конечного ранга над полем $\mathbb{C}$.

Ω — конечная область комплексной плоскости $z = x + iy$ с кусочно гладкой границей $\partial\Omega$.

$\mathbb{C}^k(\Omega)$ — пространство комплекснозначных функций в Ω, обладающих непрерывными частными производными до порядка k включительно, $0 \le k < \infty$.

$\mathbb{C}_0^k(G)$ — множество функций из $\mathbb{C}^k(G)$, равных нулю вне некоторого компактного подмножества в G.

$\mathbb{C}^k(G, A)$ — множество всех отображений $f\colon G \to A$ таких, что для любого непрерывного линейного функционала L на A мы имеем $L \circ f \in \mathbb{C}^k(G)$.

Пусть $p_j(z_j)$ и $q_j(z_j) \in \mathbb{C}^1(G_j, A)$, $j = 1, \ldots, n$, $z_j = x_j + iy_j \in G_j$.

Введем операторы дифференцирования $\partial/\partial p_j$, $\partial/\partial q_j$:

$$\delta_j \frac{\partial}{\partial p_j} = 2i\left(\frac{\partial q_j}{\partial z_j}\frac{\partial}{\partial \overline{z_j}} - \frac{\partial q_j}{\partial \overline{z_j}}\frac{\partial}{\partial z_j}\right), \tag{1.1}$$

$$\delta_j \frac{\partial}{\partial q_j} = -2i\left(\frac{\partial p_j}{\partial z_j}\frac{\partial}{\partial \overline{z_j}} - \frac{\partial p_j}{\partial \overline{z_j}}\frac{\partial}{\partial z_j}\right), \tag{1.2}$$

где $\partial/\partial z_j$ и $\partial/\partial \overline{z_j}$ — известные из комплексного анализа операторы дифференцирования (формальные производные):

$$\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z_j}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\frac{\partial}{\partial y_j}\right). \tag{1.3}$$

Отсюда имеем

$$\frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial z_j} + \frac{\partial}{\partial \overline{z_j}}, \quad \frac{\partial}{\partial y_j} = i\left(\frac{\partial}{\partial z_j} - \frac{\partial}{\partial \overline{z_j}}\right).$$

В (1.1) и (1.2) δ_j имеет вид

$$\delta_j = -2i\left(\frac{\partial p_j}{\partial z_j}\frac{\partial q_j}{\partial \overline{z_j}} - \frac{\partial p_j}{\partial \overline{z_j}}\frac{\partial q_j}{\partial z_j}\right). \tag{1.4}$$

Здесь и в дальнейшем мы всегда считаем, что элемент δ_j^{-1}, обратный к элементу $\delta_j \in A$, существует в каждой точке области G_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$.

Пусть $f(z) \in \mathbb{C}^1(G, A)$, $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in G$. Имея [8, с. 41] для дифференциала df, в обозначениях (1.3), представление

$$df = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_j} dz_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \overline{z_j}} d\overline{z_j} = \partial f + \overline{\partial} f, \tag{1.5}$$

где $\partial f = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_j} dz_j$ — дифференциальная форма типа $(1, 0)$,

$\overline{\partial} f = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial \overline{z_j}} d\overline{z_j}$ — дифференциальная форма типа $(0, 1)$, нетрудно сосчитать, что в обозначениях (1.1), (1.2) и (1.4) представление (1.5) примет вид

$$df = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial p_j} dp_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_j} dq_j = \partial_p f + \partial_q f, \tag{1.6}$$

где $\partial_p f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial p_j} dp_j$, $\partial_q f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_j} dq_j$ — дифференциальные формы 1-го порядка.

