
УДК 519.67

С. Е. Ваганов, С. И. Хашин

СРАВНЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ РАЗЛИЧНЫХ ВЕРСИЙ МЕТОДА ЛУКАСА — КАНАДЕ

Предложена модификация классического метода Лукаса — Канаде поиска векторов движения между парой кадров, использующая матрицу Гессиана второго кадра. Дано определение радиуса сходимости алгоритма, позволяющее эффективно сравнивать алгоритмы поиска векторов движения. Произведен сравнительный анализ эффективности классического алгоритма Лукаса — Канаде.

Ключевые слова: метод Ньютона, оптический поток, метод Лукаса — Канаде, Гессиан, Якобиан, радиус сходимости.

The modification of the classical Lucas — Kanade method for find optical flow between two frames using the Hessian matrix for the second frame was proposed. The convegence radius definition of the algorithm was given. The effectiveness analyze of the various Lucas — Kanade algorithms was produced.

Key words: optical flow, Lucas — Kanade, Hessian, Jacobian, the radius of convergence.

Введение

Алгоритм Лукаса — Канаде (Lucas — Kanade) [4, 9] является одним из наиболее эффективных методов нахождения межкадрового движения. При обработке видеоданных он используется фактически повсеместно [5—8].

Этот алгоритм на входе получает пару кадров (f, g) и некоторую область U на первом кадре. На выходе он выдает вектор сдвига $v = (a_0, a_1)$ такой, что кадр f на области U наилучшим образом аппроксимируется в виде $g(x + a_0, y + a_1)$ (см. формулу (1)).

Если кадр f разбит на непересекающиеся области U_i, то, найдя для каждой из них свой вектор сдвига v_i, мы получим вектор сдвига для каждой точки на кадре f. Построенное таким образом векторное поле называется оптическим потоком. Его нахождение является одной из основных задач при сжатии видеоинформации.

Эффективность алгоритма Лукаса — Канаде подтверждается его широким применением [10]. Но математическое обоснование условий сходимости метода на сегодняшний день недостаточно полно. Это особенно становится актуальным при поиске обобщений метода для нахождения не только сдвигов, но и преобразований плоскости более общего вида: поворотов, растяжений, общих аффинных и даже проективных преобразований [1, 2, 3].

В параграфе 1 вводятся необходимые в дальнейшем сведения о классическом методе Лукаса — Канаде. В параграфе 2 предлагается усиление метода с использованием вторых производных от функции яркости $f(x, y)$. В параграфе 3 вводится понятие радиуса сходимости метода. В парагра-

---

© Ваганов С. Е., Хашин С. И., 2017

фе 4 приводятся результаты численных расчетов, показывающих пределы применимости рассмотренных методов в различных случаях.

1. Классический метод Лукаса — Канаде

1.1. Постановка задачи поиска оптического потока. Алгоритм Лукаса — Канаде [4, 9] представляет собой метод поиска оптического потока на последовательности кадров. В дальнейшем мы будем рассматривать алгоритм применительно лишь к одной паре кадров.

Пусть $f(x, y)$ и $g(x, y)$ — пара матриц целых чисел (серых изображений) размером $mx \times my$. Элементы матриц представляют собой интенсивности яркостей точек (пикселов) на изображении. Пусть U_f — множество целочисленных координат точек некоторой области изображения f:

$$U_f = \{u_i : (x_i, y_i),\ i = 1, \ldots, K\},\ 0 \leqslant x_i < mx,\ 0 \leqslant y_i < my,$$

где K — количество точек области.

Будем искать оптический поток в области U_f в виде сдвига

$$A(u) = A(x, y) = (x + a_0,\ y + a_1)$$

на вектор (a_0, a_1). Задача поиска оптического потока сводится к задаче минимизации функционала:

$$S(a_0, a_1) = \sum_{u \in U_f} \big(f(A(u)) - g(u)\big)^2. \tag{1}$$

Другими словами, для области U_f требуется найти вектор сдвига (a_0, a_1) на паре кадров f и g такой, чтобы сумма квадратов отклонений значений функций f и g в данных точках была минимальна.

1.2. Метод Лукаса — Канаде. В классическом алгоритме Лукаса — Канаде для решения задачи (1) используется модификация итеративного метода последовательных приближений, а именно метод Ньютона — Рафсона. Рассмотрим его подробнее.

