$\Phi_n * \Upsilon'(A)$. Ясно, что если $\Phi_n * \Upsilon'(A) \in SV$, то $\Phi_m(A) \in SV$, следовательно, Φ_m определяет в. оператор. Непосредственно видно, что

$$\Phi_m(graph(\beta^g)) = \{\langle\langle x, y\rangle, f(x)\rangle : y \in graph(\alpha)\} = graph(\beta^f).$$

Следовательно, $\beta^f \leq_{cpm} \beta^g$.

Обратно, пусть $\beta^f \leq_{cpm} \beta^g$ для некоторого в. оператора Ψ. Пусть $h(\langle x, y\rangle) = g(x)$. Ясно, что $h \equiv_{pm} g$. Пусть $\eta = \Psi(h)$. Так как $\beta^g \subset h$, то $\beta^g \subset \eta$. Пусть z_0 — произвольный фиксированный элемент из $graph(\alpha)$, тогда $\{\langle\langle x, z_0\rangle, f(x)\rangle : x \in \omega\} \subset graph(\eta)$. Отсюда следует, что

$$graph(f) = \{\langle x, y\rangle : \langle\langle x, z_0\rangle, y\rangle \in graph(\eta)\}.$$

Это означает, что $f \leq_{pm} \eta$, а так как $\eta \leq_{pm} h$ и $h \equiv_{pm} g$, то $f \leq_{cpm} g$.

Итак, доказано, что $f \leq_{pm} g \Leftrightarrow \beta^f \leq_{ce} \beta^g$. Отсюда следует, что

$$deg_{pm}(f) \neq deg_{pm}(g) \Rightarrow \epsilon(deg_{pm}(f)) \neq \epsilon(deg_{pm}(g)),$$

следовательно, $\epsilon\colon TL_{pm}(\leq \mathbf{a}) \to L_{pm}^{cpm}(\mathbf{a})$ — изоморфное вложение. Теорема доказана.

Если $|TL_e(\leq \mathbf{a})| = 1$, то частичные степени $\mathbf{a} = deg_e(\alpha)$ могут быть как разложимыми, так и неразложимыми.

Библиографический список

1. *Ершов Ю. Л.* Теория нумераций. М. : Наука, 1977. 415 с.
2. *Поляков Е. А., Розинас М. Г.* Сводимости по перечислимости // Сибирский математический журнал. 1977. Т. 18, № 4. С. 838—845.
3. *Rogers H. (Jr.)* Theory of Recursive Functions and Effective Computability. New York : McGraw-Hill, 1967. 482 p.

УДК 519.67

С. И. Хашин

ОПТИМИЗАЦИЯ БАЗИСА ФУРЬЕ В КОМПЬЮТЕРНОЙ ГРАФИКЕ

В компьютерной графике широко применяется двумерное дискретное косинус-преобразование Фурье в квадрате 8×8. Его можно рассматривать как переход к новому ортонормальному базису в пространстве размерности 64. В статье находится новый ортонормальный базис, максимально эффективный в описанном в работе смысле.

Ключевые слова: jpeg, преобразование Фурье, ортогональная матрица, квадратичная форма.

In computer graphics, it is widely used two-dimensional discrete cosine-Fourier transform in the square 8×8. It can be regarded as a transition to a new orthonormal basis in the space of dimension 64. The article is a new orthonormal basis, the most effective in the sense described in.

Key words: jpeg, Fourier transformation, orthogonal matrix, square form.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ, грант № 01201456563 «Теоретико-числовые и численные методы разработки и оптимизации алгоритмов информационной безопасности».

1. Базис Фурье

В компьютерной графике один из наиболее популярных форматов — jpeg [1, 3, 5]. В нем, после некоторых преобразований, изображение разбивается на квадраты размером 8×8 точек. Таким образом, получаем матрицы размера 8×8, состоящие из целых чисел отрезка $[0 \dots 255]$. К каждой такой матрице $f(x, y)$ применяется двумерное дискретное косинус-преобразование Фурье. Получающиеся значения $F(u, v)$ находятся по формуле

$$F(u,v) = \frac{1}{4}C(u)C(v)\sum_{x,y=0}^{7} f(x,y)\cos\left(\frac{(2x+1)u\pi}{16}\right)\cos\left(\frac{(2y+1)v\pi}{16}\right), \quad (1)$$

где $C(u) = 1/\sqrt{2}$ при $u = 0$ и $C(u) = 1$ в остальных случаях.

