

В целом можно сделать вывод, что для эффективного применения классического алгоритма Лукаса — Канаде требуется иметь начальное приближение к вектору сдвига с погрешностью, не превышающей 2–3.

#### Библиографический список

1. Хашин С. И. Оценка качества сегментации изображения // Вестник Ивановского государственного университета. Сер.: Естественные, общественные науки. 2010. Вып. 2. С. 112–118.
2. Хашин С. И. Аффинная версия алгоритма Лукаса — Канаде // Доклады Всероссийской конференции ММО-13. М. : МАКС Пресс, 2011. С. 459–462.
3. Хашин С. И. Динамическая сегментация последовательности кадров // Машинное обучение и анализ данных. 2013. Т. 1, № 6. С. 787–795.
4. Baker S., Gross R., Matthews I. Lucas — Kanade 20 years on: a unifying framework // Int. J. Computer Vision. 2002. Vol. 56. P. 111–122.
5. Draft ITU-T recommendation and final draft international standard of joint video specification // Document JVT-G050. 2003. March.
6. ITU-T and ISO/IEC JTC 1. Generic coding of moving pictures and associated audio information. Part 2 : Video // MPEG-2. 1994. November.
7. ITU-T recommendation H.264. Advanced video coding // Document JVT-E022. 2002. September.
8. ITU-T video coding for low bit rate communication // H.263. Version 1. 1995. November ; Version 2. 1998. January ; Version 3. 2000. November.
9. Lucas B. D., Kanade T. An iterative image registration technique with an application to stereo vision // Proc. of Imaging Understanding Workshop. 1981. P. 121–130.
10. Vedapant N., Sinha U. Comparison of optimization methods in optical flow estimation // arXiv:1605.00572. URL: <https://arxiv.org/abs/1605.00572> (дата обращения: 10.02.2017).

УДК 519.65+514.11

Ю. А. Кремешкова, С. В. Пухов, Е. А. Туманова

## О ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ИНТЕРПРЕТАЦИИ В-СПЛАЙНОВ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ

Известно, что для любого В-сплайна  $S$  степени 2 существуют треугольная пирамида  $\tau$  и семейство  $\gamma$  всех плоскостей, параллельных некоторой заданной плоскости  $\pi$ , такие, что зависимость площади сечения пирамиды  $\tau$  плоскостью семейства  $\gamma$  от параметра, определяющего положение плоскости в пространстве, совпадает с  $S$ . В настоящей статье для произвольной треугольной пирамиды  $\tau$  и семейства параллельных плоскостей  $\gamma$  полностью описаны все случаи их взаимного расположения, при которых верно обратное: указанная выше зависимость пропорциональна В-сплайну степени 2.

**Ключевые слова:** В-сплайн, элементарная геометрия.

It is known that, for any B-spline  $S$  of degree 2, there exist a triangle pyramid  $\tau$  and a family  $\gamma$  of all planes parallel to a given plane  $\pi$  such that the dependence of the square of the cross section of  $\tau$  by a plane of  $\gamma$  on the parameter defining the position of the plane in the space coincides with  $S$ . In the present paper, for an arbitrary triangle pyramid  $\tau$  and a family  $\gamma$  of parallel planes, all the cases of their mutual arrangement are fully described when the converse is true: the above dependence is proportional to a B-spline of degree 2.

**Key words:** B-spline, elementary geometry.

## 1. Введение

Принято считать, что теория сплайнов берет свое начало с работ И. Я. Шёнберга [9, 10], в которых было введено понятие сплайна как функции одной переменной, «склеенной» из кубических многочленов. На основе этого приема предложены различные варианты аппроксимаций: полиномиальные сплайны высоких степеней, тригонометрические сплайны, L-сплайны [1, с. 7]. Рассматривались также сплайны с разнородными условиями интерполяции (гетерогенные сплайны) и различными типами краевых условий [6].

С. Н. Бернштейном было установлено (1916 г.), что последовательность интерполяционных многочленов Лагранжа, построенных для непрерывной функции  $f(x) = |x|$  на отрезке  $[-1; 1]$  по равноотстоящим узлам ( $x_0 = -1; x_n = 1$ ), с возрастанием  $n$  не стремится к  $f(x)$ . Еще более любопытен другой пример (1901 г.), восходящий к К. Рунге и состоящий в том, что указанный интерполяционный процесс не сходится на  $[-1; 1]$  даже для сколь угодно раз дифференцируемой функции  $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$  (ее называют функцией Рунге).

Иногда эти трудности удается преодолеть путем специального выбора узлов интерполяции или за счет перехода к каким-либо обобщенным многочленам. Однако такой путь, как правило, весьма усложняет вычисления и к тому же не избавляет от второй проблемы — быстрого накопления ошибок округления с ростом степени многочлена. Поэтому на практике для того, чтобы достаточно хорошо приблизить функцию, построение интерполяционного многочлена высокой степени заменяют интерполяцией сплайнами [3].

Вместе с тем следует отметить, что область применения сплайнов не ограничивается интерполяцией. Они активно используются также в численных методах, в системах автоматического проектирования и автоматизации научных исследований, во многих других областях человеческой деятельности и, конечно, в различных системах компьютерного моделирования.

Изучение сплайнов, начавшееся в 1946 г., продолжает развиваться и в наше время. Это подтверждают публикации современных авторов. Приведем обзор лишь некоторых из них.

П. В. Мокшин и А. И. Роженок [5] исследовали задачу выбора оптимального параметра сглаживания абстрактного сглаживающего сплайна, при котором норма отклонения в узлах сетки (норма невязки) должна совпадать с заданным уровнем погрешности в данных. Алгоритм, который они предложили, позволяет достичь оптимального значения параметра сглаживания за меньшее число итераций (в практических расчетах за две итерации) за счет решения на каждом шаге нескольких задач сглаживания.