Определение 1.1. [8, с. 42]. *Функция $f \in \mathbb{C}^1(G)$ (см. (1.5)) называется голоморфной в области $G \subset \mathbb{C}^n$, если в каждой точке $z \in G$ выполняются уравнения Коши — Римана, т. е. $\partial f/\partial \overline{z_j} = 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$.*

Определение 1.2. *Функция $u(z) = \sum_{k=1}^{n} u^k(z) e_k \in \mathbb{C}(G, A)$, где $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — база алгебры A, $u^k(z)$ — комплекснозначные функции от $z \in G$, называется непрерывной (дифференцируемой, голоморфной и т. п.) в области G, если каждая компонента $u^k(z)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ непрерывна (дифференцируема, голоморфна и т. п.) в области G.*

$$\|u\|_A = \sum_k \frac{sup|u^k(z)|}{z \in G} \text{ — норма в алгебре } A. \tag{1.7}$$

Обозначим [5] через $\mathbb{C}_q(G, A)$ $(\mathbb{C}_p(G, A))$ — пространство функций $f \in \mathbb{C}(\overline{G}, A)$, для которых операция

$$\frac{\partial f}{\partial q_j} = - \lim_{\partial G_j \to z_j} \frac{\delta_j^{-1}}{mesG_j} \int_{\partial G_j} f(\zeta) d_{\zeta_j} p_j$$
$$\left(\frac{\partial f}{\partial p_j} = \lim_{\partial G_j \to z_j} \frac{\delta_j^{-1}}{mesG_j} \int_{\partial G_j} f(\zeta) d_{\zeta_j} q_j \right), \tag{1.8}$$
$$j = 1, \ldots, n,$$

где $\zeta_j = \xi_j + i\eta_j$, $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n) \in \partial_0 G$, приводит к непрерывной функции.

Определение 1.3. *Функцию $f \in \mathbb{C}(\overline{G}, A)$ будем называть моногенной по функциям $p_j(q_j) \in \mathbb{C}^1(G_j, A)$ $(j = 1, \ldots, n)$ в G, если в каждой точке $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in G$ выполняются условия $\partial f/\partial q_j = 0$ $(\partial f/\partial p_j = 0)$.*

Производные $\partial f/\partial q_j$, $\partial f/\partial p_j$ в определении (1.3) понимаем в смысле (1.8). Если же $f \in \mathbb{C}^1(\overline{G}, A)$, то производные, определяемые по формулам (1.1), (1.2) и (1.8), совпадают. В этом случае функцию f будем называть [7] F-моногенной по функциям p_j (q_j).

Замечание 1.1. В конечной области $\Omega \subset \mathbb{C}$ комплексной плоскости $z = x + iy$ рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial \overline{z}} - \frac{\partial p}{\partial \overline{z}}\frac{\partial w}{\partial z} = 0, \tag{1.9}$$

где $p, w \in \mathbb{C}^1(\Omega, A)$.

По определению (1.3) (см. (1.2)) решение $w \in \mathbb{C}^1(\Omega, A)$ уравнения (1.9) является F-моногенной функцией по функции p в Ω.

Для комплекснозначных функций $p, w \in \mathbb{C}^1(\Omega)$ представим (1.9) в виде

$$\frac{\partial w}{\partial \overline{z}} - \mu(z)\frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

где $\mu(z) = (\partial p/\partial z)^{-1}(\partial p/\partial \overline{z})$.

Если $|\mu(z)| \leqslant \gamma < 1$, то имеем уравнение Бельтрами [1, с. 80; 2, с. 109], решение w которого осуществляет квазиконформное отображение плоских областей. В уравнении (1.9) элемент $(\partial p/\partial z)^{-1}$, обратный к элементу $\partial p/\partial z$, вообще не обязан существовать.

2. Интегральные формулы Коши

Пусть в области G_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ функции $p_j \in \mathbb{C}^1(\overline{G_j}, A)$ удовлетворяют условиям

$$4\frac{\partial p_j}{\partial z_j}\frac{\partial p_j}{\partial \overline{z_j}} = 0, \tag{I}$$

$$[(\partial/\partial z_j + \partial/\partial \overline{z_j})\, p_j]^{-1} \text{ существует в каждой точке } z_j \in G_j. \tag{II}$$

Здесь условия (I), (II) представляют собой соответствующие условия из [5], записанные в обозначениях (1.3).