Это преобразование можно рассматривать как переход от стандартного базиса E, у которого ровно одна координата равна 1, а все остальные — нулю, к новому ортонормальному базису F. Векторы из этого базиса нумеруются двумя индексами (u, v), координаты каждого вектора нумеруются опять двумя индексами (x, y) и, согласно формуле (1), эти координаты равны

$$F_{u,v}[x,y] = \frac{1}{4}C(u)C(v)\cos\left(\frac{(2x+1)u\pi}{16}\right)\cos\left(\frac{(2y+1)v\pi}{16}\right).$$

Возьмем для примера один такой квадрат из стандартного изображения `lena.bmp`:

$$\begin{pmatrix} 95 & 94 & 91 & 107 & 100 & 97 & 98 & 101 \\ 95 & 96 & 104 & 113 & 99 & 99 & 101 & 98 \\ 100 & 101 & 98 & 105 & 97 & 95 & 102 & 95 \\ 93 & 95 & 95 & 92 & 97 & 96 & 91 & 98 \\ 88 & 93 & 100 & 96 & 97 & 96 & 103 & 101 \\ 95 & 97 & 93 & 92 & 99 & 102 & 105 & 113 \\ 96 & 96 & 95 & 95 & 96 & 98 & 105 & 102 \\ 95 & 94 & 95 & 99 & 99 & 97 & 98 & 103 \end{pmatrix}.$$

Результатом его преобразования Фурье (округленного до целых) будет матрица

$$\begin{pmatrix} 784 & -15 & -1 & -7 & 4 & 3 & -4 & -2 \\ 3 & 9 & -11 & -2 & 4 & 6 & -3 & -5 \\ 5 & 0 & -4 & 1 & 7 & 5 & -2 & -5 \\ 2 & -12 & 4 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ -10 & -1 & -3 & 0 & 3 & -4 & 3 & 1 \\ -6 & 2 & 6 & 6 & 1 & -4 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 6 & 3 & 3 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & -3 & 6 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Преобразование Фурье является ортогональным, поэтому длина исходного вектора в точности равна длине преобразованного (до округления).

В представленном примере, как и во множестве других, можно заметить, что в исходной матрице 8×8 все числа не слишком сильно отличаются друг от друга, а в преобразованной наибольшее значение имеет число в верхней левой клетке и по мере удаления от этой клетки числа быстро убывают по модулю. То есть значительная часть информации оказывается сосредоточена в верхнем левом углу матрицы и соответствующие элементы матрицы являются наиболее ценными в информационном смысле.

Именно это свойство и выступает основой для эффективного сжатия графической информации.

В связи с этим возникает вопрос: нельзя ли найти другой ортонормальный базис с еще более эффективным разделением информации по координатам?

Оказывается, можно. Но базис Фурье весьма близок к оптимальному, и, как следствие, переход от базиса Фурье к наиболее оптимальному даст очень слабую прибавку коэффициента сжатия и не может быть оправдан.

Другие стандарты сжатия (см., напр.: [2, 4, 6]) достигают несколько лучшего сжатия, чем jpeg, но за счет совершенно иных подходов, которые в настоящей статье не рассматриваются.

2. Эффективность базиса относительно системы векторов

Пусть в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ задан набор из K векторов $X = \{x_1, \ldots, x_K\}$ и $E = \{e_i\}$ — ортонормальный базис в $\mathbb{R}^n$. Пусть $x_j = y_{j1}e_1 + \cdots + y_{jn}e_n$ — разложение каждого из векторов по базису E. Мы хотим найти такой базис, чтобы первые координаты в разложении были как можно больше (по модулю), а последующие — как можно меньше.

Для данного базиса E и набора векторов V введем характеристики

$$S_i = \sum_{j=1}^{K} a_{ji}^2, \qquad S = \sum_{i=1}^{n} S_i, \qquad s_i = \frac{S_i}{S}.$$

По построению, $0 \le s_i \le 1$, $s_1 + \cdots + s_n = 1$.

Будем говорить, что для набора векторов X базис E_1 лучше, чем E_2, если строчка $(s_1, \ldots, s_n)$ для первого базиса лексикографически больше соответствующей строчки для второго.

Базис E будем называть оптимальным для набора векторов V, если E не хуже любого другого базиса.