О. П. Фёдорова и О. В. Кулиш [7] изучали способы задания дополнительных условий, необходимых при вычислении коэффициентов сплайна, аппроксимирующего функцию одной переменной, так что интеграл сплайна по области задания совпадает с соответствующим интегралом функции.

П. Г. Доля [2], решив задачу сплайн-интерполяции традиционным способом и используя полученные в работе формулы, показал, как мож-

но построить единое формульное представление сплайна. При этом полностью используется уравнение только одного звена сплайна, а также коэффициенты при старших степенях остальных составляющих его звеньев. Полученные в работе формулы могут найти свое применение во многих областях прикладной математики и геометрического моделирования.

С. М. Лыткин [4] предложил метод приближения функций линейными комбинациями сдвигов фиксированной функции — В-сплайна первой, второй или третьей степени. Этот метод является точным на классах сплайнов соответствующей степени с дефектом 1. Получены оценки сильного типа для норм аппроксимирующих операторов в некоторых пространствах, из которых непосредственно следует, что приближение в этих пространствах совпадает по порядку с наилучшим приближением сплайнами.

В настоящей работе рассматриваются вопросы геометрической интерпретации В-сплайнов, т. е. сплайнов дефекта 1 с конечным носителем минимальной длины (здесь и далее используется терминология, принятая в монографии [3]). Х. Б. Карри и И. Я. Шёнбергом [8] доказано, что для любого В-сплайна степени  $n - 1$  существуют  $n$ -мерный симплекс и семейство параллельных  $(n - 1)$ -мерных плоскостей такие, что зависимость площади сечения данного симплекса  $(n - 1)$ -мерной плоскостью из этого семейства от параметра, определяющего положение  $(n - 1)$ -мерной плоскости в пространстве, совпадает с указанным сплайном. Возникает вопрос: верно ли обратное? Оказывается, что не всегда. В данной работе при  $n = 3$  перечисляются все случаи взаимного расположения треугольной пирамиды и плоскостей семейства, при которых описанная выше зависимость представляет собой функцию, пропорциональную В-сплайну.

Уточним, что функция  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  пропорциональна В-сплайну степени 2, если она тождественно равна нулю вне некоторого отрезка  $[a; d]$ , ее ограничение на этот отрезок принадлежит классу  $C^1[a; d]$  и существуют числа  $b, c \in \mathbb{R}$  такие, что  $a \leq b \leq c \leq d$  и на каждом из отрезков  $[a; b]$ ,  $[b; c]$ ,  $[c; d]$  функция  $g(x)$  совпадает с некоторым многочленом степени не выше 2. Отображение  $g(x)$  является В-сплайном, если, кроме того,  $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx = 1$ .

Зафиксируем произвольную треугольную пирамиду  $\tau$  (далее для краткости — просто пирамида) и семейство  $\gamma$  всех плоскостей, параллельных некоторой заданной плоскости  $\pi$ . Возьмем произвольную прямую  $l$ , пересекающую все плоскости семейства  $\gamma$ , и параметризуем ее следующим образом: в некоторой точке этой прямой отметим начало отсчета  $O$ , затем выберем одно из двух направлений как положительное и построим отрезок  $OE$ , один из концов которого находится в начале отсчета, а другой — в некоторой точке полупрямой положительного направления. По построению каждой плоскости семейства  $\gamma$  однозначно соответствует точка  $X$  ее пересечения с прямой  $l$  и число  $t$ , определяемое из соотношения  $\overrightarrow{OX} = t \cdot \overrightarrow{OE}$ . Сопоставляя каждому значению параметра  $t$  площадь сечения пирамиды  $\tau$  плоскостью, соответствующей указанному значению  $t$ , получим функцию  $f_{\gamma, \tau}(t)$ . Имеет место следующая

**Теорема.** *Функция  $f_{\gamma, \tau}(t)$  пропорциональна В-сплайну степени 2 тогда и только тогда, когда не существует плоскости семейства  $\gamma$  та-*

кой, что две вершины пирамиды  $\tau$  принадлежат данной плоскости, а две другие лежат по разные стороны от нее.

Случай взаимного расположения пирамиды и семейства плоскостей, при котором функция  $f_{\gamma,\tau}(t)$  не пропорциональна никакому В-сплайну, изображен на рис. 1. Отметим также, что функция  $f_{\gamma,\tau}(t)$  не просто пропорциональна, а совпадает с В-сплайном тогда и только тогда, когда пирамида  $\tau$  имеет единичный объем.

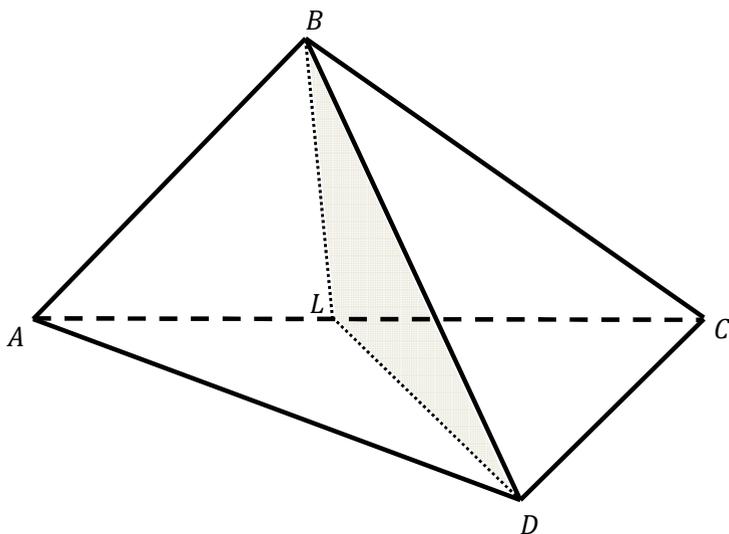


Рис. 1

## 2. Доказательство теоремы

Нетрудно показать, что если  $l'$  — какая-то другая прямая, пересекающая все плоскости семейства  $\gamma$ , и  $t'$  — определяемый ею параметр, то существуют такие числа  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , что для любой плоскости семейства  $\gamma$  соответствующие этой плоскости значения параметров  $t$  и  $t'$  связаны соотношением  $t' = \alpha t + \beta$ . Поэтому пропорциональность функции  $f_{\gamma,\tau}(t)$  В-сплайну не зависит от выбора прямой  $l$  и ее параметризации.

