УДК 517.977

Б. Я. Солон

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ pm-СТЕПЕНИ

Рассматриваются степени перечислимости функций относительно самой сильной сводимости по перечислимости, так называемой pm-сводимости, введенной Ю. Л. Ершовым.

Ключевые слова: операторы перечисления, частично вычислимые операторы, pm-сводимость, функциональные pm-степени.

The article is considered the function degrees of enumerability on the very strong enumeration reducibility, the so-called pm-reducibility introduced by Yu. L. Ershov.

Key words: enumeration operators, partial recursive operators, pm-reducibility, functional pm-degrees.

Мы будем использовать понятия и терминологию, которые приняты в [3]. Пусть $\omega = \{0,\, 1,\, 2,\, \dots\}$ — множество натуральных чисел; A, B, $\dots$, X, Y (с индексами или без) — подмножества ω. Пусть, как обычно, $\langle x, y\rangle$ — канторовский номер упорядоченной пары (x, y). Пусть PF — множество одноместных частичных арифметических функций. Для данной частичной функции α обозначим через $dom(\alpha)$, $ran(\alpha)$ и $graph(\alpha) = \{\langle x, \alpha(x)\rangle : x \in dom(\alpha)\}$ область определения, множество значений и график α соответственно. Будем писать $\alpha(x){\downarrow}$, если $x \in dom(\alpha)$, и $\alpha(x){\uparrow}$ — в противном случае. Для обозначения частичных функций из PF будем использовать малые греческие буквы начала алфавита: α, β, γ, $\dots$. Мы ограничим использование символов f, g, h только для обозначения *тотальных* функций, т. е. таких, что $dom(f) = \omega$. Множество тотальных функций обозначим через TF. Если $graph(\alpha) \subseteq graph(\beta)$, то мы будем писать $\alpha \subseteq \beta$ для краткости. Множество A называется *однозначным*, если $A = graph(\alpha)$ для некоторой частичной функции α. Обозначим через SV класс всех однозначных множеств. Термин *«функциональный оператор»* мы будем использовать в случае однозначных отображений $PF \to PF$ (необязательно всюду определенных).

Пусть, как обычно, φ_z — частично вычислимая функция с гёделевым номером z и $\Phi_z(X) = \{x : (\exists u)[\langle x, u\rangle \in W_z \wedge D_u \subseteq X]\}$ — результат применения е-оператора с гёделевым номером z к множеству X. Пусть E — множество всех е-операторов. Говорят, что множество A *сводимо по перечислимости* к множеству B, и пишут $A \le_e B$, если $A = \Phi(B)$ для некоторого $\Phi \in E$.

Определение 1. Функциональный оператор Ψ называется *частично вычислимым* (ч.в.) (в терминологии Х. Роджерса — *частично рекурсивным*), если он определяется некоторым е-оператором Φ, т. е. для любых $\alpha, \beta \in PF$

$$\alpha = \Psi(\beta) \Leftrightarrow (\exists z)[graph(\alpha) = \Phi_z(graph(\beta))].$$

Определение 2. Ч.в. оператор Ψ называется *вычислимым* (в.) (в терминологии Х. Роджерса — *рекурсивным*), если он определяется таким е-оператором Φ, что функциональный оператор $\Psi\colon PF \to PF$ является всюду определенным.

Введем обозначения: PC — множество всех ч.в. операторов; C — множество всех в. операторов. Будем говорить, что α *е-сводится* (*се-сводится*) *к* β и писать $\alpha \leq_e \beta$ ($\alpha \leq_{ce} \beta$), если $\alpha = \Psi(\beta)$ для некоторого $\Psi \in PC$ ($\Psi \in C$).

Введем усиление сводимости по перечислимости, впервые рассмотренное Ю. Л. Ершовым [1].