Для вектора v через v^2 обозначим квадратичную форму (квадрат проекции на вектор v)

$$x \to (x, v)^2.$$

Для набора векторов $V = \{v_i\}$ рассмотрим квадратичную форму $f_V = \sum v_i^2$. Эта квадратичная форма будет неотрицательно определена. Имеет место следующий очевидный факт.

Теорема. *В оптимальном базисе для набора векторов V квадратичная форма f_V диагональна и диагональные элементы не возрастают.*

Таким образом, для нахождения оптимального базиса для набора векторов V надо построить квадратичную форму f_V и привести ее к главным осям.

3. Полученные результаты

Для измерений был взят набор из 100 высококачественных изображений. Для этого отбирались фотографии, полученные с наибольшим качеством (jpeg — 100 %), которые затем сжимались в три раза по каждому измерению, т. е. в новом изображении яркость каждой точки равна среднему арифметическому яркостей 9 соседних точек исходного изображения. Качество изображений, полученных таким образом, можно считать близким к идеальному.

Каждое изображение разрезалось на квадраты 8×8, каждая из трех цветовых компонент рассматривалась как вектор v в 64-мерном пространстве, находилась квадратичная форма v^2, затем все эти квадратичные формы складывались.

Полученная симметричная матрица размера 64×64 приводилась ортогональным преобразованием к главным осям. Найденные таким путем оси как раз и образовывали искомый ортонормальный базис.

Базис в 16-мерном пространстве. Трудно наглядно представить ортонормальный базис в 64-мерном пространстве. Поэтому возьмем вместо квадратов размера 8×8 квадраты размера 4×4, для них найденный оптимальный базис будет уже более наглядным. В строках следующей матрицы показаны координаты оптимального ортонормального базиса, умноженные на 100 и округленные до целых:

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrrr|rrrr|rrrr}
25 & 25 & 25 & 25 & 25 & 25 & 25 & 25 & 25 & 25 & 25 & 25 & 25 & 25 & 25 & 25 \\
31 & 35 & 34 & 29 & 15 & 16 & 15 & 12 & -12 & -15 & -16 & -15 & -29 & -34 & -35 & -31 \\
-28 & -12 & 14 & 31 & -34 & -15 & 16 & 35 & -35 & -16 & 15 & 34 & -31 & -15 & 12 & 29 \\
-33 & -13 & -11 & -29 & 5 & 37 & 38 & 7 & 7 & 37 & 37 & 5 & -29 & -11 & -13 & -33 \\
\hline
-9 & 32 & 34 & -6 & -36 & 9 & 10 & -34 & -34 & 10 & 9 & -36 & -6 & 34 & 32 & -9 \\
37 & 21 & -19 & -42 & 19 & 13 & -8 & -22 & -21 & -8 & 13 & 19 & -41 & -19 & 21 & 38 \\
-18 & 28 & -26 & 14 & -13 & 38 & -35 & 13 & -13 & 35 & -37 & 13 & -15 & 26 & -28 & 17 \\
18 & 13 & 10 & 17 & -27 & -37 & -38 & -24 & 24 & 38 & 37 & 27 & -17 & -10 & -13 & -19 \\
\hline
-40 & -8 & 32 & 19 & 19 & 13 & -8 & -37 & 37 & 8 & -13 & -19 & -18 & -31 & 8 & 40 \\
16 & -35 & -22 & 41 & 31 & -4 & -16 & 9 & -9 & 16 & 5 & -31 & -42 & 22 & 35 & -16 \\
-40 & 36 & 4 & -8 & 26 & 1 & -33 & 14 & 14 & -34 & 1 & 26 & -8 & 4 & 36 & -40 \\
-8 & -9 & -16 & 37 & 16 & 34 & -14 & -40 & -41 & -14 & 34 & 16 & 37 & -16 & -9 & -8 \\
\hline
-3 & -30 & 45 & -15 & 36 & -13 & 0 & -21 & -21 & 0 & -13 & 36 & -15 & 45 & -30 & -3 \\
25 & -37 & 21 & -6 & -31 & 38 & -10 & -5 & 5 & 9 & -38 & 31 & 6 & -21 & 37 & -26 \\
-6 & -5 & 30 & -25 & 22 & -9 & -38 & 37 & -37 & 38 & 8 & -21 & 25 & -31 & 5 & 6 \\
11 & -21 & 21 & -11 & -21 & 38 & -39 & 21 & 21 & -38 & 39 & -21 & -11 & 21 & -21 & 12
\end{array}\right).$$

Даже из этой матрицы видно, что «физический смысл» найденного базиса весьма близок к «физическому смыслу» базиса Фурье.