Легко видеть, что прямую  $l$  всегда можно провести таким образом, чтобы она содержала одно из ребер пирамиды, это ребро служило единичным отрезком и все плоскости семейства, пересекающие пирамиду, проходили через точки данного отрезка. Во всех приводимых далее рассуждениях обозначения для вершин пирамиды выбраны так, что прямая  $l$  содержит ребро  $AC$ , начало отсчета совпадает с точкой  $A$ , единичный вектор — с вектором  $\overrightarrow{AC}$ , а каждая плоскость семейства, пересекающая пирамиду, проходит через некоторую точку  $X$  ребра  $AC$ . В результате значение параметра  $t$ , соответствующее этой плоскости, удовлетворяет соотношению  $t = \frac{AX}{AC} \in [0; 1]$ , и  $f_{\gamma,\tau}(t) = 0$  при  $t \notin [0; 1]$ .

Среди плоскостей семейства  $\gamma$  определим две предельные плоскости, которые пересекают пирамиду  $\tau$ , но для каждой из них имеются сколько угодно близкие плоскости семейства, которые уже не пересекают эту пирамиду. Таким образом, все плоскости семейства  $\gamma$ , лежащие между предельными, пересекают пирамиду  $\tau$  по внутренности. Отметим также, что этими внутренними сечениями являются треугольники или четырехуголь-

ники, так как у пирамиды  $\tau$  четыре грани и при пересечении плоскости с гранью получается или отрезок, или точка, или вообще пустое множество.

Рассмотрим случаи взаимного расположения пирамиды и семейства параллельных плоскостей. Классифицируем их с помощью количества вершин пирамиды на предельных плоскостях.

*Первый случай.* Три вершины расположены на одной предельной плоскости и одна — на другой (рис. 2).

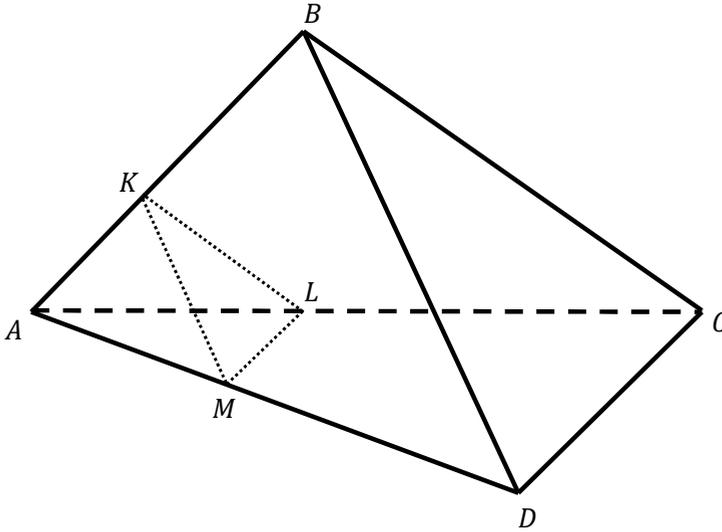


Рис. 2

Этот случай — самый простой: некоторая плоскость семейства совпадает с плоскостью одной из граней пирамиды (на рис. 2 — грань  $BCD$ ) и сечения пирамиды плоскостями семейства являются треугольниками (на рис. 2 —  $\triangle KLM$ ), подобными грани пирамиды, содержащейся в предельной плоскости семейства.

Полагая  $\rho = S_{\triangle BCD}$ , легко видеть, что  $S_{\triangle KLM} = \rho \cdot \left(\frac{AL}{AC}\right)^2$ . Так как в данном случае  $L$  играет роль точки  $X$ , то из последней формулы следует, что

$$f_{\gamma,\tau}(t) = \rho t^2 \quad (1)$$

при  $t \in [0; 1]$ .

Значит, функция  $f_{\gamma,\tau}(t)$  пропорциональна В-сплайну степени 2.

*Второй случай.* На каждой предельной плоскости находится по две вершины (рис. 3).

В этом случае в пирамиде имеется пара скрещивающихся ребер, которые параллельны плоскостям семейства (на рис. 3 — ребра  $AB$  и  $CD$ ). Заклучим пирамиду  $ABCD$  в (окаймляющий) параллелепипед  $AD_1BC_1A_1DB_1C$  следующим образом.

Представим, что скрещивающиеся ребра  $AB$  и  $DC$  являются диагоналями пары противоположных граней параллелепипеда. По предположению, определяющему второй случай, имеется пара плоскостей из семейства  $\gamma$ , которые содержат эти ребра. Построим отрезки  $A_1B_1$  и  $D_1C_1$ , параллельные отрезкам  $AB$  и  $DC$  соответственно и такие, что середина от-

резка  $A_1B_1$  совпадает с серединой отрезка  $DC$ , а середина отрезка  $D_1C_1$  — с серединой отрезка  $AB$ . В результате получим пару параллельных граней параллелепипеда (параллелограммы  $AD_1BC_1$  и  $A_1DB_1C$ ), лежащих в плоскостях семейства  $\gamma$ .