Пусть $a_n = (a_{0n}, a_{1n})$ — вектор сдвига на n-м шаге. Процесс итераций для решения задачи (1) имеет вид

$$a_{n+1} = a_n - (J^T J)^{-1} J^T F,$$

где F — вектор-столбец, элементами которого являются величины отклонений $f(A(u_i)) - g(u_i)$, $i = 0, \ldots, K - 1$, т. е.

$$F = \big(\Delta(u_0),\, \Delta(u_1),\, \ldots,\, \Delta(u_{K-1})\big)^T,$$

где $\Delta(u_i) = f(A(u_i)) - g(u_i)$.

Пусть J — матрица частных производных от $f(A(u_i))$ по параметрам a_0 и a_1 (Якобиан):

$$\underset{K\times 2}{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(A(u_0))}{\partial a_0} & \frac{\partial f(A(u_0))}{\partial a_1} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f(A(u_{K-1}))}{\partial a_0} & \frac{\partial f(A(u_{K-1}))}{\partial a_1} \end{pmatrix}.$$

Частная производная функции $f(A(v))$ по параметру a_i в общем виде представима следующим соотношением:

$$\frac{\partial f(A(u))}{\partial a_i} = \left(f'_x(A(u)) \frac{\partial A_x(u)}{\partial a_i} + f'_y(A(u)) \frac{\partial A_y(u)}{\partial a_i} \right),$$

где

$$f'_x(A(u)) = f'_x(x + a_0,\ y + a_1)$$

и

$$f'_y(A(u)) = f'_y(x + a_0,\ y + a_1)$$

— численные аппроксимации производных по аргументам x и y в точке $(x + a_0,\ y + a_1)$;

$$\frac{\partial A_x(u)}{\partial a_i} \quad \text{и} \quad \frac{\partial A_y(u)}{\partial a_i}$$

— частные производные от A_x, A_y по a_i, значения которых равны

$$\frac{\partial A(u)}{\partial a_0} = \left(\frac{\partial A_x(u)}{\partial a_0},\ \frac{\partial A_y(u)}{\partial a_0} \right) = (1, 0)$$
$$\frac{\partial A(u)}{\partial a_1} = \left(\frac{\partial A_x(u)}{\partial a_1},\ \frac{\partial A_y(u)}{\partial a_1} \right) = (0, 1).$$

Замечание 1. Также частную производную функции $f(A(v))$ можно представить в виде скалярного произведения вектора градиента изображения f в точке u на вектор частных производных функции A:

$$\frac{\partial f(A(u))}{\partial a_i} = \left\langle \left(f'_x(A(u)), f'_y(A(u)) \right),\ \frac{\partial A(u)}{\partial a_i} \right\rangle.$$

Замечание 2. $(J^T J)^{-1} J^T$ — псевдообратная матрица для J, найденная посредством метода наименьших квадратов.

Если $\det(J^T J) = 0$, то необходимо выполнить регуляризацию матрицы $J^T J$. Для этого к элементам, стоящим на главной диагонали, нужно прибавить некоторое малое число σ. Таким образом, метод с регуляризацией можно представить в следующем виде:

$$a_{n+1} = a_n - (J^T J + \sigma E)^{-1} J^T F,$$

где E — единичная матрица.

Замечание 3. Итерационный процесс считается завершенным, если величина суммы квадратов отклонений (1) стала меньше некоторого заданного порога. Чем меньше пороговая величина, тем большая точность аппроксимации найденного вектора сдвига будет получена.

Выпишем формулы итерационного процесса. Пусть $a_n = (a_{0n}, a_{1n})$ — вектор сдвига на n-м шаге, вектор приращения обозначим через (w_x, w_y), т. е. вектор сдвига на $(n+1)$-м шаге будет

$$a_{n+1} = (a_{0n} + w_x,\ a_{1n} + w_y). \tag{2}$$

Для нахождения (w_x, w_y) имеем систему двух линейных уравнений от двух переменных:

$$\begin{cases} S_x + w_x \cdot S_{xx} + w_y \cdot S_{xy} = 0, \\ S_y + w_x \cdot S_{xy} + w_y \cdot S_{yy} = 0, \end{cases} \tag{3}$$