Определение 3. Множество A *pm-сводится* к множеству B (обозначение $A \leq_{pm} B$), если существует ч.в. функция φ такая, что

$$(\forall x)[x \in A \Leftrightarrow \varphi(x)\downarrow \wedge\, \varphi(x) \in B].$$

Ясно, что $A \leq_{pm} B \Rightarrow A \leq_e B$ для любых множеств A и B. Обозначим через E_{pm} множество е-операторов, осуществляющих pm-сводимость множеств, и через PC_{pm} — множество функциональных операторов, определяемых операторами из E_{pm}. Элементы множества E_{pm} будем называть *ч.в. pm-операторами*. Итак,

$$\Phi \in E_{pm} \Leftrightarrow \exists z \forall X \forall x[x \in \Phi(X) \Leftrightarrow \varphi_z(x)\downarrow \wedge\, \varphi_z(x) \in X].$$

Легко понять, что е-оператор

$$\Phi_z(X) = \{x : (\exists u)[\langle x, u\rangle \in W_z \wedge D_u \subseteq X]\}$$

принадлежит множеству E_{pm} тогда и только тогда, когда множество W_z однозначно и

$$\forall x \forall u[\langle x, u\rangle \in W_z \Rightarrow |D_u| \leq 1].$$

Определение 4. Функция α *pm-сводится* к функции β (обозначение $\alpha \leq_{pm} \beta$), если $graph(\alpha) \leq_{pm} graph(\beta)$.

Предложение 1. *Для любых* $\alpha, \beta \in PF$

$$\alpha \leq_{pm} \beta \Leftrightarrow (\exists \Psi \in PC_{pm})[\alpha = \Psi(\beta)].$$

Доказательство следует непосредственно из определения 4.

Усиление pm-сводимости функций можно осуществить с помощью функциональных операторов из класса C_{pm}.

Определение 5. Функция α *cpm-сводится* к функции β (обозначение $\alpha \leq_{cpm} \beta$), если $\alpha = \Psi(\beta)$ для некоторого е-оператора $\Psi \in C_{pm}$, где C_{pm} — подмножество CP_{pm}, состоящее из вычислимых pm-операторов.

Чтобы доказать, что в самом деле произошло усиление pm-сводимости функций, т. е. привести пример пары функций α, β таких, что $\alpha \leq_{pm} \beta$ и $\alpha \not\leq_{cpm} \beta$, введем понятие функции, дополняемой до ч.в. функции.

Определение 6. Функция $\alpha \in PF$ называется *дополняемой до ч.в. функции*, если $\alpha \subseteq \varphi_z$ для некоторого z.

Множество дополняемых до ч.в. функций обозначим через EPF. Например, любая (частичная) функция-константа является дополняемой до ч.в. функции. В то же время существуют частичные функции, которые не дополняемы до ч.в. функций. Простейшие свойства функций из EPF приведем в следующем предложении.

Предложение 2. *Для любых $\alpha, \beta \in PF$*
(i) $[(\beta \in EPF) \wedge (\alpha \leq_{ce} \beta)] \Rightarrow \alpha \in EPF$;
(ii) $[(\alpha \in EPF) \wedge (\alpha \leq_{e} \beta)] \Rightarrow \alpha \leq_{ce} \beta$.

Доказательство.
(i) Пусть $\alpha \leq_{ce} \beta$ и Ψ — такой в. оператор, что $\alpha = \Psi(\beta)$, и φ — такая ч.в. функция, что $\beta \subseteq \varphi$. Пусть $\psi = \Psi(\varphi)$, ясно, что ψ — ч.в. функция и, в силу монотонности е-оператора Φ, определяющего Ψ, $\alpha \subseteq \psi$.
(ii) Пусть $\alpha \leq_{e} \beta$ и Φ_z — такой е-оператор, что

$$graph(\alpha) = \Phi_z(graph(\beta)),$$

и φ — такая ч.в. функция, что $\alpha \subseteq \varphi$. Определим е-оператор Υ, полагая $\Upsilon(X) = \Phi_z(X) \cap graph(\varphi)$ для любого множества X. Докажем, что $graph(\alpha) = \Upsilon(graph(\beta))$. В самом деле,

$$\Upsilon(graph(\beta)) = \Phi_z(graph(\beta)) \cap graph(\varphi) =$$
$$= graph(\alpha) \cap graph(\varphi) = graph(\alpha).$$

Так как $\Upsilon(X) \subseteq graph(\varphi)$ для любого множества X, то Υ — вычислимый (функциональный) оператор, следовательно, $\alpha \leq_{ce} \beta$.

