УДК 512.714

Ю. А. Хашина

БИКВАДРАТИЧНЫЕ ФУНКЦИИ И ИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ В ВИДЕ СУММЫ КВАДРАТОВ

Если биквадратичная функция может быть представлена в виде суммы нескольких полных квадратов билинейных функций, то ее можно представить в виде суммы не более трех таких слагаемых и неотрицательной константы.

Ограниченная снизу биквадратичная функция с положительным старшим коэффициентом может быть представлена в виде суммы трех квадратов билинейных функций, имеющих общий ноль, и константы, равной наименьшему значению биквадратичной функции.

Ключевые слова: биквадратичная функция, экстремум.

If the biquadratic function can be represented as a sum of several complete squares of bilinear functions, than it can be represent in the form of a sum of not more than three such terms and non-negative constant.

If the biquadratic function with positive leading coefficient bounded from below, than it can be represented as a sum of three squares of bilinear functions with common zero and biquadratic functions minimum.

Key words: biquadratic function, extremum.

Биквадратичная функция — это многочлен от двух переменных, квадратичный по каждой из них:

$$a_{22}x^2y^2 + 2a_{21}x^2y + 2a_{12}xy^2 + a_{20}x^2 + 2a_{11}xy + a_{02}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{01}y + a_{00}.$$

Биквадратичные функции появляются, например, при решении некоторых задач компьютерной графики. Они часто возникают как суммы квадратов билинейных функций. Желательно получить эффективный способ нахождения минимума неотрицательной биквадратичной функции.

Теорема 1. *Если биквадратичная функция может быть представлена в виде суммы нескольких полных квадратов билинейных функций:*

$$a_{22}x^2y^2 + 2a_{21}x^2y + 2a_{12}xy^2 + a_{20}x^2 + a_{02}y^2 + 2a_{11}xy + 2a_{10}x + 2a_{01}y + a_{00} = \\ = \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k xy + \beta_k x + \gamma_k y + \delta_k)^2, \tag{1}$$

то ее можно представить в виде:

◦ *суммы не более четырех таких слагаемых;*

◦ *суммы не более трех таких слагаемых и неотрицательной константы.*

Доказательство. Существование представления (1) эквивалентно равенству соответствующих коэффициентов:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 = a_{22} \\ \sum_{k=1}^{n} \beta_k^2 = a_{20} \\ \sum_{k=1}^{n} \gamma_k^2 = a_{02} \\ \sum_{k=1}^{n} \delta_k^2 = a_{00} \\ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\beta_k = a_{21} \\ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\gamma_k = a_{12} \\ \sum_{k=1}^{n} \beta_k\delta_k = a_{10} \\ \sum_{k=1}^{n} \gamma_k\delta_k = a_{01} \\ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\delta_k + \sum_{k=1}^{n} \beta_k\gamma_k = a_{11} \end{cases} \tag{2}$$

или, в векторной форме,

$$\begin{cases} \alpha^2 = a_{22} \\ \beta^2 = a_{20} \\ \gamma^2 = a_{02} \\ \delta^2 = a_{00} \\ \alpha\beta = a_{21} \\ \alpha\gamma = a_{12} \\ \beta\delta = a_{10} \\ \gamma\delta = a_{01} \\ \alpha\delta + \beta\gamma = a_{11}, \end{cases} \tag{3}$$

где α, β, γ, δ — векторы строк коэффициентов.

Выберем ортонормированный базис линейной оболочки $\langle\alpha, \beta, \gamma, \delta\rangle$. В этом базисе векторы α, β, γ, δ будут задаваться не более чем четырьмя координатами. Равенства (3), а следовательно, и равенства (2) будут выполнены, что означает существование представления (1) для $n \leq 4$.

Далее, выберем ортонормированный базис линейной оболочки $\langle\alpha, \beta, \gamma, \delta\rangle$ так, чтобы α, β и γ являлись линейными комбинациями первых трех векторов этого базиса. Тогда $\alpha_4 = \beta_4 = \gamma_4 = 0$ и четвертое слагаемое разложения (1) равно δ_4^2.

