Так как на изображениях присутствует неаппроксимируемый шум (например, импульсный), предварительная фильтрация исходных изображений при оценке качества интерполяционной формулы имеет смысл.

В среднем (для нечетных точек) предложенная формула (4) дает более точную аппроксимацию, чем билинейная интерполяция при одинаковом числе интерполяционных узлов.

Используя аналогичный подход, для конфигурации точек, состоящей из 16 узлов, можно получить обобщение алгоритмов [2, 3].

Библиографический список

1. Набор тестовых изображений. URL: http://math.ivanovo.ac.ru/dalgebra/Khashin/bmp_ex/index.html (дата обращения: 03.04.2018).
2. *Jing L., Zongliang G., Xiuchang Z.* Directional bicubic interpolation — a new method of image super-resolution // Proc. of 3rd Intern. Conf. on Multimedia Technology (ICMT-13). Atlantis Press, 2013. P. 470—477.
3. *Zhou D., Shen X., Dong W.* Image zooming using directional cubic convolution interpolation // IET Image Processing. 2012. Vol. 6, № 6. P. 627—634.

УДК 519.852

А. Ф. Вялов

СИМПЛЕКС-АЛГОРИТМ И ПОЛНОСТЬЮ ВЫРОЖДЕННАЯ ЗАДАЧА

Для исследования задачи линейного программирования введено понятие направления в n-мерном пространстве. Доказано что полностью вырожденная задача имеет особое решение и играет важную роль в анализе общей задачи линейного программирования. Решена полностью вырожденная задача. Выводы подчеркивают ценность исследования полностью вырожденной задачи.

Ключевые слова: линейное программирование, оптимальное управление, оптимизация.

For a problem of linear programming research the concept of a direction in n-dimensional space is entered. It is proved that completely degenerate problem has a special solution and plays an important role in the analysis of the general problem of linear programming. The degenerate problem is solved completely. Conclusions underline value of research completely degenerate problem.

Key words: linear programming, optimum control, optimization.

В задаче линейного программирования (ЗЛП) [1, 3]: найти минимум линейной формы или, как говорят, функции цели

$$(C, X) \to \min \tag{1}$$

при ограничениях на X в виде системы $m < n$ линейных уравнений

$$AX = B \tag{2}$$

и системы n неравенств

$$x_i \geq 0, \ i = 1, \dots, n, \tag{3}$$

числовая строка $C = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ определяет направление возрастания функции цели в n-мерном евклидовом пространстве E_n.

Система линейных уравнений заранее преобразована: $\operatorname{rk} A = m$.

В линейной алгебре элементом евклидова пространства E_n является числовая строка, состоящая из n чисел. Под направлением в пространстве E_n будем понимать нормированную строку чисел, например $C/|C|$. В геометрическом пространстве E_n направление — вектор единичной длины, исходящий из точки O.

Геометрическое пространство E_n можно представлять себе не только как множество точек, но, например, как множество лучей, проведенных из точки O во всевозможных направлениях, так как любая точка в E_n принадлежит одному из этих лучей [2].

Одновременно вводится изоморфное евклидово пространство векторов из геометрического пространства, элементом которого является вектор, проведенный из точки O в точку с координатами, указанными в числовой строке.

Обозначим нулевую числовую строку $O = (0, \ldots, 0)$.

Известно, что система m линейных уравнений (2), если $B \neq O$, описывает сдвинутое подпространство E_{n-m} пространства E_n как результат пересечения m гиперплоскостей в E_n.

Система неравенств (3) описывает[1] неотрицательный n-мерный конус K. Вершина конуса K — точка O.

Пересечение подпространства E_{n-m} с конусом K есть либо выпуклое многогранное множество точек (числовых строк) M размерности[2] $n - m$ (иначе говоря, M — фрагмент сдвинутого подпространства E_{n-m}), либо пустое множество (конус и подпространство не пересекаются).

Исследуем, как, используя симплекс-алгоритм, решить полностью вырожденную ЗЛП, в которой система линейных уравнений имеет вид $AX = O_m$. О том, что это — особая задача, говорит следующая

Теорема. *Задача линейного программирования может быть полностью вырожденной только изначально.*

Предположим противное: изначально ограничения в задаче $AX = B$, $B \neq O_m$, и после нескольких шагов симплекс-алгоритма оказалось, что $D(AX) = O_m$ ($\det D \neq 0$). Это означает невозможное $DB = O_m$.

Множество направлений, в которых можно провести луч из точки O в конусе K, обозначим L. Конус K также является множеством лучей в E_n.

Фрагмент M подпространства E_{n-m} полностью вырожденной ЗЛП есть результат пересечения подпространства E_{n-m} (решения системы однородных линейных уравнений) с конусом K, описанным в (3). Пересечение никогда не пусто[3].

Множество направлений подпространства E_{n-m} содержит направления из подмножества L множества направлений конуса K. Лучи, проведенные в E_{n-m} из точки O в этих направлениях, образуют конус M.

Пересечение M — конус, состоящий из лучей с вершиной в начале системы координат O пространства E_n, потому что лучи, проведен-

---

[1] Если строки в матрице A линейно независимы.

[2] Вообще говоря, размерность фрагмента M лежит в диапазоне $[0, n - m]$.

[3] В ЗЛП (1)—(3) может быть пусто.

ные в E_{n-m} в остальных направлениях из множества направлений подпространства E_{n-m}, имеют с конусом K одну общую точку O.

