УДК 512.543

Д. И. Молдаванский

ОБ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ КОНЕЧНЫМИ ГРУППАМИ НЕКОТОРЫХ ГРУПП С ОДНИМ ОПРЕДЕЛЯЮЩИМ СООТНОШЕНИЕМ

Доказано, что группа $\langle a,t;\ t^{-1}a^{-k}ta^mt^{-1}a^kt = a^m\rangle$ аппроксимируема конечными π-группами тогда и только тогда, когда m и k являются π-числами.

Ключевые слова: аппроксимируемость группы в некотором классе групп, отделимость подгрупп в некотором классе групп, HNN-расширение групп.

It is proved that the group $\langle a,t;\ t^{-1}a^{-k}ta^mt^{-1}a^kt = a^m\rangle$ is residually a finite π-group if and only if m and k are π-numbers.

Key words: residuallity of group in some class of groups, separability of subgroups in some class of groups, HNN-extension of groups.

1. Введение

Пусть $\mathcal{X}$ — некоторый класс групп. Напомним, что группа G называется аппроксимируемой группами из этого класса ($\mathcal{X}$-аппроксимируемой), если для любого неединичного элемента $g \in G$ существует гомоморфизм группы G на группу из класса $\mathcal{X}$, образ при котором элемента g отличен от единицы. Подгруппа H группы G называется отделимой в классе $\mathcal{X}$ ($\mathcal{X}$-отделимой), если для произвольного элемента $g \in G$, не принадлежащего подгруппе H, существует гомоморфизм группы G на группу из класса $\mathcal{X}$, образ при котором элемента g не входит в образ подгруппы H.

Как обычно, через $\mathcal{F}$ обозначается класс всех конечных групп, через $\mathcal{F}_p$ — класс всех конечных p-групп и через $\mathcal{F}_\pi$ — класс всех конечных π-групп, где π — некоторое (непустое) множество простых чисел.

В данной работе продолжаются исследования аппроксимационных свойств групп, принадлежащих семейству групп, определяемых представлением вида

$$G(l,m;k) = \langle a,t;\ t^{-1}a^{-k}ta^lt^{-1}a^kt = a^m\rangle,$$

где l,m,k — произвольные целые числа, отличные от нуля. Поскольку, как легко видеть, группы $G(l,m;k)$, $G(l,m;-k)$, $G(-l,-m;k)$ и $G(m,l;k)$ попарно изоморфны, без потери общности можно считать, что числовые параметры, определяющие группу этого семейства, удовлетворяют неравенствам $k > 0$ и $|l| \geqslant m > 0$; в формулировках всех утверждений ниже выполнимость этих условий предполагается.

Заметим также, что введение в представление группы $G(l,m;k)$ еще одного порождающего символа b вместе с определяющим соотношением $b = t^{-1}a^kt$ дает ее представление вида

$$G(l,m;k) = \langle a,t;\ b^{-1}a^lb = a^m,\ t^{-1}a^kt = b\rangle,$$

которое делает очевидным, что эта группа является HNN-расширением

Публикуемые результаты получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России № 1.8695.2017/8.9.

группы $H(l,m) = \langle a, b;\ b^{-1}a^l b = a^m \rangle$, принадлежащей к известному семейству групп Баумслага — Солитэра [6].

А именно, обозначив через A и B циклические подгруппы группы $H(l,m)$, порождаемые соответственно элементами a и b, мы видим, что группа $G(l,m;k)$ есть HNN-расширение

$$G(l,m;k) = (H(l,m), t;\ t^{-1}A^k t = B, \varphi)$$

группы $H(l,m)$ с проходной буквой t и подгруппами A^k и B, связанными в соответствии с изоморфизмом φ A^k на B, определяемым отображением $a^k \mapsto b$.

Систематическое изучение этих групп, по-видимому, впервые предпринял А. М. Бруннер [7]. Впрочем, на группы этого класса еще в 1969 г. обратил внимание Г. Баумслаг [5], доказав, что все конечные гомоморфные образы группы $G(2,1;1)$ являются циклическими группами (и приведя тем самым еще один пример группы с одним определяющим соотношением, не аппроксимируемой конечными группами). Исследования Бруннера были продолжены затем в работе [3] и ряде других; краткий обзор некоторых результатов, полученных в [7] и [3], приведен в [1].