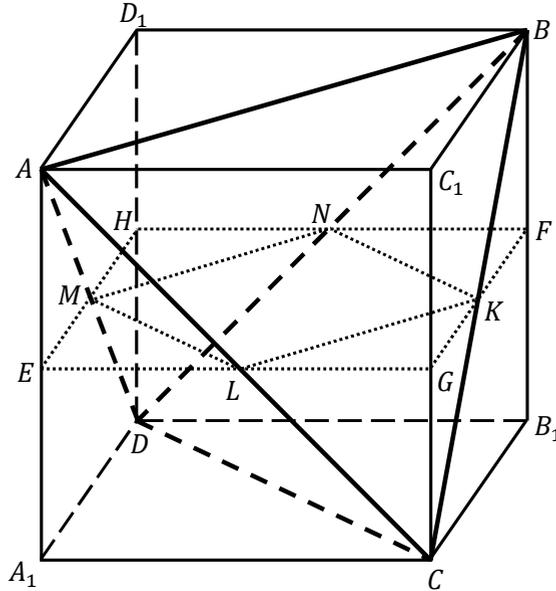


Рис. 3

Исходная пирамида дополняется до построенного параллелепипеда четырьмя другими пирамидами ( $A_1ADC$ ,  $BDAD_1$ ,  $DBB_1C$ ,  $BC_1CA$ ). Причем у каждой из этих пирамид имеется грань, параллельная плоскостям семейства  $\gamma$ , и грань, совпадающая с одной из граней исходной пирамиды.

Таким образом, сечение  $MNKL$  пирамиды  $ABCD$  плоскостью семейства  $\gamma$  дополняется до сечения  $EHFGE$  окаймляющего параллелепипеда (которое всегда совпадает с точностью до параллельного переноса с гранью параллелепипеда) четырьмя треугольниками:  $\triangle EML$ ,  $\triangle MHN$ ,  $\triangle NFK$ ,  $\triangle KGL$  — сечениями пирамид  $A_1ADC$ ,  $BDAD_1$ ,  $DBB_1C$ ,  $BC_1CA$  плоскостями, параллельными их граням  $A_1DC$ ,  $AD_1B$ ,  $DB_1C$ ,  $BC_1A$  соответственно. Поэтому

$$S_{MNKL} = S_{EHFGE} - S_{\triangle EML} - S_{\triangle MHN} - S_{\triangle NFK} - S_{\triangle KGL}$$

и согласно формуле (1)

$$\begin{aligned} S_{\triangle EML} &= S_{\triangle A_1DC} \cdot \left(\frac{AE}{AA_1}\right)^2, & S_{\triangle MHN} &= S_{\triangle AD_1B} \cdot \left(\frac{DH}{DD_1}\right)^2, \\ S_{\triangle NFK} &= S_{\triangle DB_1C} \cdot \left(\frac{BF}{BB_1}\right)^2, & S_{\triangle KGL} &= S_{\triangle BC_1A} \cdot \left(\frac{CG}{CC_1}\right)^2. \end{aligned}$$

Легко видеть, что

$$S_{\triangle A_1DC} = S_{\triangle AD_1B} = S_{\triangle DB_1C} = S_{\triangle BC_1A} = \frac{1}{2}S_{AD_1BC_1}.$$

Так как здесь  $X = L$ , то

$$\frac{AE}{AA_1} = \frac{BF}{BB_1} = \frac{AL}{AC} = t, \quad \frac{DH}{DD_1} = \frac{CG}{CC_1} = 1 - \frac{AL}{AC} = 1 - t.$$

Обозначив  $S_{AD_1BC_1}$  через  $\sigma$ , получим

$$f_{\gamma,\tau}(t) = \sigma - \sigma t^2 - \sigma(1-t)^2 = 2\sigma t(1-t) \quad (2)$$

при  $t \in [0; 1]$ .

Таким образом, функция  $f_{\gamma,\tau}(t)$ , как и в первом случае, пропорциональна В-сплайну степени 2.

*Третий случай.* Две вершины расположены на одной предельной плоскости и одна — на другой (рис. 4).

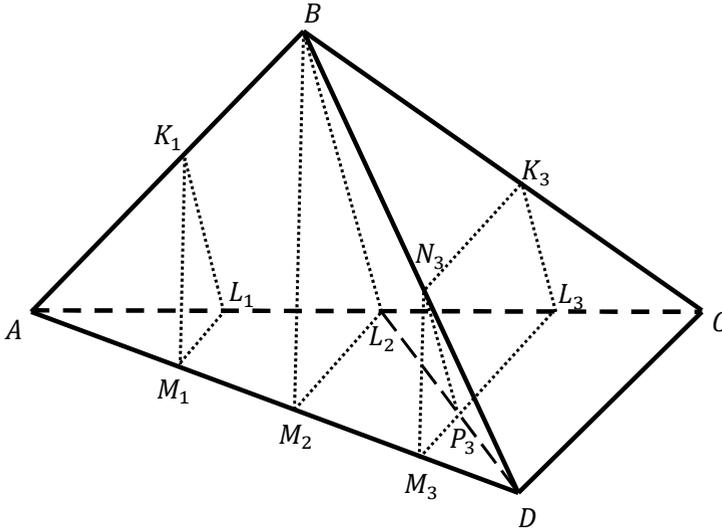


Рис. 4

Тогда некоторая промежуточная плоскость проходит через четвертую вершину пирамиды (на рис. 4 — вершина  $B$ ), пересекает ее по треугольнику (на рис. 4 —  $\triangle BL_2M_2$ ) и разбивает на два многогранника ( $ABL_2M_2$  и  $BCDM_2L_2$ ). Зафиксируем следующие обозначения:

$$\sigma = \frac{1}{2} \cdot BL_2 \cdot CD \cdot \sin \angle BL_2M_2, \quad t_1 = \frac{AL_2}{AC}.$$

Согласно построению  $0 \leq t_1 \leq 1$ . Если  $t_1 = 0$  или  $t_1 = 1$ , то получаем разобранные выше соответственно второй и первый случаи взаимного расположения пирамиды  $\tau$  и семейства  $\gamma$ . Поэтому далее будем считать, что  $0 < t_1 < 1$ .