где

$$S_x = 2\sum_{u\in U_f} f'_x(A(u))\Delta(u),$$

$$S_y = 2\sum_{u\in U_f} f'_y(A(u))\Delta(u),$$

$$S_{xx} = 2\sum_{u\in U_f} f'_x(A(u))^2,$$

$$S_{xy} = 2\sum_{u\in U_f} f'_x(A(u))f'_y(A(u)),$$

$$S_{yy} = 2\sum_{u\in U_f} f'_y(A(u))^2.$$

2. Обобщение метода Лукаса — Канаде

2.1. Сведение к методу Ньютона для системы уравнений 2×2. Нахождение локального минимума функции (1) можно свести к решению системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a_0} = 0, \\ \dfrac{\partial S}{\partial a_1} = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Найти аппроксимацию решения (4) можно посредством итеративного метода Ньютона:

$$a_{n+1} = a_n - z'(A(u))^{-1}z(A(u)),$$

где $z'(A(u))$ — матрица вторых производных от функции S размерностью 2×2 (Гессиан), а функция $z(A(u))$ соответствует

$$z(A(u)) = \left(\frac{\partial S}{\partial a_0}, \frac{\partial S}{\partial a_1}\right)^T. \tag{5}$$

При этом частная производная функции S по параметру a_i равна

$$\frac{\partial S}{\partial a_i} = 2\sum_{u\in U_f} \Delta(u)\frac{\partial f(A(u))}{\partial a_i}, \tag{6}$$

где $\Delta(u) = f(A(u)) - g(u)$.

Подставив (6) в (5), получим:

$$z(A(u)) = 2\sum_{u\in U_f} \begin{pmatrix} \Delta(u)f'_x(A(u)) \\ \Delta(u)f'_y(A(u)) \end{pmatrix}.$$

Матрица вторых производных $z'(A(u))$ является симметричной и представима в виде

$$z'(A(u)) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 S}{\partial a_0^2} & \dfrac{\partial^2 S}{\partial a_0 \partial a_1} \\ \dfrac{\partial^2 S}{\partial a_1 \partial a_0} & \dfrac{\partial^2 S}{\partial a_1^2} \end{pmatrix},$$

причем

$$\frac{\partial^2 S}{\partial a_0 \partial a_1} = \frac{\partial^2 S}{\partial a_1 \partial a_0}.$$

Значения элементов матрицы вторых производных вычисляются посредством следующих формул:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial a_0^2} = 2\sum_{u\in U_f} \left(f'_x(A(u))^2 + \Delta(u) f''_{xx}(A(u)) \right),$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial a_0 \partial a_1} = 2\sum_{u\in U_f} \left(f'_x(A(u)) f'_y(A(u)) + \Delta(u) f''_{xy}(A(u)) \right),$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial a_1^2} = 2\sum_{u\in U_f} \left(f'_y(A(u))^2 + \Delta(u) f''_{yy}(A(u)) \right),$$

где $f''_{xx}(A(u))$, $f''_{xy}(A(u))$ и $f''_{yy}(A(u))$ — численные аппроксимации вторых производных по аргументам xx, xy и yy в точке $(x + a_0,\ y + a_1)$.

Выпишем формулы итерационного процесса для (2). Для нахождения (w_x, w_y) имеем систему двух линейных уравнений от двух переменных:

$$\begin{cases} S_x + w_x \cdot \dfrac{\partial^2 S}{\partial a_0^2} + w_y \cdot \dfrac{\partial^2 S}{\partial a_0 \partial a_1} = 0, \\ S_y + w_x \cdot \dfrac{\partial^2 S}{\partial a_0 \partial a_1} + w_y \cdot \dfrac{\partial^2 S}{\partial a_0^2} = 0. \end{cases} \tag{7}$$

2.2. Связь обобщенного метода с классическим. Один шаг классического метода Лукаса — Канаде сводится к решению системы двух уравнений (3) от двух неизвестных. В свою очередь, шаг модифицированного метода сводится к решению похожей системы (7). Свободные члены у этих систем уравнений одинаковы, а коэффициенты перед неизвестными различны.

Пусть C — действительное число. Рассмотрим выражения:

$$2\sum_{u\in U_f} \left(f'_x(A(u))^2 + C\Delta(u) f''_{xx}(A(u)) \right),$$

$$2\sum_{u\in U_f} \left(f'_x(A(u)) f'_y(A(u)) + C\Delta(u) f''_{xy}(A(u)) \right),$$

$$2\sum_{u\in U_f} \left(f'_y(A(u))^2 + C\Delta(u) f''_{yy}(A(u)) \right).$$

При $C = 1$ получаем

$$\frac{\partial^2 S}{\partial a_0^2}, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial a_0 \partial a_1}, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial a_1^2}$$

соответственно. Если же взять $C = 0$, то получим

$$S_{xx}, \quad S_{xy}, \quad S_{yy}$$

из системы уравнений (3).