Перечислим известные результаты об аппроксимационных свойствах групп $G(l,m;k)$. Критерий $\mathcal{F}$-аппроксимируемости этих групп, полученный в работе [3] (в [7] отмечена без доказательства необходимость условия), формулируется следующим образом:

Предложение 1.1. *Группа $G(l,m;k)$ $\mathcal{F}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда $|l| = m$.*

В работе [10] было показано, что равенство $|l| = m$ гарантирует справедливость и более сильных аппроксимационных свойств: при его выполнении группа $G(l,m;k)$ $\mathcal{F}$-аппроксимируема относительно сопряженности и в этой группе все циклические подгруппы $\mathcal{F}$-отделимы.

Так как любая $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемая группа является $\mathcal{F}$-аппроксимируемой, то следующее утверждение, доказанное в [4], доставляет критерий $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемости групп рассматриваемого семейства.

Предложение 1.2. *Для любого простого числа p группа $G(m,m;k)$ $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда $m = p^r$ и $k = p^s$ для некоторых целых чисел $r \geqslant 0$ и $s \geqslant 0$, а группа $G(-m,m;k)$ $\mathcal{F}_p$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда $p = 2$, $m = 2^r$, $k = 2^s$ для некоторых целых чисел $r \geqslant 0$ и $s \geqslant 0$, удовлетворяющих условию $s \leqslant r$.*

Основным результатом данной работы является следующее обобщение первого утверждения предложения 1.2:

Теорема. *Для произвольного множества π простых чисел группа $G(m,m;k)$ является $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемой тогда и только тогда, когда m и k являются π-числами.*

Вопрос о соответствующем критерии для групп вида $G(-m,m;k)$ остается открытым. Можно утверждать лишь, что если такая группа $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема, то m и k являются π-числами и множество π содержит число 2 (см. предложение 3.1 ниже). Из второго утверждения предложения 1.2 следует, что это условие, вообще говоря, достаточным не является.

2. Предварительные замечания

Приведем ряд необходимых нам результатов о группах Баумслага — Солитэра.

Предложение 2.1 [2, теорема 4]**.** *Для любого множества простых чисел группа $H(m,m)$ $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда m является π-числом, а группа $H(-m,m)$ $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда m является π-числом и множество π содержит число* 2.

Докажем теперь

Предложение 2.2. *Пусть π — некоторое множество простых чисел и пусть m и k являются π-числами. Тогда в группе $H(m,m)$ подгруппы A^k и B $\mathcal{F}_\pi$-отделимы.*

Доказательство. Если в представление $\langle a,b;\ b^{-1}a^mb = a^m\rangle$ группы $H = H(m,m)$ ввести новый порождающий элемент c вместе с соотношением $c = a^m$, становится понятно, что эта группа является свободным произведением с объединенной подгруппой A^m группы A и свободной абелевой группы $U = \langle b,c;\ bc = cb\rangle$: $H = \bigl(A * U;\ A^m\bigr)$.

Требуется показать, что для любого элемента $g \in H$ из того, что $g \notin A^k$ ($g \notin B$), следует существование такого гомоморфизма φ группы H на конечную π-группу, что $g\varphi \notin A^k\varphi$ (соответственно, $g\varphi \notin B\varphi$).

Рассмотрим сначала случай, когда элемент g не принадлежит ни одному из свободных множителей, т. е. длина l его несократимой записи $x_1x_2\cdots x_l$ больше единицы. Поскольку тогда каждый слог x_i этой записи не входит в объединяемую подгруппу, произвольный A-слог имеет вид a^r, где $m \nmid r$, а произвольный U-слог имеет вид c^rb^s, где $s \neq 0$.