Эффективность базиса. Возвращаясь к квадратам размера 8×8, покажем эффективность найденного базиса в сравнении с базисом Фурье. Эффективностью базиса в данном случае будет строка из 64 чисел.

Эффективность оптимального базиса:

0.9811571	0.0033704	0.0037226	0.0011993	0.0009864	0.0013201	0.0005756	0.0005036
0.0005295	0.0006356	0.0003289	0.0002832	0.0003186	0.0003041	0.0003522	0.0002142
0.0001784	0.0001998	0.0002048	0.0001893	0.0002201	0.0001580	0.0001217	0.0001326
0.0001414	0.0001370	0.0001270	0.0001499	0.0001524	0.0000891	0.0000944	0.0000994
0.0001003	0.0000961	0.0000896	0.0001247	0.0000723	0.0000709	0.0000732	0.0000743
0.0000738	0.0000710	0.0000723	0.0000574	0.0000562	0.0000564	0.0000567	0.0000557
0.0000573	0.0000468	0.0000443	0.0000444	0.0000440	0.0000471	0.0000375	0.0000358
0.0000356	0.0000382	0.0000311	0.0000298	0.0000312	0.0000264	0.0000263	0.0000266.

Эффективность базиса Фурье:

0.9811604	0.0037498	0.0033980	0.0013685	0.0011750	0.0010074	0.0006373	0.0005782
0.0005188	0.0004943	0.0003564	0.0003314	0.0003044	0.0002995	0.0002799	0.0002219
0.0002169	0.0001960	0.0001905	0.0001879	0.0001786	0.0001595	0.0001521	0.0001514
0.0001346	0.0001314	0.0001279	0.0001272	0.0001258	0.0001221	0.0000963	0.0000942
0.0000928	0.0000920	0.0000905	0.0000900	0.0000736	0.0000734	0.0000716	0.0000704
0.0000701	0.0000696	0.0000692	0.0000571	0.0000569	0.0000550	0.0000542	0.0000539
0.0000536	0.0000463	0.0000459	0.0000432	0.0000426	0.0000422	0.0000374	0.0000367
0.0000348	0.0000344	0.0000312	0.0000301	0.0000292	0.0000265	0.0000262	0.0000258.

Учитывая, что в jpeg-файлах результаты преобразования Фурье выводятся «змейкой» [1, 3], для большей наглядности сгруппируем полученные результаты по расстоянию клетки в матрице 8×8 от верхнего левого угла:

Строки	Оптимальный базис	Базис Фурье
0	0.981157	0.981160
1 – 2	0.007093	0.007148
3 – 5	0.003506	0.003551
6 – 9	0.002244	0.002229
10 – 14	0.001587	0.001572
15 – 20	0.001207	0.001192
21 – 27	0.000968	0.000984
28 – 35	0.000846	0.000804
36 – 42	0.000508	0.000498
43 – 48	0.000340	0.000331
49 – 53	0.000227	0.000220
54 – 57	0.000147	0.000143
58 – 60	0.000092	0.000091
61 – 62	0.000053	0.000053
63	0.000027	0.000026

Мы видим, что эффективность оптимального базиса практически не отличается от эффективности базиса Фурье. Поэтому, по крайней мере с точки зрения сжатия графических данных, базис Фурье следует признать наиболее подходящим из всех ортонормальных базисов.

Библиографический список

1. *Гонсалес Р., Вудс Р.* Цифровая обработка изображений. М. : Техносфера, 2012. 1104 с.
2. Методы компьютерной обработки изображений / под ред. В. А. Сойфера. 2-е изд., испр. М. : Физматлит, 2003. 784 с.
3. Методы сжатия данных. Устройство архиваторов, сжатие изображений и видео / Д. Ватолин и др. М. : Диалог-МИФИ, 2002. 384 с.
4. Jpeg2000 : сайт. URL: http://www.jpeg.org/jpeg2000/index.html (дата обращения: 20.01.2015).
5. The JPEG still picture compression standard // IEEE Transactions on Consumer Electronics. 1992. Vol. 38, iss. 1. P. XVIII—XXXIV.
6. *Weinberger M. J., Seroussi G., Sapiro G.* The LOCO-I lossless image compression algorithm: principles and standardization into JPEG-LS // IEEE Transactions on Image Processing. 2000. Vol. 9, № 8. P. 1309—1327.