Теорема 2.1. *Пусть*: 1) G *— открытый поликруг в* $\mathbb{C}^n$; 2) *функции* $p_j \in \mathbb{C}^1(G_j, A)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ *удовлетворяют в области* $\overline{G_j}$ *условиям* (I), (II); 3) $f \in \mathbb{C}_q(\overline{G}, A)$ *и моногенна по каждой функции* p_j*, когда другие* p_k $(k \neq j)$ *фиксированы в* G*. Тогда в каждой точке* $(z_1, \ldots, z_n) = z \in G$

$$F(z) = f(z)\prod_{j=1}^{n}\frac{\partial p_j}{\partial z_j} = \frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{\partial_0 G}\frac{f(\zeta)\prod_{j=1}^{n}\frac{\partial p_j}{\partial \zeta_j}}{\zeta - z}d\zeta, \tag{2.1}$$

где $\zeta - z = (\zeta_1 - z_1)\ldots(\zeta_n - z_n)$, $d\zeta = d\zeta_1 \wedge \ldots \wedge d\zeta_n$, $(\zeta, z) \in \partial_0 G \times G$.

Доказательство. Согласно [5] и условий теоремы следует, что функция f является F-моногенной по каждой функции p_j при фиксированных p_k $(k \neq j)$ в G. Отсюда и [5] нетрудно убедиться, что функции $f(\partial p_j/\partial z_j)$ голоморфны от z_j в области G_j, откуда функция $F(z) = f(z)\prod_{j=1}^{n}(\partial p_j/\partial z_j)$ голоморфна от z в G. Теперь представление (2.1) следует из теории функций нескольких комплексных переменных (см., напр.: [8, с. 46; 9, с. 28]). Теорема доказана.

Замечание 2.1. В полученном представлении выразить $f(z)$ нельзя, так как элементы $(\partial p_j/\partial z_j)^{-1}$, обратные к элементам $\partial p_j/\partial z_j$ в G_j, $(j = 1, \ldots, n)$ не обязаны существовать.

Пусть $p(x, y) \in \mathbb{C}^1(\overline{\Omega}, A)$ удовлетворяет в области $\Omega \subset \mathbb{C}$ условиям (I), (II). Обозначив $\lambda = (\partial p/\partial x)^{-1}\partial p/\partial y$, получим [5], что $\lambda = const \in A$, $\lambda^2 = -1$. Введем элементы алгебры A

$$e = (1/2)(1 - i\lambda), \quad \overline{e} = (1/2)(1 + i\lambda). \tag{2.2}$$

Непосредственно доказывается, что элементы $e, \overline{e} \in A$ являются ортогональными идемпотентами, т. е.

$$e^2 = e, \quad \overline{e}^2 = \overline{e}, \quad e\overline{e} = 0, \quad e + \overline{e} = 1, \quad e - \overline{e} = i\lambda. \tag{2.3}$$

Теперь в силу (2.3) и теоремы 4.2 из [5] сразу следует

Теорема 2.2. *Пусть*: 1) *функция* $p(x, y) \in \mathbb{C}^1(\overline{\Omega}, A)$ *в области* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *удовлетворяет условиям* (I), (II); 2) $f \in \mathbb{C}_q(\Omega, A)$ *и моногенна по* p *в* Ω. *Тогда в каждой точке* $(x, y) = z \in \Omega$

$$f(x, y) = f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} f(\zeta) \left[\frac{d\zeta}{\zeta - z} e - \frac{d\overline{\zeta}}{\overline{\zeta} - \overline{z}} \overline{e} \right], \tag{2.4}$$

где $z = x + iy$, $\zeta = \xi + i\eta$, $(\zeta, z) \in \partial\Omega \times \Omega$.

Имея (см. (2.2))

$$e_j = 2^{-1}(1 - i\lambda_j), \quad \overline{e_j} = 2^{-1}(1 + i\lambda_j), \quad \lambda_j = \left(\frac{\partial p_j}{\partial x_j} \right)^{-1} \cdot \frac{\partial p_j}{\partial y_j} \tag{2.5}$$
$$(j = 1, \ldots, n)$$

и теорему 2.2, так же как в многомерном комплексном анализе (см., напр.: [9, с. 29; 11, с. 9]), доказываем следующую теорему.