Следствие 1. *Необходимым условием существования представления (1) является выполнение неравенств*

$$a_{22} \geq 0,\ a_{20} \geq 0,\ a_{02} \geq 0,\ a_{00} \geq 0$$

и, согласно неравенству Коши — Буняковского, неравенств

$$a_{22}a_{20} \geq a_{21}^2,\ a_{22}a_{02} \geq a_{12}^2,\ a_{00}a_{20} \geq a_{10}^2,\ a_{00}a_{02} \geq a_{01}^2.$$

Следствие 2 (сферическая интерпретация). *Пусть $\delta_4 = 0$ и выполнены необходимые условия из следствия 1. Рассмотрим трехмерные единичные векторы α, β, γ, δ такие, что*

$$\cos(\alpha,\beta) = \frac{a_{21}}{\sqrt{a_{22}a_{20}}},\ \cos(\alpha,\gamma) = \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{22}a_{02}}},$$
$$\cos(\beta,\delta) = \frac{a_{10}}{\sqrt{a_{20}a_{00}}},\ \cos(\gamma,\delta) = \frac{a_{01}}{\sqrt{a_{02}a_{00}}},$$
$$\cos(\alpha,\delta)\sqrt{a_{22}a_{00}} + \cos(\beta,\gamma)\sqrt{a_{20}a_{02}} = a_{11}.$$

Таким образом, задача нахождения представления биквадратичной функции в виде суммы трех квадратов билинейных функций сводится к решению на единичной сфере четырехугольника по его сторонам и линейному соотношению длин диагоналей.

Предложение 1 [2]**.** *Биквадратичная функция с положительным старшим коэффициентом заменой координат может быть приведена к каноническому виду*

$$F = x^2y^2 + ax^2 + by^2 + 2cxy + 2dx + 2ey + f,$$

где a и b равны 0 или ± 1.

Если минимум биквадратичной функции равен нулю, ее каноническая форма тоже обладает этим свойством.

Заметим, что задача нахождения минимума функции F равносильна задаче нахождения значения $f = f(a,b,c,d,e)$, для которого $\min F = 0$.

Предложение 2. *Легко убедиться, что*

- *$f(-1,b,c,d,e)$ и $f(a,-1,c,d,e)$ не существуют;*
- *для существования конечного $f(0,b,c,d,e)$ необходимо $d = 0$ и для существования конечного $f(a,0,c,d,e)$ необходимо $e = 0$;*
- *$f(0,0,c,0,0) = c^2$;*
- *$f(1,0,0,0,0) = f(0,1,0,0,0) = 0$;*
- *$f(1,0,c,d,0) = c^2 + d^2$, если $d \neq 0$, и $f(0,1,c,0,e) = c^2 + e^2$, если $e \neq 0$;*
- *$f(1,0,c,0,0)$ и $f(0,1,c,0,0)$ в случае $c \neq 0$ не существуют.*

Далее $a = b = 1$, то есть биквадратичная функция имеет вид

$$F = x^2y^2 + x^2 + y^2 + 2cxy + 2dx + 2ey + f.$$

Пусть $f(c,d,e) = f(1,1,c,d,e)$. Поскольку замена переменных не меняет минимум функции, то справедливо

Предложение 3. *Имеют место равенства*

$$f(c,d,e) = f(-c,-d,e) = f(c,-d,-e) = f(-c,d,-e) = f(c,e,d).$$

Пример 1. Пусть $c = -de$.

Так как каждая из билинейных функций в правой части равенства

$$F = x^2y^2 + x^2 + y^2 + 2cxy + 2dx + 2ey + f =$$
$$= (xy+c)^2 + (x+d)^2 + (y+e)^2 + f - c^2 - d^2 - e^2$$

обращается в ноль в точке $(-d,-e)$, то $\min F = f - c^2 - d^2 - e^2$ и

$$f(-de,d,e) = c^2 + d^2 + e^2.$$

В общем случае, если F представимо в виде суммы трех квадратов билинейных функций, принимающих нулевое значение в некоторой общей точке (p, q), то наименьшее значение F равно нулю.

Теорема 2. *Если минимум биквадратичной функции*

$$F = x^2y^2 + x^2 + y^2 + 2cxy + 2dx + 2ey + f,$$

где $d \neq \pm e$, равен нулю, то она представима в виде суммы трех квадратов билинейных функций, равных нулю в общей точке (p, q):

$$F = \sum_{i=1}^{3} (\alpha_i xy + \beta_i x + \gamma_i y - (\alpha_i pq + \beta_i p + \gamma_i q))^2, \tag{4}$$

