УДК 517.94

Н. Г. Косарев, Д. В. Туртин

ОБ ОДНОЙ ОЦЕНКЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ С МИНИМАЛЬНЫМ РОСТОМ ПО ПАРАМЕТРУ

Получена точная оценка сверху решения системы линейных дифференциальных уравнений с комплексным параметром. Эта оценка позволяет доказать теорему о неединственности решения задачи Коши для системы уравнений в частных производных.

Ключевые слова: характеристическое уравнение, диаграмма Ньютона, последовательные приближения, дифференциальные неравенства.

A sharp upper estimate of the solution of a system of the differential equations with complex parameter is obtained. This estimate makes possible to proof non-uniqueness solution the theorem of Cauchy problem for system of partial differential equations.

Key words: characteristic equation, chart of Newton, successive approximation, differential inequalities.

Введение

Оценки решений дифференциальных уравнений, выполняющиеся при всех значениях аргумента и при некоторых значениях входящего в уравнение комплексного параметра, достаточно часто встречаются в различных разделах анализа. В случае, когда в линейном обыкновенном дифференциальном уравнении зависимость коэффициентов от комплексного параметра λ полиномиальная, наиболее общий результат таких оценок получен в [2] и [3]. Отметим, что оценки решений таких уравнений зависят от роста по λ при $\lambda \to \infty$ корней соответствующих характеристических уравнений. Этот рост определяется диаграммой Ньютона характеристического уравнения. В [2] и [3] все корни характеристического уравнения имели одинаковый порядок роста по λ при $\lambda \to \infty$. При этом была получена оценка сверху фундаментальной матрицы решений уравнения.

В [4] рассмотрено дифференциальное уравнение с характеристическим уравнением, имеющим корни различного порядка роста по λ. Если к такому уравнению применить методы, изложенные в [2, 3], то для решений уравнения получается оценка с максимальным порядком роста по λ при $\lambda \to \infty$. Естественно возникает вопрос: существуют ли решения таких уравнений с минимальным порядком роста по λ? В данной работе показано, что такие решения существуют для некоторого класса линейных систем с переменными растущими коэффициентами. Для решения одного уравнения такая оценка получена в [6].

Теорема об оценке

Рассмотрим систему уравнений

$$Y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m_k} A_{kj}(x) \lambda^j Y^{(k)}, \tag{1}$$

где $x \in \mathrm{R}$, $\mathrm{Re}\,\lambda > \alpha > 0$, $m_0 > m_k\,(k = \overline{0, n-1})$, $A_{kj}(x)$ — квадратные матрицы порядка s с элементами — непрерывными комплекснозначными функциями.

Обозначим

$$Y^{(k)}(x,\lambda) = Y_k(x,\lambda) \quad (k = \overline{0, n-1}),$$
$$\bar{Y}(x,\lambda) = (Y_0(x,\lambda),\, \ldots,\, Y_{n-1}(x,\lambda))^T$$

и обычным образом сведем (1) к системе уравнений первого порядка

$$\bar{Y}'(x,\lambda) = A(x,\lambda)\bar{Y}(x,\lambda), \tag{2}$$

где матрица $A(x,\lambda)$ имеет вид

$$A(x,\lambda) = \begin{pmatrix} O & E & O & \ldots & O \\ O & O & E & \ldots & O \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ O & O & O & \ldots & E \\ \Delta_1(x,\lambda) & \Delta_2(x,\lambda) & \Delta_3(x,\lambda) & \ldots & \Delta_n(x,\lambda) \end{pmatrix},$$

причем

$$\Delta_{i+1}(x,\lambda) = \sum_{j=0}^{m_i} A_{ij}(x)\lambda^j \; (i = \overline{0, n-1}),$$

O, E — соответственно нулевая и единичная матрицы размерности $s \times s$.