Теорема 2.3. *Пусть*: 1) G — *открытый поликруг в* $\mathbb{C}^n$; 2) *функции* $p_j \in \mathbb{C}^1(\overline{G_j}, A)$ *удовлетворяют в области* $\overline{G_j}$ $(j = 1, \ldots, n)$ *условиям* (I), (II); 3) $f \in \mathbb{C}_q(\overline{G}, A)$ *и моногенна по каждой функции* p_j, *когда другие* p_k $(k \neq j)$ *фиксированы. Тогда в каждой точке* $(z_1, \ldots, z_n) = z \in G$

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\partial_0 G} f(\zeta)(\Omega_1 \wedge \Omega_2 \wedge \ldots \wedge \Omega_n), \tag{2.6}$$

где Ω_j $(j = 1, \ldots, n)$ — *дифференциальные формы, с коэффициентами из* A

$$\Omega_j = \Omega_j(\zeta_j, \overline{\zeta_j}; z_j, \overline{z_j}) = \frac{d\zeta_j}{\zeta_j - z_j} e_j - \frac{d\overline{\zeta_j}}{\overline{\zeta_j} - \overline{z_j}} \overline{e}_j,$$

e_j *и* $\overline{e_j}$ *имеют вид* (2.5), *произведения* Ω_j *осуществляются следующим способом: элементы* e_j *и* $\overline{e_j}$ *перемножаются по закону алгебры* A, *остальные выражения — внешним образом* [4, с. 36].

Ясно, что самый простой вид формула (2.6) примет в случае $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = \lambda$. Действительно, учитывая (2.3), получим

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\partial_0 G} f(\zeta) \left[\frac{d\zeta}{\zeta - z} e - \frac{d\overline{\zeta}}{\overline{\zeta} - \overline{z}} \overline{e} \right] = F_1(z) + F_2(\overline{z}), \tag{2.7}$$

где

$$\zeta - z = (\zeta_1 - z_1) \ldots (\zeta_n - z_n), \quad \overline{\zeta} - \overline{z} = (\overline{\zeta_1} - \overline{z_1}) \ldots (\overline{\zeta_n} - \overline{z_n}),$$
$$d\zeta = d\zeta_1 \wedge d\zeta_2 \wedge \ldots \wedge d\zeta_n, \quad d\overline{\zeta} = d\overline{\zeta_1} \wedge d\overline{\zeta_2} \wedge \ldots \wedge d\overline{\zeta_n},$$
$$F_1(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\partial_0 G} f(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - z} e$$

голоморфна от $z = (z_1, \ldots, z_n)$ в G,

$$F_2(z) = \frac{-1}{(2\pi i)^n} \int_{\partial_0 G} f(\zeta) \frac{d\overline{\zeta}}{\overline{\zeta} - \overline{z}} \overline{e}$$

антиголоморфна от z в G.

Представим еще две теоремы из комплексного анализа, которые можно известным способом перефразировать для функции, моногенной по нескольким функциям в поликруге $G \subset \mathbb{C}^n$.

Теорема 2.4. *Пусть K — компакт в $\mathbb{C}$ с замкнутой ориентированной границей ∂K и со связным дополнением $K^{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \setminus K$. Пусть функция φ непрерывна на K и голоморфна в каждой внутренней точке K. Тогда функция*

$$w(x,y) = w(z) = \iint_K \varphi(x+\xi, y+\eta)\, d\xi\, d\eta \tag{2.8}$$

голоморфна от z в K.