где p — корень уравнения

$$p^5 + dp^4 + 2p^3 + (ce + 2d)p^2 + (1 - c^2 + e^2)p + (d - ce) = 0,$$

удовлетворяющий системе неравенств

$$\begin{cases} p^2 + ep + 1 - c \geq 0 \\ p^2 - ep + 1 + c \geq 0 \end{cases}$$

(такой корень обязательно существует),

$$q = -\frac{e + cp}{1 + p^2}.$$

Значение свободного члена f, при котором $\min F = 0$,

$$f = 3p^2q^2 + p^2 + q^2 + 2cpq.$$

Доказательство. Существование представления (4) равносильно существованию решения системы

$$\begin{cases} \alpha^2 = 1 \\ \beta^2 = 1 \\ \gamma^2 = 1 \\ \delta^2 = f \\ \alpha\beta = 0 \\ \alpha\gamma = 0 \\ \beta\delta = -d \\ \gamma\delta = -e \\ \alpha\delta - \beta\gamma = -c, \end{cases} \tag{5}$$

где α, β, γ — векторы строк коэффициентов, $\delta = pq\alpha + p\beta + q\gamma$.

Следовательно, для нахождения представления (4) необходимо и достаточно найти числа p и q и векторы $|\alpha| = |\beta| = |\gamma| = 1$, $\alpha \perp \beta$, $\alpha \perp \gamma$, $\delta = pq\alpha + p\beta + q\gamma$ такие, что

$$\begin{cases} \beta\delta = -d \\ \gamma\delta = -e \\ \alpha\delta - \beta\gamma = -c. \end{cases} \tag{6}$$

В этом случае $f(c, d, e) = \delta^2$.

Если решение системы (6) существует, то $\alpha\delta = \alpha(pq\alpha + p\beta + q\gamma) = pq$ и, следовательно, $\beta\gamma = \alpha\delta + c = pq + c$. Причем так как $|\beta\gamma| \leq 1$, то $|pq + c| \leq 1$. Поэтому

$$-d = \beta\delta = \beta(pq\alpha + p\beta + q\gamma) = p + q\beta\gamma = p + q(pq + c) = p + cq + pq^2,$$

$$-e = \gamma\delta = \gamma(pq\alpha + p\beta + q\gamma) = p\beta\gamma + q = p(pq + c) + q = q + cp + p^2 q.$$

Таким образом, следствием системы (6) является система

$$\begin{cases} p + cq + pq^2 = -d \\ q + cp + p^2 q = -e \\ |pq + c| \leq 1. \end{cases}$$

Выразив из второго уравнения q, подставим в первое:

$$\begin{cases} p^5 + dp^4 + 2p^3 + (ce + 2d)p^2 + (1 - c^2 + e^2)p + (d - ce) = 0 \\ q = -\frac{e+cp}{1+p^2} \\ |pq + c| \leq 1. \end{cases}$$

Далее,

$$|c + pq| \leq 1 \iff \left|c - p\frac{e + cp}{1 + p^2}\right| \leq 1 \iff |c - ep| \leq 1 + p^2 \iff$$

$$\begin{cases} p^2 + ep + 1 - c \geq 0 \\ p^2 - ep + 1 + c \geq 0. \end{cases} \qquad (7)$$

Таким образом, для нахождения представления (4) необходимо найти корень p уравнения

$$p^5 + dp^4 + 2p^3 + (ce + 2d)p^2 + (1 - c^2 + e^2)p + (d - ce) = 0, \qquad (8)$$

удовлетворяющий системе неравенств (7).

Обратно, если существует такой корень p, то для $q = -\frac{e+cp}{1+p^2}$ выполнено $|c + pq| \leq 1$. Следовательно, существуют единичные векторы α, β, γ такие, что $\alpha \perp \beta$, $\alpha \perp \gamma$ и $\beta\gamma = c + pq$. Значит, выполнены равенства (5) и существует представление (4).

Заметим, что неравенства (7) получаются друг из друга одновременной сменой знака e и c, а уравнение (8) инвариантно относительно такой замены.

В случае $|c| \leq 1 - \frac{e^2}{4}$ каждое из неравенств выполнено для всех p, $\lim_{p\to\pm\infty} G(p) = \pm\infty$, следовательно, искомый корень существует.

Если $c > 1 - \frac{e^2}{4}$, то первое неравенство эквивалентно условию

$$p \in (-\infty, p_1] \cup [p_2, +\infty),$$

где $p_1 \neq p_2$ — корни уравнения $p^2 + ep + 1 - c = 0$.