В случае, когда (1) — скалярное уравнение ($A_{kj}(x) = a_{kj}(x)$, $s = 1$), соответствующее (1) характеристическое уравнение имеет вид

$$P(x,\lambda) = \omega^n - \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m_k} a_{kj}(x)\lambda^j\omega^k = 0. \tag{3}$$

Введем основные обозначения для диаграммы Ньютона [8] уравнения (3). Пусть «верхняя» часть диаграммы при любом x имеет одни и те же узловые точки (k_l, m_{k_l}), определяющие N ее звеньев ($l = \overline{0, N}$), и $(\alpha_{lj},\, m_{\alpha_{lj}})$ — точки, соответствующие некоторым мономам многочлена $P(x,\lambda)$ и лежащие на l-м звене ($l = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, q_l}$, $q_l = k_l - k_{l-1}$, $\alpha_{lq_l} = k_l$) диаграммы Ньютона этого многочлена, причем $\alpha_{l0} < \alpha_{l1} < \ldots < \alpha_{lq_l}$.

Пусть γ_l — тангенсы углов, образованных l-м звеном диаграммы и отрицательным направлением оси абсцисс ($\gamma_1 < \gamma_2 < \ldots < \gamma_N$). Известно [8], что γ_l — показатели асимптотического разложения корней уравнения (3) по степеням λ в окрестности точки $\lambda = \infty$.

Ранее в [5] было показано, что диаграммы Ньютона уравнения (3) и характеристического для (1) уравнения

$$\det\left\{\omega^n E - \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m_k} A_{kj}(x)\lambda^j\omega^k\right\} = 0 \tag{4}$$

подобны с коэффициентом подобия s. Поэтому введенные выше обозначения характеристик диаграмм Ньютона многочлена $P(x,\lambda)$ можно сохранить для многочлена $\Delta(x,\lambda)$ с учетом подобия: длины звеньев увеличиваются в s раз, а показатели γ_l сохраняются.

Положим $d_k = m_{k_{l-1}} + (k_{l-1} - k)\gamma_l$ при каждом k: $k_{l-1} \le k \le k_l$ $(l = \overline{1, N})$ и обозначим

$$\Gamma_1(l) = \{k: \quad k_{l-1} \le k \le k_l,\, m_k = d_k\}, \quad \Gamma_1 = \bigcup_{l=1}^{N} \Gamma_1(l),$$
$$\Gamma_2 = \{0,\, 1,\, \ldots,\, n\} \setminus \Gamma_1.$$

Будем рассматривать только такие системы вида (1), у которых матрицы $A_{kj}(x)$ удовлетворяют условиям:

1) $A_{km_k}(x) \equiv A_{km_k}$ при $k \in \Gamma_1$;

2) уравнения

$$\det\left\{\sum_{k\in\Gamma_1(l)} A_{km_k}\beta^{k-k_{l-1}}\right\} = 0 \quad (l = \overline{1, N})$$

не имеют кратных корней и

$$\det(A_{k_l m_{k_l}}) \neq 0 \quad (l = \overline{1, N}); \tag{5}$$

3) элементы $a_{pq}^{kj}(x)$ матриц $A_{kj}(x)$ удовлетворяют оценкам:

$$\max_{|x|\le r} |a_{pq}^{kj}(x)| \le h^{p_0(d_k - j)}(r), \tag{6}$$

где $h(r) > 0$ $(r > 0)$ — непрерывная монотонно возрастающая функция, $j = \overline{0, m_k}$ при $k \in \Gamma_2$, $j = \overline{0, m_k - 1}$ при $k \in \Gamma_1$, $p_0 = {\gamma_1}^{-1}$.

Заметим, что из условий 1 и 2 следует, что диаграмма Ньютона многочлена Δ при любом x $(x \in R)$ имеет одни и те же узловые точки.

Определим функцию $g(r)$ соотношением

$$h(g(r)) = r^{\gamma_1} \quad (r > 0). \tag{7}$$

Оценку решения системы уравнений (1) при $\operatorname{Re}\lambda \ge \alpha > 0$ получим отдельно для случаев $|x| \le g(|\lambda|)$ и $|x| \ge g(|\lambda|)$.