Следствие 1. *Для любых $\alpha, \beta \in PF$*
(i) $[(\beta \in EPF) \wedge (\alpha \leq_{cpm} \beta)] \Rightarrow \alpha \in EPF$;
(ii) $[(\alpha \in EPF) \wedge (\alpha \leq_{pm} \beta)] \Rightarrow \alpha \leq_{cpm} \beta$.

Предложение 3. *Существуют $\alpha, \beta \in PF$ такие, что $\alpha \leq_{pm} \beta$ и $\alpha \not\leq_{cpm} \beta$.*

Доказательство. Пусть $f \in TF$ — произвольная невычислимая функция, тогда, очевидно, $f \notin EPF$. Обозначим через $\alpha = \chi_{graph(f)}$, где χ_A — частично характеристическая функция множества A. Ясно, что $f \leq_{pm} \alpha$. Предположим, что $f \leq_{cpm} \alpha$. Так как $\alpha = \chi_{graph(f)} \subseteq 0(x)$, где $0(x)$ — функция-константа 0, то $\alpha \in EPF$. Следствие 1 (i) в этом случае утверждает, что $f \in EPF$, а это противоречит выбору f. Предложение доказано.

Как обычно, пусть

$$\alpha \equiv_{pm} \beta \Leftrightarrow \alpha \leq_{pm} \beta \wedge \beta \leq_{pm} \alpha$$

и $deg_{pm}(\alpha) = \{\gamma : \gamma \equiv_{pm} \alpha\}$ — *функциональная pm-степень* функции α и $deg_{cpm}(\alpha) = \{\gamma : \gamma \equiv_{cpm} \alpha\}$ — *cpm-степень* функции α. Пусть L_{pm} — ч.у. множество функциональных pm-степеней и L_{cpm} — cpm-степеней. Множество $L_{pm}(\leq \mathbf{a})$, где $\mathbf{a} = deg_{pm}(\alpha)$, состоит из всех функциональных pm-степеней $\leq \mathbf{a}$.

Очевидно, что $\alpha \leq_{cpm} \beta \Rightarrow \alpha \leq_{pm} \beta$ для любых $\alpha, \beta \in PF$, следовательно, любая функциональная pm-степень состоит из некоторого ч.у. множества cpm-степеней. Обозначим через $L^{cpm}_{pm}(\mathbf{a})$ ч.у. множество cpm-степеней, содержащихся в функциональной pm-степени $\mathbf{a} = deg_e(\alpha)$. Функциональная pm-степень $\mathbf{a}$ называется *неразложимой* (на cpm-степени), если $|L_{pm}^{cpm}(\mathbf{a})| = 1$, в противном случае $\mathbf{a}$ называется *разложимой*.

Функциональная pm-степень (cpm-степень) называется *тотальной*, если она содержит некоторую тотальную функцию. Ч.у. множество тотальных функциональных pm-степеней обозначим через TL_{pm}, а тотальных cpm-степеней — через TL_{cpm}.

Предложение 4. $(\forall \alpha \in PF)(\forall f \in TF)[\alpha \leq_{pm} f \Leftrightarrow \alpha \leq_{cpm} f]$.

Доказательство. $\Leftarrow$: Очевидно, что $\alpha \leq_{cpm} f \Rightarrow \alpha \leq_{pm} f$.

$\Rightarrow$: Пусть $\alpha \leq_{pm} f$, тогда существует оператор $\Psi \in PC_{pm}$ такой, что $\alpha = \Psi(f)$. В этом случае по основной теореме об операторах [3, p. 195] существует в. оператор $\Psi' \in C$ такой, что

$$(\forall f)[f \in dom(\Psi') \cap TF \wedge \Psi'(f) = \Psi(f)].$$

Так как $\Psi'(f) = \Psi(f)$, то $\Psi' \in C_{pm}$. В частности, для нашего случая имеем

$$\alpha = \Psi'(f) = \Psi(f),$$

следовательно, $\alpha \leq_{cpm} f$. Предложение доказано.