Таким образом, при $C = 0$ мы получаем классический метод Лукаса — Канаде (метод Ньютона — Рафсона), при $C = 1$ — обобщенный метод.

Разумеется, можно рассмотреть и промежуточные варианты при других значениях C.

3. Радиус сходимости метода

Мы рассматриваем некоторый алгоритм P, получающий на входе пару кадров (f, g) и некоторую область U_f на первом кадре. На выходе алгоритма получается вектор $v = (v_x, v_y)$, минимизирующий квадратичную погрешность (1), называемый вектором сдвига.

Обычно алгоритм представляет собой последовательность итераций: начиная с некоторого начального вектора v_0, строится цепочка

$$v_0 \to v_1 = P(v_0) \to v_2 = P(v_1) \to \ldots,$$

сходящаяся к некоторому вектору v, который и является результатом работы алгоритма. Мы будем исследовать одну итерацию: $v \to P(v)$.

Для изучения сходимости метода нам требуется пара кадров, для которой вектор сдвига заранее известен. Наиболее естественно для этого взять кадр g, совпадающий с кадром f. В этом случае вектор сдвига будет равен 0. В дальнейшем будем предполагать, что $g = f$ и, следовательно, истинный вектор сдвига для любой области U будет равен нулю.

Определение 1. Будем говорить, что метод P для кадра f и области U сходится на радиусе r, если для любого вектора v длины r длина $P(v)$ строго меньше r.

Замечание 4. На практике проверка всех векторов данного радиуса невозможна. Более того, условие $|P(v)| < r$ слишком слабое для практических целей. Поэтому при численных экспериментах будем использовать несколько другое условие: для $N = 20$ различных векторов длины r выполнено

$$|P(v)| < 0.9 \cdot r.$$

Определение 2. Будем говорить, что метод P для кадра f и области U имеет радиус сходимости r, если метод сходится для любого $r' < r$.

Замечание 5. На практике для вычисления радиуса сходимости, начиная с некоторого малого начального радиуса, например $r_0 = 0.2$, будем брать все более увеличивающиеся радиусы, например по формуле $r_{k+1} = 1.2 \cdot r_k$. Радиусом сходимости будем называть последнее число из этой цепочки, при котором метод сходится.

Определение 3. Рассмотрим теперь области U на кадре f в виде всевозможных квадратов со стороной L. Обозначим через $R_0(f, L)$ наименьший и через $R_1(f, L)$ наибольший радиусы сходимости по этим квадратам.

Замечание 6. На практике для вычисления R_0 и R_1 будем рассматривать не все квадраты, а их некоторое фиксированное количество N_0. С точки зрения допустимых вычислительных затрат можно положить $N_0 = 100$.

Величины R_0 и R_1 имеют понятный геометрический смысл. При разработке новых алгоритмов поиска векторов сдвига можно ориентироваться именно на эти показатели.

4. Сравнение эффективности методов

4.1. Эффективность при фиксированной области U. Рассмотрим работу алгоритма на примере пары одинаковых изображений Lena. В качестве исходной области точек выберем квадрат размером 12 × 12 с координатами (160, 160), (272, 272). Для уменьшения шумов сгладим изображение фильтром Гаусса с размером ядра (7 × 7).

В качестве начального приближения будем рассматривать несколько различных векторов. В процессе выполнения алгоритма должен получиться вектор нулевой длины.

В табл. 1 и 2 представлены величины MSE сегмента для найденной на i-й итерации аппроксимации вектора сдвига.

Таблица 1

Отношение оценки MSE
для случая начального приближения $a_0 = (5, 0)$

i	$C = 0$	$C = 0.25$	$C = 0.5$	$C = 0.75$	$C = 1$
1	16.536	13.981	5.738	30.131	26.322
2	7.537	1.610	0.613	23.540	39.542
3	0.269	0.116	0.016	19.494	58.059

Таблица 2

Отношение оценки MSE
для случая начального приближения $a_0 = (5, 5)$

i	$C = 0$	$C = 0.25$	$C = 0.5$	$C = 0.75$	$C = 1$
1	25.387	23.502	19.123	2.902	85.171
2	17.885	11.202	3.095	0.180	84.893
3	6.885	0.216	0.253	0.001	85.653

Оценка среднеквадратичного отклонения вычисляется по формуле

$$MSE = \sqrt{\frac{1}{K} \sum_{u \in U_f} \Delta(u)^2}.$$

Эмпирические данные показывают, что при $C = 1$ алгоритм имеет худшую сходимость, чем в случае применения классического подхода.