Лемма 1. *Пусть для матриц $A_{kj}(x)$ выполнены условия 1—3. Тогда система уравнений (1) при всех λ: $\operatorname{Re}\lambda > \alpha$ (α — достаточно велико) и $|x| \le g(|\lambda|)$ имеет решение $Y(x, \lambda)$ такое, что*

$$\|Y^{(j)}(x, \lambda)\| \le c_1 |\lambda|^{j\gamma_N} e^{c_2|\lambda|^{\gamma_1}|x|} \tag{8}$$

$(j = \overline{0, n-1},\, c_1 > 0,\, c_2 > 0)$.

Доказательство. Известно [5], что если для матриц $A_{kj}(x)$ системы уравнений (1) выполнено условие 3), то при $|x| \le g(|\lambda|)$ характеристическое уравнение (4) имеет sn корней ω_{lj} вида

$$\omega_{lj}(x, \lambda) = \beta_{lj}\lambda^{\gamma_l}(1 + o(1)), \tag{9}$$

где β_{lj} — корни уравнений (5), $l = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, sq_l}$, $o(1)$ — функции переменных x и λ, стремящиеся к нулю при $\lambda \to \infty$, $|x| \le g(|\lambda|)$. Введем еще несколько обозначений. Пусть $i \in \{1,\, \ldots,\, sn\}$. Тогда при некоторых l и j имеет место равенство

$$i = \sum_{p=0}^{l-1} sk_p + j \quad (l = \overline{1, N};\; j = \overline{1, sq_l}),$$

в соответствии с которым обозначим $\omega_i(x, \lambda) = \omega_{lj}(x, \lambda)$. Далее положим $\epsilon_i = \gamma_l$ при $sk_{l-1} + 1 \le i \le sk_l$ $(l = \overline{1, N})$.

Пусть $W(x,\lambda)$ — нормальная жорданова форма матрицы $A(x,\lambda)$ системы (2), а $B(x,\lambda)$ — матрица, преобразующая $A(x,\lambda)$ к этой форме.

Имеем

$$A(x,\lambda)B(x,\lambda) = B(x,\lambda)W(x,\lambda). \tag{10}$$

Заметим, что $W(x,\lambda)$ — блочно-диагональная матрица, каждый диагональный блок которой есть диагональная матрица вида

$$W_l(x,\lambda) = \mathrm{diag}\{\omega_{l1}(x,\lambda),\,\ldots,\,\omega_{ls}(x,\lambda)\} \quad (l=\overline{1,N}),$$

а остальные блоки — нулевые.

Матрицу $B(x,\lambda)$ будем искать в блочном виде с блоками B_{il} тех же размеров, что и у матриц A и W. Тогда систему (10) можно переписать в виде

$$B_{il} = B_{1l}W_l^{i-1} \quad (i=\overline{2,n},\; l=\overline{1,n}),$$
$$\sum_{i=1}^{n} \Delta_i B_{1l}W_l^{i-1} = B_{1l}W_l^n \quad (l=\overline{1,n}).$$

Положим

$$Q(\lambda) = \mathrm{diag}\{Q_1(\lambda),\,\ldots,\,Q_n(\lambda)\}, \quad Q_t = \lambda^{v_t}E,$$
$$v_1 = 0, \quad v_t = \sum_{k=2}^{t} \varepsilon_k - (t-1)\varepsilon_t \quad (t=\overline{2,n}).$$

Заменой

$$\overline{Y}(x,\lambda) = B(x,\lambda)Q(\lambda)\exp\left\{\int_0^x s_1(t,\lambda)dt\right\}\overline{Z}(x,\lambda) \tag{11}$$

от системы (2) перейдем к системе

$$\overline{Z}'(x,\lambda) = W(x,\lambda)\overline{Z}(x,\lambda) + C(x,\lambda)Z(x,\lambda), \tag{12}$$