Фиксируем π-число q, не делящее показателей степени у элемента b во всех U-слогах этой записи элемента g, и обозначим через $\overline{H}$ фактор-группу группы H по нормальному замыканию элементов a^m и b^q. Так как группа $\overline{H}$ определяется представлением

$$\langle a,b;\, b^{-1}a^mb = a^m,\, a^m = 1,\, b^q = 1\rangle,$$

а потому и представлением

$$\langle a,b;\ a^m = 1,\ b^q = 1\rangle,$$

она является обычным свободным произведением двух конечных π-групп $\overline{A} = A/A^m$ и $\overline{B} = B/B^q$ и потому $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема.

Обозначим также через φ естественный гомоморфизм группы H на группу $\overline{H}$ и через $\overline{h}$ φ-образ произвольного элемента $h \in H$. Поскольку запись $\overline{x}_1\overline{x}_2\cdots\overline{x}_l$ элемента $\overline{g}$ является, очевидно, несократимой в свободном разложении $\overline{H} = \overline{A} * \overline{B}$ группы $\overline{H}$, этот элемент не входит ни в подгруппу $\overline{A}$, ни в подгруппу $\overline{B}$, и так как в $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемой группе все конечные подгруппы $\mathcal{F}_\pi$-отделимы, существуют гомоморфизмы ρ и σ группы $\overline{H}$ на конечные π-группы такие, что $g(\varphi\rho) \notin A(\varphi\rho)$ (и тем более $g(\varphi\rho) \notin A^k(\varphi\rho)$) и $g(\varphi\sigma) \notin B(\varphi\sigma)$.

Предположим теперь, что элемент g принадлежит одному из свободных сомножителей группы H и не входит в подгруппу A^k. Если $g \in A$, то при гомоморфизме группы H в аддитивную группу кольца $\mathbb{Z}_k$ вычетов целых чисел по модулю k, определяемом отображением $a \mapsto \overline{1}$ и $b \mapsto \overline{0}$, образ подгруппы A^k равен нулевой подгруппе, а образ элемента g отличен от нуля. Если элемент g принадлежит подгруппе U и не входит в A, то $g = c^r b^s$ для некоторых целых r и s, причем $s \neq 0$. Тогда при определенном выше естественном гомоморфизме φ группы H на ее фактор-группу $\overline{H}$ по нормальному замыканию элементов a^m и b^q, где q — π-число, не делящее s, образ $\overline{g}$ элемента g является неединичным элементом свободного множителя $\overline{B}$ и потому не входит в подгруппу $\overline{A}$. Построение гомоморфизма группы H на конечную π-группу, отделяющего элемент g от подгруппы A^k, заканчивается так же, как при рассмотрении элемента длины > 1.

Если элемент g не принадлежит подгруппе B и входит в подгруппу A, т. е. $g = a^r$ для некоторого $r \neq 0$, то гомоморфизм группы H в аддитивную группу кольца $\mathbb{Z}_n$ вычетов целых чисел по модулю n, определяемый отображением $a \mapsto \overline{1}$ и $b \mapsto \overline{0}$, где n — π-число, не делящее r, является искомым. Если элемент g лежит в подгруппе U (и по-прежнему не входит в B), то $g = c^r b^q = a^{mr} b^q$ для некоторых целых r и q, причем $r \neq 0$. В этом случае искомым является аналогичный гомоморфизм группы H в группу $\mathbb{Z}_n$, где π-число n не является делителем числа mr.

Предложение 2.2 доказано.

Для произвольного целого положительного числа n обозначим через R_n нормальное замыкание в группе $H = H(m, m)$ элементов a^{kn} и b^n. Таким образом, фактор-группа $\overline{H}_n = H/R_n$ определяется представлением

$$\langle a, b;\ b^{-1}a^m b = a^m,\ a^{kn} = 1,\ b^n = 1\rangle.$$

Добавив к этому представлению еще один порождающий c вместе с соотношением $c = a^m$, мы видим, что группа $\overline{H}_n$ является свободным произведением циклической группы $\overline{A} = \langle a;\ a^{kn} = 1\rangle$ порядка kn и прямого произведения

$$\overline{U} = \langle c, b;\ cb = bc,\ c^s = 1,\ b^n = 1\rangle$$

двух циклических групп порядков s и n (где число s равно порядку элемента a^m группы $\overline{A}$) с объединенной подгруппой $\overline{A}^m$. Поэтому имеет место