Обозначим через $TL_{pm}(\leq \mathbf{a}) = \{\mathbf{f} : \mathbf{f} \in TF \wedge \mathbf{f} \leq \mathbf{a}\}$, частично упорядоченное отношением $\leq$. Ясно, что $TL_{pm}(\leq \mathbf{a})$ является верхней полурешеткой для любой pm-степени $\mathbf{a} = deg_{pm}(\alpha)$.

Предложение 5.

(i) *cpm-степень* $deg_{cpm}(\chi_{graph(\alpha)})$ *является наименьшим элементом ч.у. множества* $TL_{pm}(\leq \mathbf{a})$, *причем*

$$deg_{cpm}(\chi_{graph(\alpha)}) = \{\beta : \beta \in EPF \cap deg_{pm}(\alpha)\};$$

(ii) $\alpha \notin EPF \Rightarrow |L_{pm}^{cpm}(deg_{pm}(\alpha)| \geq 2$.

Доказательство.

(i) Так как $\chi_{graph(\alpha)} \in EPF$ для любой функции α, то $\chi_{graph(\alpha)} \leq_{cpm} \beta$ для любой функции $\beta \in deg_{pm}(\alpha)$. Следовательно, $deg_{cpm}(\chi_{graph(\alpha)})$ является наименьшим элементом ч.у. множества $L_{pm}^{cpm}(\alpha)$, причем

$$deg_{cpm}(\chi_{graph(\alpha)}) = \{\beta : \beta \in EPF \cap deg_{pm}(\alpha)\}$$

в силу предложения 2 (i).

(ii) Пусть $\alpha \in PF$ не является дополняемой до ч.в. функции, рассмотрим $deg_{cpm}(\alpha)$ и $deg_{cpm}(\chi_{graph(\alpha)})$ как элементы $L_{pm}^{cpm}(deg_{cpm}\alpha)$.

Из (i) следует, что $deg_{cpm}(\chi_{graph(\alpha)}) \leq deg_{cpm}(\alpha)$. Если предположить, что $deg_{cpm}(\alpha) \leq deg_{cpm}(\chi_{graph(\alpha)})$, то $deg_{cpm}(\alpha) = deg_{cpm}(\chi_{graph(\alpha)})$, а так как $deg_{cpm}(\chi_{graph(\alpha)})$ состоит только из дополняемых до ч.в. функций, то $\alpha \in EPF$. Получено противоречие, следовательно, $deg_{cpm}(\alpha) \neq deg_{cpm}(\chi_{graph(\alpha)})$ и $L_{pm}^{cpm}(deg_{cpm}(\alpha))$ состоит не менее чем из двух cpm-степеней.

Пусть $\Psi \in PC_e$ — произвольный ч.в. оператор и $n \in \omega$, определим ч.в. оператор Ψ/n, полагая $dom(\Psi/n) = dom(\Psi)$ и

$$(\forall \alpha \in dom(\Psi))[\Psi/n(\alpha)(x) = \Psi(\alpha)(\langle x, n\rangle)].$$

Приведем ряд определений из [2].

Определение 7. Ч.в. оператор Ψ называется *универсальным* (для множества PC_{pm}), если
$$PC_{pm} = \{\Psi/n : n \in \omega\}.$$

Предложение 6. *Пусть Ψ — универсальный оператор для PC_{pm}, тогда $\Psi \notin PC_{pm}$.*

Доказательство. Пусть $\Psi \in PC_{pm}$ — универсальный оператор, тогда, в частности, $dom(\Psi) = dom(\Psi')$ для любого ч.в. оператора $\Psi' \in PC_{pm}$, что невозможно.

Докажем, что C_{pm} обладает универсальным оператором Ψ, причем таким, что $\Psi \in C_{pm}$. Сначала докажем теорему, имеющую самостоятельное значение.