где

$$W(x,\lambda) = \mathrm{diag}\{0,\,\omega_2(x,\lambda)-\omega_1(x,\lambda),\,\ldots,\,\omega_{sn}(x,\lambda)-\omega_1(x,\lambda)\},$$
$$C(x,\lambda) = -(B(x,\lambda)Q(\lambda))^{-1}\left(B(x,\lambda)Q(\lambda)\right)',$$
$$\overline{Z}(x,\lambda) = (z_1(x,\lambda),\,\ldots,\,z_{sn}(x,\lambda))^T.$$

Далее доказательство разобьем на два случая:

$$0 \le x \le g(|\lambda|) \quad \text{и} \quad -g(|\lambda|) \le x \le 0.$$

Пусть $0 \le x \le g(|\lambda|)$. Известно [5], что на лучах $\arg\lambda = \psi$, за исключением конечного их числа, величины $\mathrm{Re}(\omega_i - \omega_j)$ $(i \ne j)$ сохраняют знак при достаточно большом $|\lambda|$ и $|x| \le g(|\lambda|)$. От системы (12) перейдем к системе интегральных уравнений

$$
\begin{gathered}
z_1(x,\lambda)=1+\int\limits_0^x\sum_{j=1}^{sn}c_{1j}(t,\lambda)z_j(t,\lambda)dt,\\
z_i(x,\lambda)=\int\limits_0^x\exp\left\{\int\limits_t^x(\omega_i(\tau,\lambda)-\omega_1(\tau,\lambda))d\tau\right\}\sum_{j=1}^{sn}c_{ij}(t,\lambda)z_j(t,\lambda)dt,\\
\text{если } i=\overline{2,sn},\ \operatorname{Re}(\omega_i-\omega_1)<0,\\
z_i(x,\lambda)=\int\limits_0^{g(|\lambda|)}\exp\left\{\int\limits_t^0(\omega_i(\tau,\lambda)-\omega_1(\tau,\lambda))d\tau\right\}\sum_{j=1}^{sn}c_{ij}(t,\lambda)z_j(t,\lambda)dt-\\
-\int\limits_x^{g(|\lambda|)}\exp\left\{\int\limits_t^x(\omega_i(\tau,\lambda)-\omega_1(\tau,\lambda))d\tau\right\}\sum_{j=1}^{sn}c_{ij}(t,\lambda)z_j(t,\lambda)dt,\\
\text{если } i=\overline{2,sn},\ \operatorname{Re}(\omega_i-\omega_1)>0.
\end{gathered}
\tag{13}
$$

Очевидно, что всякое решение системы (13) является решением уравнения (12). Систему (13) будем решать методом последовательных приближений. Положим $z_1^{(0)}(x,\lambda)=1$, $z_i^{(0)}(x,\lambda)=0$ $(i=\overline{2,sn})$, $z_i^{(k+1)}(x,\lambda)$ выражаются через $z_i^{(k)}(x,\lambda)$ по формулам, получающимся при подстановке в систему (13) вместо $z_i(x,\lambda)$ в левые ее части функций $z_i^{(k+1)}(x,\lambda)$, а в правые части — функций $z_i^{(k)}(x,\lambda)$. Тогда

$$z_i(x,\lambda)=z_i^{(0)}(x,\lambda)+\sum_{k=1}^{\infty}(z_i^{(k)}(x,\lambda)-z_i^{(k-1)}(x,\lambda)).$$

Обозначим

$$
\begin{gathered}
\eta_i^{(k)}(x,\lambda)=z_i^{(k)}(x,\lambda)-z_i^{(k-1)}(x,\lambda),\\
\eta_k(\lambda)=\max_{|x|\le g(|\lambda|)}\max_{1\le i\le sn}|\eta_i^{(k)}(x,\lambda)|.
\end{gathered}
$$

Оценим величины $\eta_k(\lambda)$. Из рекуррентных соотношений для $z_i^{(k)}$ $(i=\overline{1,sn},\ k=0,1,\ldots)$ и известной [5] оценки для элементов $c_{ij}(x,\lambda)$ $(i,j=\overline{1,sn})$ матрицы $C(x,\lambda)$:

$$\int_{-g(|\lambda|)}^{g(|\lambda|)}|c_{ij}(x,\lambda)|dx=o(1)$$

$(o(1)\to 0$ при $\lambda\to\infty)$ следует

$$|\eta_i^{(k)}(x,\lambda)|\le o(1)\eta_{k-1}(\lambda),\quad i=\overline{1,sn}.$$