Предложение 2.3. *Порядки элементов a и b группы $\overline{H}_n = H/R_n$ равны числам kn и n соответственно. В частности, порядки элементов a^k и b совпадают.*

Нам потребуется также

Предложение 2.4. *Если m является π-числом, то в группе $H = H(m, m)$ пересечение всех подгрупп R_n, где n — произвольное положительное π-число, совпадает с единичной подгруппой.*

Действительно, в силу предложения 2.1 для любого неединичного элемента $h \in H$ в группе H найдется нормальная подгруппа N конечного π-индекса, не содержащая этого элемента. Если порядки по модулю подгруппы N элементов a^k и b равны числам r и s соответственно, то π-число $n = rs$ таково, что $a^{kn} \in N$ и $b^n \in N$. Поэтому подгруппа R_n содержится в N и, следовательно, не содержит элемента h.

Докажем, наконец,

Предложение 2.5. *Если m является π-числом, то при любом положительном π-числе n группа $\overline{H}_n = H(m,m)/R_n$ является $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемой.*

Покажем, в самом деле, что для любого неединичного элемента h группы

$$\overline{H}_n = \langle a, b;\ b^{-1}a^m b = a^m,\ a^{kn} = 1,\ b^n = 1\rangle$$

существует гомоморфизм этой группы на конечную π-группу, образ при котором элемента h неединичен.

Если элемент h не входит в подгруппу группы $\overline{H}_n$, порожденную элементом a^m, то его образ в фактор-группе группы $\overline{H}_n$ по этой (центральной) подгруппе отличен от единицы.Так как эта фактор-группа имеет представление $\langle a, b;\ a^d = 1,\ b^n = 1\rangle$ (где $d = (kn, m)$), т. е. является свободным произведением двух конечных циклических π-групп и потому [8] $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема, существование требуемого гомоморфизма очевидно.

В случае, когда элемент h принадлежит подгруппе, порожденной элементом a^m, искомым будет, например, гомоморфизм группы $\overline{H}_n$ в аддитивную группу кольца $\mathbb{Z}_{kn}$ вычетов целых чисел по модулю kn, определяемый отображением $a \mapsto \overline{1}$ и $b \mapsto \overline{0}$.

3. Доказательство теоремы

Необходимость сформулированных в теореме условий $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости группы $G(m,m;k)$ вытекает из следующего предложения.

Предложение 3.1. *Пусть для некоторого множества π простых чисел группа $G(l,m;k)$ является $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемой. Тогда*

(1) *$l = m\varepsilon$ для некоторого $\varepsilon = \pm 1$,*
(2) *m является π-числом,*
(3) *k является π-числом,*
(4) *если $\varepsilon = -1$, то множество π содержит число* 2.

Поскольку всякая подгруппа $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемой группы $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема, то в силу предложения 2.1 доказательства требует только утверждение пункта 3.

Если, напротив, k не является π-числом, то $k = pk_1$ для некоторого простого числа p, не принадлежащего множеству π, и некоторого целого числа k_1. Так как k_1 — положительное число, строго меньшее, чем k, в группе $H = H(m, m\varepsilon)$ элемент a^{k_1} не принадлежит подгруппе A^k, а поскольку в этой группе пересечение подгрупп A и B тривиально, элемент a^m не принадлежит подгруппе B.

При $\varepsilon = 1$ рассмотрим элемент $g = (t^{-1}a^{k_1}t)^{-1}a^m(t^{-1}a^{k_1}t)a^{-m}$ группы $G(m,m;k)$. Этот элемент отличен от 1, так как его запись

$$t^{-1}a^{-k_1}ta^{-m}t^{-1}a^{k_1}ta^{-m}$$

является приведенной в HNN-расширении $G(m,m;k)$ группы $H(m,m)$.