Теорема 1. *Существует такая в. функция $h(z)$, что для всех z*
$$\Psi_{h(z)} \in C_{pm} \wedge (\Psi_z \in C_{pm} \Rightarrow \Psi_{h(z)} = \Psi_z).$$

Доказательство. Будем говорить, что однозначное множество A обладает свойством PM (или является PM-множеством), если

1) $(\forall z, u)[\langle z, u\rangle \in A \Rightarrow |D_u| = 1]$;

2) $(\forall x, y_1, y_2, u_1, u_2)[y_1 \neq y_2 \wedge \langle\langle x, y_1\rangle, u_1\rangle \in A \wedge$
$\wedge \langle\langle x, y_2\rangle, u_2\rangle \in A \Rightarrow D_{u_1} \cup D_{u_2} \notin SV]$.

Фактически A — PM-множество тогда и только тогда, когда
$$A_1 = \{x : (\exists y)[\langle x, y\rangle \in A]\} \notin SV \Rightarrow A_2 = \{y : (\exists x)[\langle x, y\rangle \in A]\} \notin SV.$$

Отметим два свойства PM-множеств:

(i) A — PM-множество тогда и только тогда, когда любое конечное подмножество A является PM-множеством;

(ii) всякое подмножество PM-множества является PM-множеством.

Лемма. *Для любого z pm-оператор Ψ_z всюду определен (на PF) тогда и только тогда, когда W_z — в.п. PM-множество.*

Доказательство. Пусть Ψ_z — вычислимый pm-оператор и определяется e-оператором $\Phi_z(X) = \{x : \varphi_z(x)\downarrow \wedge \varphi_z(x) \in X\}$. Если предположить, что $W_z = dom(\varphi_z)$ не является PM-множеством, то существуют такая функция α и такие x, y_1, y_2, u_1, u_2, что
$$y_1 \neq y_2 \wedge \langle\langle x, y_1\rangle, u_1\rangle \in W_z \wedge \langle\langle x, y_2\rangle, u_2\rangle \in W_z \wedge D_{u_1} \cup D_{u_2} \in graph(\alpha).$$
Отсюда следует, что $\langle x, y_1\rangle$, $\langle x, y_2\rangle \in \Psi_z(\alpha)$, т. е. $\Psi_z(\alpha)$ не является функцией, что противоречит условию, что $\Psi_z \in C_{pm}$.

Докажем обратное утверждение. Пусть W_z является PM-множеством, тогда $\Psi_z(\alpha) = \tau^{-1}\Gamma_{\Phi_z}\tau(\alpha)$ является однозначным множеством для всех функций $\alpha \in PF$, а функциональный оператор $\Psi_z \in C_{pm}$. Лемма доказана.

Продолжим доказательство теоремы. Для каждого z определим в.п. множество V_z с помощью следующего алгоритма перечисления: на шаге s делаем s шагов в перечислении всех в.п. множеств W_z, $z \leq s$ и проверяем для каждого z, являются ли полученные множества W_z^s однозначными и обладают ли они свойством PM. Если да, то W_z^s зачисляем в V_z. Если нет, то для данного z множество V_z остается таким, какое было до шага s — пустым или конечным PM-множеством. В силу равномерности перечисления множеств V_z, существует такая вычислимая функция h, что $V_z = W_{h(z)}$ для всех z. Из построения следует, что $W_{h(z)}$ — PM-множество, а если W_z — PM-множество, то $W_z = W_{h(z)}$ для каждого z. Следовательно, функция h удовлетворяет условию теоремы.

Теорема 2. *C_{pm} обладает универсальным оператором Ξ, причем таким, что $\Xi \in C_{pm}$.*

Доказательство. Пусть h — функция, построенная в доказательстве теоремы 1. Определим ч.в. оператор Ξ, полагая

$$\Xi(\alpha)(\langle x, n\rangle) = \Psi_{h(n)}(\alpha)(x).$$

Из доказательства теоремы 1 следует, что $\Xi \in C_{pm}$. Кроме того, Ξ является универсальным для множества в. операторов C_{pm}. В самом деле, имеем

$$(\forall\alpha \in PF)(\forall n \in \omega)[\Psi_n \in C_{pm} \Rightarrow [\Xi/n(\alpha)(x) = \Xi(\alpha)(\langle x, n\rangle) = \\ = \Psi_{h(n)}(\alpha)(x) = \Psi_n(\alpha)(x)]].$$

Отсюда следует, что $C_{pm} = \{\Xi/n : n \in \omega\}$.