Поэтому $\eta_k(\lambda)\le o(1)\eta_{k-1}(\lambda)$, $o(1)\to 0$ при $\lambda\to\infty$ и $|x|\le g(|\lambda|)$. Так как

$$|z_i(x,\lambda)-z_i^{(0)}(x,\lambda)|\le\sum_{k=1}^{\infty}\eta_k(\lambda)=o(1),$$

то при $0\le x\le g(|\lambda|)$ имеем

$$z_1(x,\lambda)=1+o(1),\ z_i(x,\lambda)=o(1)\quad (i=\overline{2,sn}).\tag{14}$$

Заметим, что асимптотические формулы (14) получены для решения системы (13) с начальным условием

$$z_1(0,\lambda)=1, \quad z_i(0,\lambda)=0 \quad (i=\overline{2,sn}). \tag{15}$$

В случае $-g(|\lambda|)\le x\le 0$ вместо системы (13) рассмотрим систему интегральных уравнений

$$\begin{aligned}
&z_1(x,\lambda)=1+\int\limits_0^x\sum_{j=1}^{sn}c_{1j}(t,\lambda)z_j(t,\lambda)dt,\\
&z_i(x,\lambda)=\int\limits_0^x\exp\left\{\int\limits_t^x(\omega_i(\tau,\lambda)-\omega_1(\tau,\lambda))d\tau\right\}\sum_{j=1}^{sn}c_{ij}(t,\lambda)z_j(t,\lambda)dt,\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\text{если } i=\overline{2,sn},\ \operatorname{Re}(\omega_i-\omega_1)>0\\
&z_i(x,\lambda)=-\int\limits_{-g(|\lambda|)}^0\exp\left\{\int\limits_t^0(\omega_i(\tau,\lambda)-\omega_1(\tau,\lambda))d\tau\right\}\sum_{j=1}^{sn}c_{ij}(t,\lambda)z_j(t,\lambda)dt+\\
&\qquad+\int\limits_{-g(|\lambda|)}^x\exp\left\{\int\limits_t^x(\omega_i(\tau,\lambda)-\omega_1(\tau,\lambda))d\tau\right\}\sum_{j=1}^{sn}c_{ij}(t,\lambda)z_j(t,\lambda)dt,\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\text{если } i=\overline{2,sn},\ \operatorname{Re}(\omega_i-\omega_1)<0.
\end{aligned} \tag{16}$$

Как и в первом случае, получаем, что (16) имеет решение с асимптотикой (14) и удовлетворяющее тому же начальному условию (15). От решения $\overline{Z}(x,\lambda)$ с асимптотикой (14), применяя (11), возвратимся к решению $\overline{Y}(x,\lambda)$ системы (2) и, следовательно, к решению системы уравнений (1). Из (9), (11) и (14) вытекает оценка (8). На лучах $\arg\lambda=\psi$, где величины $\operatorname{Re}(\omega_i-\omega_j)$ $(i\ne j)$ не сохраняют знак, оценка (8) выполняется по непрерывности. Лемма 1 доказана.

Далее оценим то же самое, что и в лемме 1, решение системы уравнений (1) при $|x|\ge g(|\lambda|)$.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия леммы 1. Тогда решение системы уравнений* (1)*, удовлетворяющее* (8)*, при* $|x|\ge g(|\lambda|)$, $\operatorname{Re}\lambda\ge\alpha>0$ *имеет оценку*

$$\|Y^{(j)}(x,\lambda)\|\le c_3h^{j\frac{\gamma_N}{\gamma_1}}(x)e^{c_4h^{\frac{\gamma_N}{\gamma_1}}(x)|x|} \tag{17}$$

$(j=\overline{0,n-1},\ c_3>0,\ c_4>0)$.