Доказательство. Из условия теоремы [3, с. 109] следует, что существует последовательность $P_n = P_n(x+\xi, y+\eta)$ многочленов, равномерно сходящаяся на каждом компактном подмножестве в $\mathbb{C}$ к функции $\varphi = \varphi(x+\xi, y+\eta)$. Обозначим через

$$w_n(x,y) = \iint_K P_n(x+\xi, y+\eta)\, d\xi\, d\eta, \quad (x,y) \in K.$$

Согласно формуле Грина имеем

$$\frac{\partial}{\partial x} w_n(x,y) = \iint_K \frac{\partial}{d\xi} P_n\, d\xi\, d\eta = \int_{\partial K} P_n\, d\eta.$$

Отсюда

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial}{\partial x} w_n(x,y)\, dx = w_n(x,y) - w_n(x_0,y) = \int_{x_0}^{x} \left(\int_{\partial K} P_n\, d\eta \right) dx.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получим

$$w(x,y) - w(x_0,y) = \int_{x_0}^{x} \left(\int_{\partial K} \varphi\, d\eta \right) dx,$$

$x_0 \in K$ — фиксированная точка.

Из последней формулы сразу следует, что

$$\frac{\partial}{\partial x} w(x,y) = \int_{\partial K} \varphi\, d\eta = -i \int_{\partial K} \varphi i\, d\eta \quad (i^2 = -1). \tag{2.9}$$

Рассуждая аналогично, получим

$$\frac{\partial}{\partial y} w(x,y) = -\int_{\partial K} \varphi\, d\xi. \tag{2.10}$$

Из (2.9) и (2.10) имеем

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) w(x,y) = \frac{1}{2i} \int_{\partial K} \varphi(x+\xi, y+\eta)\, d\zeta, \tag{2.11}$$
$$\zeta = \xi + i\eta.$$

Поскольку интеграл справа в (2.11) по теореме Коши равен нулю, теорема доказана.

В силу теоремы 2.4 обычным способом (см., напр.: [10, с. 10—12; 11, с. 8—10]) доказывается

Теорема 2.5 (Вейерштрасс). *Пусть*: 1) G *— открытый поликруг в* $\mathbb{C}^n$; 2) K *— компакт в* G *со связным дополнением* $G\setminus K$; 3) *функция* φ *непрерывна на* K *и голоморфна в каждой внутренней точке* K*. Тогда функция*

$$w(x,y)=w(z)=\int_K \varphi(x_1+\xi_1,\,y_1+\eta_1,\,\ldots,\,x_n+\xi_n,\,y_n+\eta_n)\,d\mu(\zeta),$$

где $x=(x_1,\,\ldots,\,x_n)$, $y=(y_1,\,\ldots,\,y_n)$, $z=(z_1,\,\ldots,\,z_n)$, $z_k=x_k+iy_k$ $(k=1,\,\ldots,\,n)$, $\xi=(\xi_1,\,\ldots,\,\xi_n)$, $\eta=(\eta_1,\,\ldots,\,\eta_n)$, $\zeta=\xi+i\eta$, $\mu(\zeta)$ *— мера на* K*, голоморфна от* z *в* K*.*

3. Ряд Тейлора

Определение 3.1. *Функцию* $f\in\mathbb{C}(G,A)$ *будем называть аналитической от функции* $\varphi\in\mathbb{C}(G,A)$ *в области* $G\subset\mathbb{C}^n$*, если для любой точки* $z^0=(z_1^0,\,\ldots,\,z_n^0)\in G$ *существует открытый поликруг* $U(z^0;r)$ *с центром в точке* z^0*, в котором она является суммой абсолютно и равномерно сходящегося ряда*

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(\varphi(z)-\varphi(z^0))^k,$$

где c_k *— постоянные элементы алгебры* A*,* $z=(z_1,\,\ldots,\,z_n)\in U(z^0;r)$*.*

Под абсолютной и равномерной сходимостью ряда понимается сходимость ряда из норм (1.7) элементов ряда.