Значения в точках $p_{1,2}$ многочлена

$$G(p) = p^5 + dp^4 + 2p^3 + (ce + 2d)p^2 + (1 - c^2 + e^2)p + (d - ce)$$

равны значениям в этих точках остатка $g_1(p)$ от деления $G(p)$ на многочлен $p^2 + ep + 1 - c$. Находим

$$g_1(p) = (d - e)(-(2ec + e^3)p + c^2 + ce^2 - e^2)$$

и, пользуясь теоремой Виета, получаем

$$g_1(p_1)g_1(p_2) = (d - e)^2(c^2 + e^2)^2.$$

Случай $d = e$ рассматривается в [1].

В случае $c = e = 0$

$$F = x^2y^2 + x^2 + y^2 + 2dx + f = (xy)^2 + (x+d)^2 + y^2 + f - d^2;$$

таким образом, F — сумма трех квадратов с общим нулем в точке $(-d, 0)$, $f = d^2$.

Для $c^2 + e^2 > 0$, $d \neq e$ получаем, что $G(p_1)G(p_2) = g_1(p_1)g_1(p_2) > 0$. Значит, для $c > 1 - \frac{e^2}{4}$ существует корень $G(p)$, удовлетворяющий первому неравенству.

Аналогично, если $-c > 1 - \frac{e^2}{4}$, то второе неравенство эквивалентно условию

$$p \in (-\infty, p_3) \cup (p_4, +\infty),$$

где $p_3 \neq p_4$ — корни уравнения $p^2 - ep + 1 + c = 0$.

Значения в точках $p_{3,4}$ многочлена $G(p)$ равны значениям в этих точках остатка

$$g_2(p) = (d+e)(-(2ec - e^3)p + c^2 - ce^2 - e^2)$$

от деления $G(p)$ на $p^2 - ep + 1 + c$. По теореме Виета получаем

$$g_2(p_3)g_2(p_4) = (d+e)^2(c^2 + e^2)^2.$$

Случай $d = -e$ следует, согласно свойствам $f(c, d, e)$, из случая $d = e$. Для $c^2 + e^2 > 0$, $d \neq -e$ получаем, что $G(p_3)G(p_4) = g_2(p_3)g_2(p_4) > 0$. Значит, для $-c > 1 - \frac{e^2}{4}$ существует корень $G(p)$, удовлетворяющий второму неравенству.

Таким образом, для $-|c| \leq 1 - \frac{e^2}{4} \leq |c|$ существует корень уравнения (8), удовлетворяющий одному из неравенств (7), а другое неравенство верно для всех p.

Осталось рассмотреть случай $1 - \frac{e^2}{4} \leq -|c|$.

Заметим, что

$$(p_1, p_2) \cap (p_3, p_4) = \varnothing.$$

Действительно, если $p_0 \in (p_1, p_2) \cap (p_3, p_4)$, то

$$\begin{cases} p_0^2 + ep_0 + 1 - c < 0 \\ p_0^2 - ep_0 + 1 + c < 0. \end{cases}$$

Следовательно,

$$p_0^2 + ep_0 + 1 - c < 0 < -p_0^2 + ep_0 - 1 - c$$

и

$$2p_0^2 + 2 < 0.$$

Таким образом, в случае $1 - \frac{e^2}{4} \leq -|c|$ системе неравенств (7) удовлетворяют все точки прямой за исключением двух непересекающихся интервалов (p_1, p_2) и (p_3, p_4).

Так как $G(p_1)G(p_2) > 0$, $G(p_3)G(p_4) > 0$ и $\lim_{p \to \pm\infty} G(p) = \pm\infty$, то искомый корень p уравнения (8) существует, причем

- $p < \min p_i$, если все $G(p_i) > 0$,
- $p > \max p_i$, если все $G(p_i) < 0$,
- p лежит в промежутке между интервалами (p_1, p_2) и (p_3, p_4), если имеются два плюса и два минуса.

Итак, корень уравнения (8), удовлетворяющий системе неравенств (7), всегда существует, что означает существование представления (4) биквадратичной функции в виде суммы трех квадратов с общим нулем.

Так как $f = \delta^2$, $\delta = pq\alpha + p\beta + q\gamma$, то

$$f = (pq\alpha + p\beta + q\gamma)^2 = p^2q^2 + p^2 + q^2 + 2pq(pq + c) = 3p^2q^2 + p^2 + q^2 + 2pqc.$$

Теорема доказана.

Библиографический список

1. *Кадочникова А. В.* Условия неотрицательности биквадратичной функции : дис. ... магистра математики / Иван. гос. ун-т. Иваново, 2017. 33 с.
2. *Митрофанова М. К.* Каноническая форма биквадратного многочлена : дипломная работа / Иван. гос. ун-т. Иваново, 2005. 100 с.