Анализ возможных множеств M в полностью вырожденной ЗЛП приводит к заключению: функция цели $(C, X^*) = 0$ и решение $X^* = O$, либо функция цели на множестве M неограниченно убывает $(C, X) \to -\infty$, у задачи нет решения. Второе происходит только тогда, когда множество M содержит луч, направленный в сторону убывания функции цели, т. е. $(C, G) < 0$, где G — направление луча.

Если в M невозможно провести луч в направлении G таком, что $(C, G) < 0$, но M содержит луч с направлением G^*, $(C, G^*) = 0$, то весь этот луч (каждая точка луча) есть решение ЗЛП.

Если в M все лучи направлены в сторону возрастания функции цели (для любого луча из M выполняется $(C, G) > 0$, где G — направление луча) или в M невозможно провести луч, то решение ЗЛП — $X^* = O$.

Применение симплекс-алгоритма к решению полностью вырожденной ЗЛП характеризуется отсутствием этапа 1, в котором вводится искусственный базис. Поэтому необходимо лишь привести матрицу A к каноническому виду $\tilde{A}$. В $\tilde{A}$ первые столбцы образуют единичную подматрицу.

Затем, решив измененную (изменения коснулись лишь системы уравнений) задачу:

$$(C, Y) \to \min, \tag{4}$$

$$\tilde{A}Y = B \tag{5}$$

(подпространство $AY = O$ сдвинуто), где $b_l, \ldots, b_m$ — случайные положительные числа;

$$y_i \geq 0, \ i = 1, \ldots, n, \tag{6}$$

получим[4]: функция цели — либо $(C, Y^*) = \text{const}$, либо $(C, Y) \to -\infty$.

Первому решению измененной задачи (функция цели $(C, Y^*) = \text{const}$) в исходной полностью вырожденной ЗЛП соответствует $X^* = O$ и функция цели $(C, X^*) = 0$. Второму $(C, Y) \to -\infty$ соответствует $(C, X) \to -\infty$.

Примечание. Случайные положительные числа $b_l, \ldots, b_m$ не обязаны быть малыми. Это видно из импликации

$$k\tilde{A}Y = kB \Rightarrow \tilde{A}(kY) = kB.$$

Точка $X = (b_l, \ldots, b_m, 0, \ldots, 0)$ принадлежит и конусу K, и сдвинутому подпространству (5). X — числовая строка сдвига подпространства $AY = O_m$.

Пусть полностью вырожденная ЗЛП не имеет решения. Тогда множество направлений конуса M этой задачи содержит направление $G \in L$, $(C, G) < 0$ и в M из точки O можно провести луч в этом направлении, движение по которому приведет к неограниченному убыванию целевой функции. Проведем луч в E_n в направлении G из точки X; он принадлежит конусу K и сдвинутому подпространству (5), так как множество направлений сдвинутого подпространства (5) тоже содержит направление G.

Обратное доказывается, если провести луч из точки O в том же самом направлении, что и в измененной задаче.

[4] Вероятность вырождения в процессе решения практически равна нулю, так как $b_l, \ldots, b_m$ — случайные числа с длинной мантиссой.

Выводы. То, будет ли у задачи линейного программирования решение или нет (функция цели $(C, X) \to -\infty$), не зависит от B, а определяется лишь A и C. Матрица B влияет на то, пусто множество M или нет.

Библиографический список

1. *Гасс С.* Линейное программирование : (методы и приложения). М. : Физматгиз, 1961. 303 с.
2. *Гельфанд И. М.* Лекции по линейной алгебре. М. : ГИТТЛ, 1951. 252 с.
3. *Данциг Дж.* Линейное программирование, его применения и обобщения. М. : Прогресс, 1966. 600 с.

УДК 519.67

В. Д. Голубев, С. И. Хашин

ЧИСЛА, ПСЕВДОПРОСТЫЕ ПО ФРОБЕНИУСУ, БЕЗ БОЛЬШИХ ДЕЛИТЕЛЕЙ

Доказано, что если метод Фробениуса проверки чисел на простоту ошибается на некотором числе $n \equiv 3 \pmod 4$, то у него обязательно есть простой делитель, больший 2707. Таким образом, найден еще один факт, свидетельствующий в пользу гипотезы о том, что чисел, псевдопростых по Фробениусу, не существует.

Ключевые слова: проверка простоты числа, метод Фробениуса, метод Миллера — Рабина.

It is proved that if the Frobenius method of primality test have an error on number $n \equiv 3 \pmod 4$, then it necessarily has a prime divisor greater than 2707. Thus, we find one more fact that supports the hypothesis that there are no Frobenius pseudoprimes.

Key words: prime numbers, primality test, Frobenius method, Miller — Rabin method.

1. Введение

Определение 1. Пусть n — нечетное натуральное число, не являющееся полным квадратом. Его *индексом Фробениуса* $\mathrm{Ind}_F(n)$ будем называть наименьшее среди чисел $[-1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ \ldots]$ такое, что символ Якоби $J(c/n) \neq 1$.

Определение 2. Пусть n — нечетное натуральное число, не являющееся полным квадратом, и пусть $c = \mathrm{Ind}_F(c)$ — его индекс Фробениуса. Пусть

$$z = \begin{cases} 2 + \sqrt{c}, & c = -1, 2; \\ 1 + \sqrt{c}, & c \geq 3. \end{cases}$$

Будем называть n *простым по Фробениусу* [2, 3, 6], если

$$z^n \equiv \overline{z} \pmod n.$$