4.2. Численное определение параметра R_0. Для измерений был взят набор из нескольких высококачественных изображений. Для каждого изображения были рассмотрены 100 различных областей в виде квадратов со сторонами $8, 13, 18, 24, 31$ и для каждой области найдены радиусы сходимости при использовании классического метода Лукаса — Канаде. Параметр R_0, т. е. наименьший радиус сходимости, показан в табл. 3.

Таблица 3

Параметр R_0 по методу Лукаса — Канаде

File	$L = 8$	$L = 13$	$L = 18$	$L = 24$	$L = 31$
1	2.1	2.6	2.9	3.0	3.3
2	1.2	1.8	2.0	2.3	2.9
3	1.4	2.0	2.4	2.4	3.0

В целом можно сделать вывод, что для эффективного применения классического алгоритма Лукаса — Канаде требуется иметь начальное приближение к вектору сдвига с погрешностью, не превышающей 2—3.

Библиографический список

1. *Хашин С. И.* Оценка качества сегментации изображения // Вестник Ивановского государственного университета. Сер.: Естественные, общественные науки. 2010. Вып. 2. С. 112—118.
2. *Хашин С. И.* Аффинная версия алгоритма Лукаса — Канаде // Доклады Всероссийской конференции ММРО-13. М. : МАКС Пресс, 2011. С. 459—462.
3. *Хашин С. И.* Динамическая сегментация последовательности кадров // Машинное обучение и анализ данных. 2013. Т. 1, № 6. С. 787—795.
4. *Baker S., Gross R., Matthews I.* Lucas — Kanade 20 years on: a unifying framework // Int. J. Computer Vision. 2002. Vol. 56. P. 111—122.
5. Draft ITU-T recommendation and final draft international standard of joint video specification // Document JVT-G050. 2003. March.
6. ITU-T and ISO/IEC JTC 1. Generic coding of moving pictures and associated audio information. Part 2 : Video // MPEG-2. 1994. November.
7. ITU-T recomendation H.264. Advanced video coding // Document JVT-E022. 2002. September.
8. ITU-T video coding for low bit rate communication // H.263. Version 1. 1995. November ; Version 2. 1998. January ; Version 3. 2000. November.
9. *Lucas B. D., Kanade T.* An iterative image registration technique with an application to stereo vision // Proc. of Imaging Understanding Workshop. 1981. P. 121—130.
10. *Vesdapunt N., Sinha U.* Comparison of optimization methods in optical flow estimation // arXiv:1605.00572. URL: https://arxiv.org/abs/1605.00572 (дата обращения: 10.02.2017).

УДК 519.65+514.11

Ю. А. Кремешкова, С. В. Пухов, Е. А. Туманова

О ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ИНТЕРПРЕТАЦИИ B-СПЛАЙНОВ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ

Известно, что для любого B-сплайна S степени 2 существуют треугольная пирамида τ и семейство γ всех плоскостей, параллельных некоторой заданной плоскости π, такие, что зависимость площади сечения пирамиды τ плоскостью семейства γ от параметра, определяющего положение плоскости в пространстве, совпадает с S. В настоящей статье для произвольной треугольной пирамиды τ и семейства параллельных плоскостей γ полностью описаны все случаи их взаимного расположения, при которых верно обратное: указанная выше зависимость пропорциональна B-сплайну степени 2.

Ключевые слова: B-сплайн, элементарная геометрия.

It is known that, for any B-spline S of degree 2, there exist a triangle pyramid τ and a family γ of all planes parallel to a given plane π such that the dependence of the square of the cross section of τ by a plane of γ on the parameter defining the position of the plane in the space coincides with S. In the present paper, for an arbitrary triangle pyramid τ and a family γ of parallel planes, all the cases of their mutual arrangement are fully described when the converse is true: the above dependence is proportional to a B-spline of degree 2.

Key words: B-spline, elementary geometry.

© Кремешкова Ю. А., Пухов С. В., Туманова Е. А., 2017