Предложение 7. *Пусть Ξ_1, $\Xi_2 \in C_{pm}$ — универсальные в. операторы для C_{pm}, тогда $\Xi_1(\alpha) \equiv_{cpm} \Xi_2(\alpha)$ для любой функции $\alpha \in PF$.*

Доказательство. Так как $\Xi_1 \in C_{pm}$ и Ξ_2 — универсальный для C_{pm}, то $\Xi_1 = \Xi_2/n_1$ для некоторого n_1. Это означает, что для любой функции $\alpha \in PF$ и любого $x \in dom(\Xi_1(\alpha))$ выполнено

$$\Xi_1(\alpha)(x) = \Xi_2/n_1(\alpha)(x) = \Xi_2(\alpha)(\langle x, n_1\rangle) = \Psi_{h(n_1)}(\Xi_2(\alpha))(x),$$

где $h(n)$ — вычислимая функция, существование которой доказано в теореме 1. Так как $\Psi_{h(n_1)} \in C_{pm}$, то по определению 5 $\Xi_1(\alpha) \leq_{cpm} \Xi_2(\alpha)$.

Сводимость $\Xi_2(\alpha) \leq_{cpm} \Xi_1(\alpha)$ доказывается аналогично.

Зафиксируем какой-либо универсальный в. оператор $\Xi \in C_{pm}$ для C_{pm}.

Определение 8. *pm-цилиндрификацией* функции $\alpha \in PF$ называется функция $\alpha^{pm} = \Xi(\alpha)$. Функция $\beta \in PF$ называется *pm-цилиндром*, если $\beta \equiv_{cpm} \Xi(\alpha)$ для некоторой $\alpha \in PF$.

Из предложения 7 следует, что определение pm-цилиндра не зависит от выбора универсального оператора.

Теорема 3. *Для любых α, $\beta \in PF$*

(i) $\alpha \leq_{cpm} \alpha^{pm}$;

(ii) $\alpha^{pm} \leq_{pm} \alpha$;

(iii) $\beta \leq_{pm} \alpha \Leftrightarrow \beta \leq_{cpm} \alpha^{pm}$;

(iv) (α – *pm-цилиндр*) $\Leftrightarrow (\forall\gamma)[\gamma \leq_{pm} \alpha \Rightarrow \gamma \leq_{cpm} \alpha]$;

(v) $\alpha \leq_{pm} \beta \Leftrightarrow \alpha^{pm} \leq_{cpm} \beta^{pm}$;

(vi) $\alpha \equiv_{pm} \beta \Leftrightarrow \alpha^{pm} \equiv_{cpm} \beta^{pm}$.

Доказательство.

(i) Пусть Υ — тождественный оператор, т. е. $\Upsilon(\alpha) = \alpha$ для всех $\alpha \in PF$. Ясно, что $\Upsilon \in C_{pm}$, поэтому $\Upsilon = \Xi/n_0$ для некоторого n_0. Обозначим через $g(x) = \langle x, n_0\rangle$, тогда для всех $x \in dom(\alpha)$ имеем

$$\alpha(x) = \Upsilon(\alpha)(x) = \Xi/n_0(\alpha)(x) = \Xi(\alpha)(\langle x, n_0\rangle) = \Xi(\alpha)(g(x)).$$

Это означает, что $\alpha \leq_{cpm} \Xi(\alpha) = \alpha^{pm}$.

(ii) Так как $\alpha^{pm} = \Xi(\alpha)$ и $\Xi \in C_{pm}$, то $\alpha^{pm} \leq_{pm} \alpha$.

(iii) Так как $\beta \leq_{pm} \alpha$, то $\beta = \Psi(\alpha)$ для некоторого $\Psi \in PC_{pm}$. Пусть $\Psi = \Xi/n_1$ для некоторого n_1 и $g(x) = \langle x, n_1\rangle$, тогда

$$\beta(x) = \Psi(\alpha)(x) = \Xi/n_1(\alpha)(x) = \Xi(\alpha)(\langle x, n_1\rangle) = \Xi(\alpha)(g(x)).$$

Это означает, что $\beta \leq_{cpm} \Xi(\alpha) = \alpha^{pm}$.