Доказательство. Пусть $x\in[g(|\lambda|),r]$. Тогда из монотонности $h(x)$ и (7) следует, что $h(r)\ge h(x)\ge|\lambda|^{\gamma_1}$. Поэтому для элементов матрицы $A(x,\lambda)$ из (6) при тех же значениях x получаем

$$|\Delta_{i+1}^{pq}(x,\lambda)|\le\sum_{j=0}^{m_i}h^{p_0(d_i-j)}(r)|\lambda|^j\le c_0h^{p_0d_i}(r), \tag{18}$$

$i=\overline{0,n-1}$, $p,q=\overline{1,s}$, $c_0>0$ — некоторая постоянная, не зависящая от r и λ. Наряду с системой (3) рассмотрим систему

$$V'=D(r)V, \tag{19}$$

где $V = (V_1, \ldots, V_{sn})^T$, а неотрицательная матрица $D(r)$ отличается от $A(x, \lambda)$ лишь последней блочной строкой $(C_0 h^{p_0 d_0}(r), \ldots, C_0 h^{p_0 d_{n-1}}(r))$, где C_0 — квадратная матрица размерности s, все элементы которой равны числу c_0 из оценки (18). Характеристическое уравнение системы (19) имеет вид

$$\det\left\{\mu^n E - C_0 \sum_{k=0}^{n-1} h^{p_0 d_k}(r)\mu^k\right\} = 0. \tag{20}$$

Уравнение (20) перепишем в развернутом виде [1]:

$$(-\mu^n)^s + (-\mu^n)^{s-1} s c_0 \sum_{k=0}^{n-1} h^{p_0 d_k}(r)\mu^k = 0. \tag{21}$$

Уравнение (21) имеет корень $\mu = 0$ — корень кратности $ns - n$, а остальные его корни удовлетворяют уравнению

$$\mu^n - s c_0 \sum_{k=0}^{n-1} h^{p_0 d_k}(r)\mu^k = 0. \tag{22}$$

Диаграммы Ньютона уравнений (3) и (22) подобны с коэффициентом подобия s. Поскольку $D(r)$ — матрица с неотрицательными элементами, то характеристическое уравнение (20), а тогда и уравнение (22), имеет максимальный положительный корень, которому соответствует положительный собственный вектор [1, с. 334]. Покажем, что уравнение (22) имеет положительный корень $\mu_0(r)$ вида

$$\mu_0(r) = a_0 h^{p_0 \gamma_N}(r)(1 + o(1)), \tag{23}$$

где $a_0 > 0$, $o(1) \to 0$ при $r \to \infty$. Для этого положим в (26) $\mu = a t^{\gamma_N}(1 + \theta)$, $t = h^{p_0}(r)$, где a — постоянная, θ — новая переменная. Разделив (22) на $t^{n\gamma_N}$, получим

$$a^n(1 + \theta)^n - s c_0 \sum_{k=0}^{n-1} t^{d_k + \gamma_N(k-n)} a^k (1 + \theta)^k = 0. \tag{24}$$

Из определения чисел d_k и γ_N следует, что

$$\frac{d_k}{n-k} \le \gamma_N \quad (k = \overline{0, n-1}) \quad [5], \tag{25}$$

причем равенство в (25) достигается лишь при $k_{N-1} \le k < n$. Из (25) имеем, что все коэффициенты, стоящие при степенях θ в уравнении (24), стремятся к константам при $t \to \infty$. Кроме того, если a_0 — один из корней уравнения

$$a^{q_N} - s \sum_{k \in \Gamma(N) \setminus \{n\}} c_0 a^{k - k_{N-1}} = 0, \tag{26}$$

где $q_N = k_N - k_{N-1}$, то свободный член уравнения (24) есть $o(1)$ $(t \to \infty)$. Тогда (24) имеет корень $\theta = o(1)$ $(r \to \infty)$.

Заметим, что так как $c_0 > 0$, то (26) имеет положительный корень a_0. Формула (23) доказана.