Теорема 3.1. *Пусть*: 1) G *— открытый поликруг в* $\mathbb{C}^n$; 2) *функция* $f\in\mathbb{C}_q(\overline{G},A)$ *и моногенна по каждой функции* $p_j\in\mathbb{C}^1(\overline{G_j},A)$*, когда другие* p_k $(k\neq j)$ *фиксированы*; 3) *функции* p_j $(j=1,\,\ldots,\,n)$ *таковы, что имеет место интегральная формула* (2.7)*. Тогда* f *— функция, аналитическая от функции* $\varphi(z)=\frac{z+\overline{z}}{2}+\lambda\frac{z-\overline{z}}{2i}$ *в области* G*.*

Доказательство. Из результатов комплексного анализа (см., напр.: [9, с. 30; 11, с. 10]), примененных к представлению (2.7), следует, что

$$f(z)=\left(\sum_{|k|=0}^{\infty}a_k(z-z^0)^k\right)e+\left(\sum_{|k|=0}^{\infty}\overline{a_k}(\overline{z}-\overline{z^0})^k\right)\overline{e}, \tag{3.1}$$

где $a_k,\overline{a_k}\in A$ вычисляются по известным формулам

$$a_k=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{\partial_0 G}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z^0)^{k+1}},\quad \overline{a_k}=-\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{\partial_0 G}\frac{f(\zeta)\,d\overline{\zeta}}{(\overline{\zeta}-\overline{z^0})^{k+1}}, \tag{3.2}$$

где $k=(k_1,\,\ldots,\,k_n)$ — мультииндекс, т. е. $k_j\geqslant 0$ целые числа, $|k|=k_1+{}$ $+\ldots+k_n$, $k+1=(k_1+1,\,\ldots,\,k_n+1)$, $z^k=z_1^{k_1}\ldots z_n^{k_n}$, причем каждый из рядов в (3.1) абсолютно и равномерно сходится на любом компактном подмножестве поликруга G и представление $f(z)$ рядом (3.1) единственно.

В силу свойств элементов $e, \overline{e} \in A$ (2.3), функцию $f(z)$ (3.1) можно преобразовать к виду

$$f(z) = \sum_{|k|=0}^{\infty} (a_k e + \overline{a_k e}) \left[\big(z - z^0\big)e + \big(\overline{z} - \overline{z^0}\big)\overline{e} \right]^k. \tag{3.3}$$

Теперь, согласно (2.2), преобразуем каждый сомножитель справа в (3.3). Имеем

$$a_k e + \overline{a_k e} = \frac{a_k + \overline{a_k}}{2} + \lambda \frac{a_k - \overline{a_k}}{2i} = c_k,$$
$$(z - z^0)e + (\overline{z} - \overline{z^0})\overline{e} = \tag{3.4}$$
$$= \left(\frac{z + \overline{z}}{2} + \lambda \frac{z - \overline{z}}{2i} \right) - \left(\frac{z^0 + \overline{z^0}}{2} + \lambda \frac{z^0 - \overline{z^0}}{2i} \right) = \varphi(z) - \varphi(z^0).$$

Таким образом, в данных обозначениях функция $f(z)$ (3.3) примет вид

$$f(z) = \sum_{|k|=0}^{\infty} c_k \left[\varphi\big(z\big) - \varphi\big(z^0\big) \right]^k. \tag{3.5}$$

Теорема доказана.

Определение 3.2. *Степенной ряд* (3.5)*, коэффициенты которого вычисляются по формулам* (3.2)*,* (3.4)*, будем называть рядом Тейлора функции* $f \in \mathbb{C}(\overline{G}, A)$*, моногенной по функциям* $p_j \in \mathbb{C}^1(\overline{G_j}, A)$ $(j = 1, \ldots, n)$ *в поликруге* $U(z^0; r) \subset G$.

Замечание 3.1. Интегральное представление (2.7) позволяет многие результаты теории функций нескольких комплексных переменных соответствующим образом перенести на функции класса $\mathbb{C}_q$, моногенные по нескольким функциям в поликруге $G \subset \mathbb{C}^n$.