Рассмотрим варианты расположения точки  $X$ :

а)  $X \in AL_2$  (на рис. 4 роль точки  $X$  играет  $L_1$ ).

Тогда рассматриваемое сечение (на рис. 4 —  $\triangle K_1L_1M_1$ ) является одновременно и сечением пирамиды  $ABL_2M_2$ , грань  $BL_2M_2$  которой лежит в одной из плоскостей семейства  $\gamma$ . Поэтому согласно формуле (1)

$$S_{\triangle K_1L_1M_1} = S_{\triangle BL_2M_2} \cdot \left( \frac{AL_1}{AL_2} \right)^2.$$

Поскольку  $X = L_1$ , имеют место равенства

$$\frac{AL_1}{AL_2} = \frac{t}{t_1}, \quad S_{\Delta K_1 L_1 M_1} = S_{\Delta B L_2 M_2} \cdot \left(\frac{t}{t_1}\right)^2.$$

Вычислим площадь сечения пирамиды  $ABCD$  промежуточной плоскостью:

$$S_{\Delta B L_2 M_2} = \frac{1}{2} \cdot B L_2 \cdot L_2 M_2 \cdot \sin \angle B L_2 M_2.$$

Из соотношений  $\Delta A L_2 M_2 \sim \Delta A C D$  и  $t_1 = \frac{A L_2}{A C}$  следует, что  $L_2 M_2 = t_1 \cdot C D$ . Значит,  $S_{\Delta B L_2 M_2} = \sigma t_1$  и

$$S_{\Delta K_1 L_1 M_1} = \sigma t_1 \left(\frac{t}{t_1}\right)^2 = \frac{\sigma}{t_1} t^2;$$

б)  $X \in L_2 C$  (на рис. 4 роль точки  $X$  играет  $L_3$ ).

Проведем диагональ  $L_2 D$  трапеции  $M_2 L_2 C D$ , затем построим плоскость через эту диагональ и вершину  $B$  пирамиды. Тогда многогранник  $B C D M_2 L_2$  разбивается на две треугольные пирамиды  $M_2 B L_2 D$  и  $L_2 B C D$ , а его сечение, трапеция  $N_3 K_3 L_3 M_3$ , — на треугольник  $\Delta N_3 P_3 M_3$  и параллелограмм  $N_3 K_3 L_3 P_3$ .

Рассматривая  $\Delta N_3 P_3 M_3$  как сечение пирамиды  $M_2 B L_2 D$  плоскостью, параллельной ее грани  $B L_2 M_2$ , согласно формуле (1) получим

$$S_{\Delta N_3 P_3 M_3} = S_{\Delta B L_2 M_2} \cdot \left(\frac{D M_3}{D M_2}\right)^2.$$

Из справедливости соотношений  $\frac{D M_3}{D M_2} = \frac{C L_3}{C L_2}$ ,  $C L_3 = A C - A L_3$  и  $C L_2 = A C - A L_2$  вытекает, что

$$\frac{D M_3}{D M_2} = \frac{A C - A L_3}{A C} \cdot \left(\frac{A C - A L_2}{A C}\right)^{-1} = \frac{1 - t}{1 - t_1}$$

(здесь уже  $X = L_3$ , поэтому  $\frac{A L_3}{A C} = t$ ).

Отсюда, используя найденное ранее значение  $S_{\Delta B L_2 M_2}$ , получим, что

$$S_{\Delta N_3 P_3 M_3} = \sigma t_1 \left(\frac{1 - t}{1 - t_1}\right)^2.$$

Параллелограмм  $N_3 K_3 L_3 P_3$  служит сечением пирамиды  $L_2 B C D$ , в которой  $B L_2$  и  $C D$  являются скрещивающимися ребрами, параллельными плоскостям семейства. Чтобы найти его площадь, как во втором случае, заключим пирамиду  $L_2 B C D$  в окаймляющий параллелепипед. Легко видеть, что площадь грани этого параллелепипеда, содержащей ребро  $B L_2$ , равна  $\sigma$ . Поэтому, пользуясь формулой (2), получаем

$$S_{N_3 K_3 L_3 P_3} = 2\sigma \cdot \frac{L_2 L_3}{L_2 C} \cdot \left(1 - \frac{L_2 L_3}{L_2 C}\right).$$

Применяя соотношения  $L_2 L_3 = A L_3 - A L_2$  и  $L_2 C = A C - A L_2$ , имеем

$$\frac{L_2 L_3}{L_2 C} = \frac{A L_3 - A L_2}{A C} \cdot \left(\frac{A C - A L_2}{A C}\right)^{-1} = \frac{t - t_1}{1 - t_1}.$$

Следовательно,

$$S_{N_3 K_3 L_3 P_3} = 2\sigma \frac{t - t_1}{1 - t_1} \left(1 - \frac{t - t_1}{1 - t_1}\right) = 2\sigma \frac{(t - t_1)(1 - t)}{(1 - t_1)^2},$$

$$S_{N_3K_3L_3M_3} = 2\sigma \frac{(t-t_1)(1-t)}{(1-t_1)^2} + \sigma t_1 \left( \frac{1-t}{1-t_1} \right)^2 = \sigma \frac{1-t}{(1-t_1)^2} (2t - t_1 - t_1t).$$

Таким образом, зависимость площади сечения пирамиды  $\tau$  от значения параметра, определяющего положение плоскости из семейства, в рассматриваемом случае имеет вид

$$f_{\gamma,\tau}(t) = \begin{cases} \frac{\sigma}{t_1} t^2, & t \in [0; t_1], \\ \sigma \frac{1-t}{(1-t_1)^2} (2t - t_1 - t_1t), & t \in (t_1; 1], \\ 0, & t \notin [0; 1]. \end{cases}$$

Покажем, что производная функции  $f_{\gamma,\tau}(t)$  непрерывна в точке  $t_1$ . В самом деле,

$$f_{\gamma,\tau}(t)' \Big|_{t=t_1-0} = \frac{2\sigma}{t_1} t \Big|_{t=t_1} = 2\sigma,$$

$$f_{\gamma,\tau}(t)' \Big|_{t=t_1+0} = \frac{\sigma}{(1-t_1)^2} (2 - 4t + 2t_1t) \Big|_{t=t_1} = 2\sigma.$$

Следовательно, дефект сплайна  $f_{\gamma,\tau}(t)$  равен 1, и потому искомая зависимость пропорциональна В-сплайну степени 2.