Обозначим в виде $e = (1, 1, \ldots, 1)$ — вектор длины s,

$$d(r) = (e, \mu_0(r)e, \ldots, \mu_0^{n-1}(r)e)^T$$

— собственный вектор матрицы $D(r)$. Пусть $b > 0$ — некоторая постоянная. Вектор-функция $V(x,r,\lambda) = bd(r)e^{\mu_0(r)x}$ — положительное решение системы (19). Если $b > 0$ достаточно велико, то для координат $V_j(x,r)$ вектор-функции $V(x,r)$ из (23) при $x = g(|\lambda|)$ получаем оценку

$$\begin{aligned} V_j(g(|\lambda|), r) &\geq b\left(\frac{a_0}{2}h^{p_0\gamma_N}(r)\right)e^{\frac{a_0}{2}h^{p_0\gamma_N}(r)g(|\lambda|)} \geq \\ &\geq b\Big(\frac{a_0}{2}\Big)^j|\lambda|^{j\gamma_N}e^{\frac{a_0}{2}|\lambda|^{\gamma_N}g(|\lambda|)} \geq \\ &\geq |y_j(g(|\lambda|),\lambda)| \quad (j=\overline{0,sn-1}), \end{aligned} \tag{27}$$

где y_j — координаты решения системы (3) с оценкой (8).

Из (18) и (27) следует, что

$$|y_j(x,\lambda)| \leq V_j(x,r) \quad (j=\overline{0,sn-1}) \tag{28}$$

при $g(|\lambda|) \leq x \leq r$ [7, с. 42]. Из (28) при $x = r$ получаем (17) при $x \geq g(|\lambda|)$. Случай $x \leq -g(|\lambda|)$ сводится к предыдущему заменой

$$-x = t, \quad Y(x,\lambda) = Y(-t,\lambda) = \tilde{Y}(t,\lambda),$$

так как оценки (6) симметричны относительно начала координат. Лемма 2 доказана.

Из лемм 1 и 2 следует теорема об оценке решения системы (1).

Теорема. *Пусть коэффициенты системы уравнений* (1) *удовлетворяют условиям 1—3. Тогда система уравнений* (1) *имеет решение* $Y(x,\lambda)$, *удовлетворяющее оценке*

$$\|Y^{(j)}(x,\lambda)\| \leq c_3(h^{\frac{\gamma_N}{\gamma_1}}(x) + |\lambda|^{\gamma_N})^j e^{c_4(h^{\frac{\gamma_N}{\gamma_1}}(x)+|\lambda|^{\gamma_1})|x|},$$

$j=\overline{0,n-1}$, $-\infty < x < \infty$, $\mathrm{Re}\,\lambda \geq \alpha > 0$, c_3, c_4 — *некоторые положительные постоянные, не зависящие ни от* x, *ни от* λ.

Доказательство теоремы следует из оценок (8) и (17), полученных в леммах 1 и 2.

Библиографический список

1. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М. : Наука, 1988. 548 с.
2. *Житомирский Я. И.* Классы единственности решения задачи Коши для линейных уравнений с растущими коэффициентами // Известия АН СССР. Сер. математическая. 1967. Т. 31, вып 4. С. 763—782.
3. *Золотарев Г. Н.* Нетривиальные решения задачи Коши с нулевыми начальными условиями // Ученые записки Ивановского государственного педагогического института. 1963. Т. 31. С. 29—36.
4. *Косарев Н. Г.* О единственности решения задачи Коши для линейных уравнений с переменными коэффициентами // Качественные и приближенные методы исследования операторных уравнений. Ярославль : Яросл. гос. ун-т, 1977. Вып. 2. С. 141—158.
5. *Туртин Д. В.* Асимптотика решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром // Математика и ее приложения : журнал Ивановского математического общества. 2006. Вып. 1 (3). С. 67—80.
6. *Туртин Д. В.* О максимальных классах неединственности решения задачи Коши для линейных уравнений // Известия вузов. Математика. 2010. № 9. С. 90—93.
7. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М. : Мир, 1970. 720 с.
8. *Чеботарев Н. Г.* Теория алгебраических функций. М. : Гостехиздат, 1948. 396 с.