(iv) (α — pm-цилиндр) $\Leftrightarrow$ $\alpha \equiv_{cpm} \Xi(\beta)$ для некоторой $\beta \in PF$. Поэтому из (iii) следует, что

$$(\forall\gamma)[\gamma \leq_{pm} \alpha \Rightarrow \gamma \leq_{cpm} \alpha].$$

(v) Имеем из (ii), что $\alpha \leq_{pm} \beta$, тогда из (iii) $\alpha^{pm} \leq_{cpm} \beta^{pm}$.

(vi) Следует из (v).

Следующая теорема позволяет, в частности, утверждать, что если $|\,TL_{pm}(\leq \mathbf{a})| \geq 2$, то функциональная pm-степень $\mathbf{a} = deg_{pm}(\alpha)$ разложима.

Теорема 4. *Для любой pm-степени $\mathbf{a} = deg_{pm}(\alpha)$ верхняя полурешетка $TL_{pm}(\leq \mathbf{a})$ изоморфно вложима в $L^{cpm}_{pm}(\mathbf{a})$.*

Доказательство. Если α — ч.в. функция, то

$$|\,TL_{pm}(\leq \mathbf{a})| = |L^{ce}_{pm}(\mathbf{a})| = 1$$

и утверждение теоремы выполнено тривиально.

Пусть теперь α не является ч.в. функцией и $deg_{pm}(f) \in TL_e(\leq \mathbf{a})$. Определим функцию $\beta^f(\langle x, y\rangle) = f(x)$, если $y \in graph(\alpha)$, и $\beta^f(\langle x, y\rangle)\uparrow$ в противном случае. Ясно, что $\beta^f \leq_{pm} \alpha$. С другой стороны,

$$(\forall y)[y \in graph(\alpha) \Leftrightarrow (\exists x)(\exists z)[\langle\langle x, y\rangle, z\rangle \in graph(\beta^f)]],$$

поэтому $\alpha \leq_{pm} \beta^f$. Итак, если $deg_{pm}(f) \in TL_{pm}(\leq \mathbf{a})$, то $\alpha \equiv_{pm} \beta^f$ и $deg_{ce}(\beta^f) \in L^{cpm}_{pm}(\mathbf{a})$.

Определим отображение

$$\epsilon\colon\ TL_{pm}(\leq \mathbf{a}) \to L^{ce}_{pm}(\mathbf{a}),\ \text{где}\ \ \epsilon(deg_{pm}(f)) = deg_{ce}(\beta^f).$$

Пусть $f \leq_{pm} g$, в силу предложения 4 в этом случае $f \leq_{cpm} g$. Пусть Φ_n — e-оператор, определяющий pm-оператор и такой, что $graph(f) = \Phi_n(graph(g))$. Пусть z_0 — произвольный фиксированный элемент из $graph(\alpha)$. Определим два e-оператора Υ' и Υ''. При входе $\langle\langle x, z_0\rangle, u\rangle$ оператор Υ' дает выход $\langle x, u\rangle$, при входе $\langle\langle x, z\rangle, u\rangle$ при $z \neq z_0$ оператор Υ' не дает никакого выхода. Ясно, что $\Upsilon'(A) \in SV$ для любого однозначного множества A, т. е. Υ' определяет в. оператор. В частности, так как $graph(\beta^g) = \{\langle\langle x, y\rangle, g(x)\rangle : y \in graph(\alpha)\}$, то

$$\Upsilon'(graph(\beta^g)) = \{\langle x, g(x)\rangle : x \in \omega\} = graph(g).$$

Заметим, что, так как e-операторы Φ_n и Υ' определяют в. операторы, то их композиция $\Phi_n * \Upsilon'$ также определяет в. оператор. При этом

$$\Phi_n * \Upsilon'(graph(\beta^g)) = \Phi_n(graph(g)) = graph(f).$$

Работу e-оператора Υ'' определяет следующая инструкция: на входе $\langle\langle x, y\rangle, u\rangle$ оператор дает выход y. Ясно, что $\Upsilon''(graph(\beta^g)) = graph(\alpha)$.