*Четвертый случай.* На каждой из предельных плоскостей находится по одной вершине пирамиды (рис. 5).

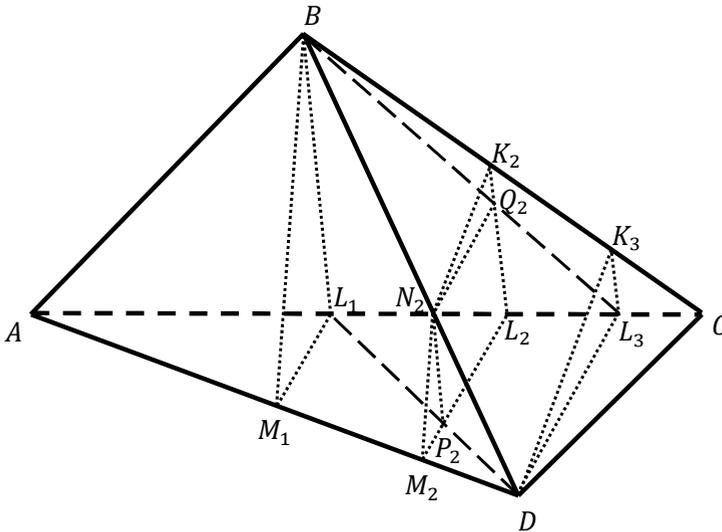


Рис. 5

Тогда существуют две промежуточные плоскости, содержащие оставшиеся две вершины пирамиды (на рис. 5 — вершины  $B$  и  $D$ ). Эти плоскости пересекают пирамиду  $ABCD$  по треугольникам  $(\triangle BL_1M_1)$  и  $(\triangle K_3L_3D)$  и разбивают ее на три многогранника: треугольные пирамиды  $ABL_1M_1$ ,  $C DL_3K_3$  и многогранник  $L_1M_1BK_3L_3D$ . Зафиксируем следующие обозначения:

$$\sigma = \frac{1}{2} \cdot BL_1 \cdot L_3D \cdot \sin \angle BL_1M_1,$$

$$t_1 = \frac{AL_1}{AC}, \quad t_2 = \frac{AL_3}{AC}.$$

Согласно построению справедливы неравенства:  $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1$ . Если  $t_1 = 0$  или  $t_2 = 1$ , то получаем третий случай взаимного расположения пирамиды  $ABCD$  и семейства  $\gamma$ , который описан выше. Поэтому будем считать, что  $0 < t_1 \leq t_2 < 1$ .

Рассмотрим варианты расположения точки  $X$ :

а)  $X \in AL_1$ .

Тогда искомую площадь сечения найдем как площадь сечения пирамиды  $ABL_1M_1$  плоскостью, параллельной ее грани  $BL_1M_1$ . По формуле (1)

$$S_{\text{сеч}} = S_{\Delta BL_1M_1} \cdot \left( \frac{AX}{AL_1} \right)^2,$$

и так как  $\frac{AX}{AL_1} = \frac{t}{t_1}$ , то

$$S_{\text{сеч}} = S_{\Delta BL_1M_1} \cdot \left( \frac{t}{t_1} \right)^2.$$

Вычислим площадь треугольника  $\Delta BL_1M_1$ :

$$S_{\Delta BL_1M_1} = \frac{1}{2} \cdot BL_1 \cdot L_1M_1 \cdot \sin \angle BL_1M_1.$$

Из подобия треугольников  $\Delta AL_1M_1$  и  $\Delta AL_3D$  вытекает, что  $\frac{L_1M_1}{L_3D} = \frac{AL_1}{AL_3}$ . Отсюда и из соотношения  $\frac{AL_1}{AL_3} = \frac{t_1}{t_2}$  получим, что  $L_1M_1 = L_3D \cdot \frac{t_1}{t_2}$  и, следовательно,  $S_{\Delta BL_1M_1} = \sigma \frac{t_1}{t_2}$ .

Значит,  $f_{\gamma, \tau}(t) = \sigma \frac{t^2}{t_1 t_2}$  при  $t \in [0; t_1]$ .

Вычислим производную этой функции в точке  $t_1$  слева:

$$f_{\gamma, \tau}(t)' \Big|_{t=t_1-0} = \frac{2\sigma}{t_2}; \tag{3}$$

б)  $X \in L_3C$ .