4. Обобщение переопределенной системы дифференциальных уравнений Коши — Римана в поликруге

Рассмотрим переопределенную систему дифференциальных уравнений

$$\delta_j \frac{\partial w}{\partial q_j} = f_j, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{4.1}$$

для которой выполнены условия совместности

$$\delta_k \frac{\partial f_j}{\partial q_k} - \delta_j \frac{\partial f_k}{\partial q_j} = 0, \quad j, k = 1, \ldots, n. \tag{4.2}$$

Здесь $\delta_j \in \mathbb{C}^1(G_j, A)$, $\partial w / \partial q_j$ определяются соответственно по (1.4), (1.8), $w \in \mathbb{C}_q(G, A)$ — неизвестная функция, а $f_j \in \mathbb{C}_0^k(\mathbb{C}^n, A)$ — заданные функции с компактным носителем K в поликруге

$$G = G(0; R) = \{z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_\gamma| < R_\gamma, \ \gamma = 1, \ldots, n\}.$$

Отметим, что в обозначениях (1.3) условия (4.2) имеют вид

$$-2i\left[\left(\frac{\partial p_k}{\partial z_k}\frac{\partial f_j}{\partial \overline{z_k}}+\frac{\partial p_j}{\partial z_j}\frac{\partial f_k}{\partial \overline{z_j}}\right)-\left(\frac{\partial p_j}{\partial \overline{z_j}}\frac{\partial f_k}{\partial z_j}+\frac{\partial p_k}{\partial \overline{z_k}}\frac{\partial f_j}{\partial z_k}\right)\right]=0.$$

Систему (4.1) с условиями (4.2) можно рассматривать как обобщение системы дифференциальных уравнений Коши — Римана из многомерного комплексного анализа, изученной Л. Хёрмандером [8, с. 51] (см. также: [6, с. 348—350]).

Теорема 4.1. *Пусть*: 1) G *— открытый поликруг в* $\mathbb{C}^n$ $(n>1)$; 2) $K\subset G$ *— компакт в* G *со связным дополнением* $G\setminus K$; 3) *функции* $p_j\in\mathbb{C}^1(\overline{G_j},A)$ $(j=1,\ldots,n)$ *удовлетворяют в области* G_j *условиям* (I), (II); 4) *функции* $f_j\in\mathbb{C}_0^k(\mathbb{C}^n;A)$ $(k>1)$ *удовлетворяют условиям* (4.2). *Тогда существует единственная функция* $w\in\mathbb{C}_q(\mathbb{C}^n,A)$, *удовлетворяющая уравнениям* (4.1).

Доказательство теоремы проводится следуя Хёрмандеру [8, с. 51] с использованием результатов [5].

Доказательство. Положим

$$w(z)=\frac{1}{2\pi\lambda_1}\iint f_1(\zeta_1,\,z_2,\,\ldots,\,z_n)\left(\frac{\partial p_1(\zeta_1)}{\partial\xi_1}\right)^{-1}\Omega_1(\zeta_1,\overline{\zeta_1};z_1,\overline{z_1})\,d\xi_1\wedge d\eta_1,\quad(4.3)$$

где

$$\Omega_1(\zeta_1,\overline{\zeta}_1;z_1,\overline{z_1})=\frac{1}{\zeta_1-z_1}e_1+\frac{1}{\overline{\zeta_1}-\overline{z_1}}\overline{e_1},\quad \zeta_1=\xi_1+i\eta_1,$$

e_1 и $\overline{e_1}$ имеют вид (2.5).

Согласно теореме 4.1 из [5] функция $w(z)\in\mathbb{C}_{q_1}(\mathbb{C}^n,A)$ и удовлетворяет уравнению $\delta_1(\partial w/\partial q_1)=f_1(z)$. Ясно, что если сумма $R_1+\ldots+R_n$ достаточно велика, то $w(z)=0$. Далее, для каждого $k=2,\,\ldots,\,n$, применив к обеим частям равенства (4.3) операцию $\partial/\partial q_k$, в силу условий (4.2) получим

$$\delta_k\frac{\partial w}{\partial q_k}=\frac{1}{2\pi\lambda_1}\iint\delta_k\frac{\partial f_1}{\partial q_k}\Omega_1(\zeta_1,\overline{\zeta};z_1,\overline{z_1})\left(\frac{\partial p_1(\zeta_1)}{\partial\xi_1}\right)^{-1}d\xi_1\wedge d\eta_1=$$
$$=\frac{1}{2\pi\lambda_1}\iint\frac{\partial f_k}{\partial q_1}\Omega_1(\zeta_1,\overline{\zeta_1};z_1,\overline{z_1})\left(\frac{\partial p_1(\zeta_1)}{\partial\xi_1}\right)^{-1}\delta_1(\xi_1,\eta_1)\,d\xi_1\wedge d\eta_1.$$