Теперь опишем работу e-оператора Φ_m: элементы произвольного множества A одновременно подаем на входы операторов $\Phi_n * \Upsilon'$ и Υ'', число $\langle\langle x, y\rangle, u\rangle$ является выходом оператора Φ_m, если $y \in \Upsilon''(A)$ и $\langle x, u\rangle \in$

$\Phi_n * \Upsilon'(A)$. Ясно, что если $\Phi_n * \Upsilon'(A) \in SV$, то $\Phi_m(A) \in SV$, следовательно, Φ_m определяет в. оператор. Непосредственно видно, что

$$\Phi_m(graph(\beta^g)) = \{\langle\langle x, y\rangle, f(x)\rangle : y \in graph(\alpha)\} = graph(\beta^f).$$

Следовательно, $\beta^f \leq_{cpm} \beta^g$.

Обратно, пусть $\beta^f \leq_{cpm} \beta^g$ для некоторого в. оператора Ψ. Пусть $h(\langle x, y\rangle) = g(x)$. Ясно, что $h \equiv_{pm} g$. Пусть $\eta = \Psi(h)$. Так как $\beta^g \subset h$, то $\beta^g \subset \eta$. Пусть z_0 — произвольный фиксированный элемент из $graph(\alpha)$, тогда $\{\langle\langle x, z_0\rangle, f(x)\rangle : x \in \omega\} \subset graph(\eta)$. Отсюда следует, что

$$graph(f) = \{\langle x, y\rangle : \langle\langle x, z_0\rangle, y\rangle \in graph(\eta)\}.$$

Это означает, что $f \leq_{pm} \eta$, а так как $\eta \leq_{pm} h$ и $h \equiv_{pm} g$, то $f \leq_{cpm} g$.

Итак, доказано, что $f \leq_{pm} g \Leftrightarrow \beta^f \leq_{ce} \beta^g$. Отсюда следует, что

$$deg_{pm}(f) \neq deg_{pm}(g) \Rightarrow \epsilon(deg_{pm}(f)) \neq \epsilon(deg_{pm}(g)),$$

следовательно, $\epsilon \colon TL_{pm}(\leq \mathbf{a}) \to L^{cpm}_{pm}(\mathbf{a})$ — изоморфное вложение. Теорема доказана.

Если $|TL_e(\leq \mathbf{a})| = 1$, то частичные степени $\mathbf{a} = deg_e(\alpha)$ могут быть как разложимыми, так и неразложимыми.

Библиографический список

1. *Ершов Ю. Л.* Теория нумераций. М. : Наука, 1977. 415 с.
2. *Поляков Е. А., Розинас М. Г.* Сводимости по перечислимости // Сибирский математический журнал. 1977. Т. 18, № 4. С. 838—845.
3. *Rogers H. (Jr.)* Theory of Recursive Functions and Effective Computability. New York : McGraw-Hill, 1967. 482 p.

УДК 519.67

С. И. Хашин

ОПТИМИЗАЦИЯ БАЗИСА ФУРЬЕ В КОМПЬЮТЕРНОЙ ГРАФИКЕ

В компьютерной графике широко применяется двумерное дискретное косинус-преобразование Фурье в квадрате 8×8. Его можно рассматривать как переход к новому ортонормальному базису в пространстве размерности 64. В статье находится новый ортонормальный базис, максимально эффективный в описанном в работе смысле.

Ключевые слова: jpeg, преобразование Фурье, ортогональная матрица, квадратичная форма.

In computer graphics, it is widely used two-dimensional discrete cosine-Fourier transform in the square 8×8. It can be regarded as a transition to a new orthonormal basis in the space of dimension 64. The article is a new orthonormal basis, the most effective in the sense described in.

Key words: jpeg, Fourier transformation, orthogonal matrix, square form.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ, грант № 01201456563 «Теоретико-числовые и численные методы разработки и оптимизации алгоритмов информационной безопасности».