Тогда, как и выше, искомую площадь сечения можно найти, рассматривая последнее как сечение пирамиды  $CDL_3K_3$  плоскостью, параллельной ее грани  $K_3L_3D$ :

$$S_{\text{сеч}} = S_{\Delta K_3L_3D} \cdot \left( \frac{CX}{CL_3} \right)^2.$$

Используя соотношения  $CX = AC - AX$  и  $CL_3 = AC - AL_3$ , получим

$$\frac{CX}{CL_3} = \frac{AC - AX}{AC} \cdot \left( \frac{AC - AL_3}{AC} \right)^{-1} = \frac{1 - t}{1 - t_2}.$$

Вычислим площадь треугольника  $\Delta K_3L_3D$ :

$$S_{\Delta K_3L_3D} = \frac{1}{2} \cdot K_3L_3 \cdot L_3D \cdot \sin \angle K_3L_3D.$$

Используя соотношения  $K_3L_3 = BL_1 \cdot \frac{CL_3}{CL_1}$ ,  $CL_3 = AC - AL_3$  и  $CL_1 = AC - AL_1$ , получим

$$K_3L_3 = BL_1 \cdot \frac{AC - AL_3}{AC} \cdot \left( \frac{AC - AL_1}{AC} \right)^{-1} = BL_1 \cdot \frac{1 - t_2}{1 - t_1}.$$

Отсюда и из равенства углов  $\angle BL_1M_1$  и  $\angle K_3L_3D$  вытекает, что

$$S_{\Delta K_3L_3D} = \frac{1}{2} \cdot BL_1 \cdot \frac{1 - t_2}{1 - t_1} \cdot L_3D \cdot \sin \angle BL_1M_1 = \sigma \frac{1 - t_2}{1 - t_1}.$$

Значит,

$$f_{\gamma, \tau}(t) = \sigma \frac{(1 - t)^2}{(1 - t_1)(1 - t_2)}$$

при  $t \in [t_2; 1]$ .

Найдем производную этой функции в точке  $t_2$  справа:

$$f_{\gamma, \tau}(t)' \Big|_{t=t_2+0} = \frac{2\sigma}{t_1 - 1}. \quad (4)$$

Если  $L_1 = L_3$ , то вершины  $B$  и  $D$  принадлежат одной плоскости семейства  $\gamma$ , треугольники  $\Delta BL_1M_1$  и  $\Delta K_3L_3D$  совпадают и пирамида  $ABCD$  является объединением пирамид  $ABL_1M_1$  и  $CDL_3K_3$ . При таком расположении пирамиды и семейства  $\gamma$  справедливо равенство  $t_1 = t_2$ , а потому искомым сплайн имеет вид

$$f_{\gamma, \tau}(t) = \begin{cases} \sigma \frac{t^2}{t_1^2}, & t \in [0; t_1], \\ \sigma \frac{(1 - t)^2}{(1 - t_1)^2}, & t \in (t_1; 1], \\ 0, & t \notin [0; 1]. \end{cases}$$

Для непрерывности производной функции  $f_{\gamma, \tau}(t)$  в точке  $t_1$  в силу (3) и (4) необходимо и достаточно выполнения равенства  $\frac{2\sigma}{t_2} = \frac{2\sigma}{t_1 - 1}$ , но при  $t_1 = t_2$  это невозможно. Значит, если вершины  $B$  и  $D$  пирамиды  $ABCD$  принадлежат одной плоскости семейства  $\gamma$ , то сплайн  $f_{\gamma, \tau}(t)$  имеет дефект 2 и потому не является В-сплайном.

Далее будем считать, что  $L_1 \neq L_3$  и, следовательно,  $t_1 < t_2$ ;

в)  $X \in L_1L_3$  (на рис. 5 роль точки  $X$  играет  $L_2$ ).

Разобьем многогранник  $L_1M_1BK_3L_3D$  на три треугольные пирамиды. Для этого проведем в гранях, которые являются трапециями, по одной диагонали так, чтобы они не имели общих точек (на рис. 5 —  $L_1D$  и  $BL_3$ ). Тогда площадь сечения многогранника  $L_1M_1BK_3L_3D$  (четырехугольника  $K_2L_2M_2N_2$ ) будет представлять собой сумму площадей  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  сечений пирамид  $DBL_1M_1$ ,  $L_1BL_3D$ ,  $BK_3L_3D$  соответственно.

Вычислим площадь сечения треугольной пирамиды  $DBL_1M_1$  — треугольника  $\Delta N_2P_2M_2$ . Согласно (1)

$$S_1 = S_{\Delta BL_1M_1} \cdot \left( \frac{DM_2}{DM_1} \right)^2.$$

Из справедливости соотношений  $\frac{DM_2}{DM_1} = \frac{L_3L_2}{L_3L_1}$ ,  $L_3L_2 = AL_3 - AL_2$  и  $L_3L_1 = AL_3 - AL_1$  вытекает, что

$$\frac{DM_2}{DM_1} = \frac{AL_3 - AL_2}{AC} \cdot \left( \frac{AL_3 - AL_1}{AC} \right)^{-1} = \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1}$$

(напомним, что здесь  $X = L_2$ , и потому  $\frac{AL_2}{AC} = t$ ).

Ранее было установлено, что  $S_{\Delta BL_1 M_1} = \sigma \frac{t_1}{t_2}$ , значит,

$$S_1 = \sigma \frac{t_1}{t_2} \left( \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1} \right)^2.$$

Аналогичным образом вычислим площадь сечения треугольной пирамиды  $BK_3 L_3 D$  — треугольника  $\Delta K_2 Q_2 N_2$ :

$$S_3 = S_{\Delta K_3 L_3 D} \cdot \left( \frac{BK_2}{BK_3} \right)^2.$$

Используя соотношения  $\frac{BK_2}{BK_3} = \frac{L_1 L_2}{L_1 L_3}$ ,  $L_1 L_2 = AL_2 - AL_1$  и  $L_1 L_3 = AL_3 - AL_1$ , заключаем, что

$$\frac{BK_2}{BK_3} = \frac{AL_2 - AL_1}{AC} \cdot \left( \frac{AL_3 - AL_1}{AC} \right)^{-1} = \frac{t - t_1}{t_2 - t_1}.$$

Отсюда, учитывая найденное выше значение площади треугольника  $\Delta K_3 L_3 D$ , получим

$$S_3 = \sigma \frac{1 - t_2}{1 - t_1} \left( \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} \right)^2.$$

Вычислим площадь сечения треугольной пирамиды  $L_1 B L_3 D$  — четырехугольника  $Q_2 L_2 P_2 N_2$ . Скрещивающиеся ребра  $BL_1$  и  $L_3 D$  этой пирамиды лежат в промежуточных плоскостях, принадлежащих семейству  $\gamma$ . Поэтому в силу (2)

$$S_2 = 2\sigma \cdot \frac{L_1 L_2}{L_1 L_3} \cdot \left( 1 - \frac{L_1 L_2}{L_1 L_3} \right),$$

так как  $\frac{1}{2} \cdot BL_1 \cdot L_3 D \cdot \sin \angle BL_1 M_1 = \sigma$  — площадь основания параллелепипеда, окаймляющего пирамиду  $L_1 B L_3 D$ .