Поскольку $\delta_1(\xi_1,\eta_1)\,d\xi_1\wedge d\eta_1=dp_1\wedge dq_1$, в силу теоремы 4.2 статьи [5] следует, что последнее выражение справа равно $f_k(z)$. Таким образом, функция $w(z)$ (4.3) имеет компактный носитель, принадлежит классу $\mathbb{C}_q(\mathbb{C}^n,A)$ и удовлетворяет всем уравнениям системы (4.1). Единственность решения устанавливается так же, как в [6, с. 351]. Теорема доказана.

Применяя теорему 4.1, используя результаты [5] и дословно повторяя метод доказательства теоремы Хартокса [6, с. 351; 8, с. 52], получаем, что справедлива

Теорема 4.2. *Пусть выполняются условия теоремы* 4.1. *Тогда любую функцию* $g\in\mathbb{C}_q(G\setminus K)$, *моногенную по функциям* $p_j\in\mathbb{C}^1(\overline{G_j};A)$ *в* $G\setminus K$, *можно продолжить до функции, принадлежащей классу* $\mathbb{C}_q(G,A)$ *и моногенной по функциям* p_j $(j=1,\ldots,n)$ *в* G.

Библиографический список

1. *Альфорс Л.* Лекции по квазиконформным отображениям. М. : Мир, 1969. 136 с.
2. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. М. : Физматгиз, 1959. 628 с.
3. *Гайер Д.* Лекции по теории аппроксимации в комплексной области. М. : Мир, 1986. 216 с.
4. *Ганнинг Р., Росси Х.* Аналитические функции многих комплексных переменных. М. : Мир, 1969. 396 с.
5. *Кусковский Л. Н.* Обобщенные ареолярные производные и их приложения к дифференциальным уравнениям // Rev. Roum. de Math. Pures et Appl. 1986. Т. 31, № 7. P. 625—637.
6. *Рудин У.* Теория функций в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$. М. : Мир, 1984. 456 с.
7. *Фёдоров В. С.* Об одном виде гиперкомплексных моногенных функций // Математический сборник. 1960. Т. 50 (92), [вып.] 1. С. 101—108.
8. *Хёрмандер Л.* Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных. М. : Мир, 1968. 280 с.
9. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. 2-е изд. М. : Наука, 1976. Ч. 2 : Функции нескольких переменных. 400 с.
10. *Эрве М.* Функции многих комплексных переменных. М. : Мир, 1965. 166 с.
11. *Янушаускас А. И.* Аналитические и гармонические функции многих переменных. Новосибирск : Наука, Сиб. отд-ние, 1981. 182 с.

УДК 51.72

Е. К. Логинов, Д. Е. Логинов, А. С. Шерудилло

О ВЫБОРЕ ПЕРЕНОРМИРОВКИ МАССЫ ХИГГСА В СТАНДАРТНОЙ МОДЕЛИ

Исследуется эффективный потенциал Хиггса стандартной модели в 1- и 2-петлевом приближении. Находятся численные значения бегущей константы самодействия и перенормированной массы скаляра Хиггса в достаточно широком диапазоне значений. Находятся и обсуждаются условия, оптимизирующие данную процедуру перенормировки.

Ключевые слова: бозон Хиггса, перенормировка массы.

We investigate the effective Higgs potential of the standard model in one- and two-loops approximation. We find the numerical values for the Higgs quartic coupling and the Higgs mass renormalized at the different pole masses. We discuss the renormalization procedure and the boundary conditions leading to the particularly interesting features of the standard model parameters.

Key words: Higgs boson, the mass renormalisation.

Формализм эффективного потенциала [1, 5] хорошо известен. В древесном приближении эффективный потенциал Хиггса стандартной модели имеет вид

$$V_0(\phi) = -\frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4, \tag{1}$$