Воспользовавшись соотношением  $\frac{L_1 L_2}{L_1 L_3} = \frac{t - t_1}{t_2 - t_1}$ , получим

$$S_2 = 2\sigma \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} \left( 1 - \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} \right) = 2\sigma \frac{(t - t_1)(t_2 - t)}{(t_2 - t_1)^2}.$$

Теперь вычислим значение функции  $f_{\gamma, \tau}(t)$  при  $t_1 \leq t \leq t_2$ :

$$\begin{aligned} f_{\gamma, \tau}(t) &= \sigma \frac{t_1}{t_2} \left( \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1} \right)^2 + \sigma \frac{1 - t_2}{1 - t_1} \left( \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} \right)^2 + 2\sigma \frac{(t - t_1)(t_2 - t)}{(t_2 - t_1)^2} = \\ &= \frac{\sigma}{(t_2 - t_1)^2} \left( \frac{t_1(t - t_2)^2}{t_2} + \frac{(1 - t_2)(t - t_1)^2}{1 - t_1} + 2(t - t_1)(t_2 - t) \right). \end{aligned}$$

Найдем производную этой функции:

$$f_{\gamma, \tau}(t)' = \frac{\sigma}{(t_2 - t_1)^2} \left( \frac{2t_1(t - t_2)}{t_2} + \frac{2(1 - t_2)(t - t_1)}{1 - t_1} + 2t_2 - 4t + 2t_1 \right).$$

Значит, в случае, когда  $t_1 < t_2$ , искомая зависимость представляет собой сплайн с двумя узлами,  $t_1$  и  $t_2$ , и имеет вид:

$$f_{\gamma,\tau}(t) = \begin{cases} \frac{\sigma t^2}{t_1 t_2}, & t \in [0; t_1], \\ \frac{\sigma}{(t_2 - t_1)^2} \left( \frac{t_1(t-t_2)^2}{t_2} + \frac{(1-t_2)(t-t_1)^2}{1-t_1} + 2(t-t_1)(t_2-t) \right), & t \in (t_1; t_2], \\ \frac{\sigma(1-t)^2}{(1-t_1)(1-t_2)}, & t \in (t_2; 1], \\ 0, & t \notin [0; 1]. \end{cases}$$

Чтобы вычислить его дефект, исследуем производную полученной функции на непрерывность в узлах  $t_1$  и  $t_2$ . Согласно (3) и (4)

$$\begin{aligned} f_{\gamma,\tau}(t)'|_{t=t_1+0} &= \frac{\sigma}{(t_2 - t_1)^2} \left( -\frac{2t_1(t_2 - t_1)}{t_2} + 2t_2 - 2t_1 \right) = \\ &= \frac{2\sigma}{t_2} = f_{\gamma,\tau}(t)'|_{t=t_1-0}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{\gamma,\tau}(t)'|_{t=t_2-0} &= \frac{\sigma}{(t_2 - t_1)^2} \left( \frac{2(1-t_2)(t_2 - t_1)}{1-t_1} - 2t_2 + 2t_1 \right) = \\ &= \frac{2\sigma}{t_1 - 1} = f_{\gamma,\tau}(t)'|_{t=t_2+0}. \end{aligned}$$

Следовательно, дефект сплайна  $f_{\gamma,\tau}(t)$  равен 1.

Таким образом, если вершины  $B$  и  $D$  исходной пирамиды не лежат в одной плоскости семейства, то искомая зависимость  $f_{\gamma,\tau}(t)$  пропорциональна В-сплайну степени 2. Теорема доказана.

#### Библиографический список

1. Варга Р. Функциональный анализ и теория аппроксимации в численном анализе. М. : Мир, 1974. 124 с.
2. Доля П. Г. Об одном способе представления полиномиальных сплайнов в системах символьной математики // Вестник Харьковского национального университета. Сер.: Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления. 2007. Вып. 7. С. 130–139.
3. Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций. М. : Наука, 1980. 352 с.
4. Лыткин С. М. Разложение по системе сдвигов В-сплайна // Математические заметки. 2009. Т. 86, вып. 6. С. 859–869.
5. Мокшин П. В., Рожненко А. И. О поиске оптимального параметра сглаживающего сплайна // Сибирский журнал индустриальной математики. 2015. Т. 18, № 2. С. 63–73.
6. Рожненко А. И. Теория и алгоритмы вариационной сплайн-аппроксимации : дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Новосибирск, 2003. 231 с.
7. Фёдорова О. П., Кулиш О. В. О задании дополнительных условий в методе построения сплайна, сохраняющего интеграл функции по области ее задания // Вестник Томского государственного университета. Сер.: Математика и механика. 2010. № 1. С. 47–52.
8. Curry H. B., Schoenberg I. J. On Polya frequency functions. IV. The fundamental spline functions and their limits // J. Anal. Math. 1966. Vol. 17. P. 71–107.
9. Schoenberg I. J. Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions. Part A : On the problem of smoothing or graduation. A first class of analytic approximation formulae // Quart. Appl. Math. 1946. Vol. 4, № 1. P. 45–99.
10. Schoenberg I. J. Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions. Part B : On the problem of osculatory interpolation. A second class of analytic approximation formulae // Quart. Appl. Math. 1946. Vol. 4, № 2. P. 112–141.