С другой стороны, пусть N — произвольная нормальная подгруппа конечного π-индекса группы $G(m,m;k)$ и пусть порядок элемента a по модулю этой подгруппы равен r. Так как r является π-числом, числа r и p взаимно просты. Поэтому существует целое число x, удовлетворяющее сравнению $px \equiv 1 \pmod{r}$. Отсюда имеем

$$a^{k_1} \equiv a^{k_1 px} = a^{kx} \pmod{N},$$
$$t^{-1}a^{k_1}t \equiv t^{-1}a^{kx}t = b^x \pmod{N},$$
$$g \equiv b^{-x}a^m b^x a^{-m} = 1 \pmod{N}.$$

Таким образом, неединичный элемент группы $G(m, m; k)$ принадлежит каждой нормальной подгруппе конечного π-индекса этой группы, что противоречит ее $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости.

Пусть $\varepsilon = -1$. Тогда множество π содержит число 2 и потому элемент a^{2k_1} не принадлежит подгруппе A^k. Действительно, если $a^{2k_1} \in A^k$, то $k|2k_1$, т. е. $pk_1|2k_1$, откуда $p = 2$, что невозможно. Поэтому в группе $G(m, -m; k)$ элемент $g = (t^{-1}a^{2k_1}t)^{-1}a^m(t^{-1}a^{2k_1}t)a^{-m}$ отличен от единицы и, если для нормальной подгруппы N конечного π-индекса этой группы числа r и x выбраны так же, как в первом случае, то, рассуждая аналогично, получаем сравнение

$$t^{-1}a^{2k_1}t \equiv t^{-1}a^{2kx}t = b^{2x} \pmod{N},$$

откуда, как и выше, получаем

$$g \equiv b^{-2x}a^m b^{2x} a^{-m} = 1 \pmod{N}.$$

Таким образом, мы снова пришли к противоречию, и утверждение 3 предложения 3.1 доказано.

Из предложения 2.3 легко следует, что для любого целого числа n нормальное замыкание R_n в группе $H = H(m, m)$ элементов a^{kn} и b^n является (A^k, B, φ)-совместимой подгруппой.

Напомним, что выше через φ был обозначен изоморфизм подгруппы A^k группы H на ее подгруппу B, определяемый отображением $a^k \mapsto b$, и что (A^k, B, φ)-совместимость подгруппы R_n означает, по определению, выполнимость равенства $(A^k \cap R_n)\varphi = B \cap R_n$.

Это свойство подгруппы R_n позволяет, как обычно, наряду с группой

$$G(m, m; k) = (H(m, m), t;\ t^{-1}A^k t = B,\ \varphi)$$

построить HNN-расширение

$$\overline{G}_n = (\overline{H}_n, t_n;\ t_n^{-1}\overline{A}^k t_n = \overline{B},\ \overline{\varphi}_n)$$

с проходной буквой t_n группы $\overline{H}_n = H/R_n$ и подгруппами $\overline{A}^k = A^k R_n/R_n$ и $\overline{B} = BR_n/R_n$, связанными в соответствии с изоморфизмом $\overline{\varphi}_n$, определяемым отображением $a^k R_n \mapsto bR_n$.

Кроме того, существует гомоморфизм ρ_n группы $G = G(m, m; k)$ на группу $\overline{G}_n$, продолжающий естественный гомоморфизм базовой подгруппы H группы G на базовую подгруппу $\overline{H}_n$ группы $\overline{G}_n$ и переводящий проходную букву t в проходную букву t_n. Известно, что ядро S_n гомоморфизма ρ_n совпадает с нормальным замыканием в группе G подгруппы R_n.

Предложение 3.2. *Если m и k являются π-числами, то в группе*

$$G(m, m; k) = (H(m, m), t;\ t^{-1}A^k t = B,\ \varphi)$$

пересечение всех подгрупп S_n, где n — произвольное положительное π-число, совпадает с единичной подгруппой.

Доказательство. Требуется показать, что для любого неединичного элемента $g \in G$ найдется π-число n такое, что элемент g не входит в подгруппу S_n.

Пусть $g = h_0 t^{\varepsilon_1} h_1 t^{\varepsilon_2} h_2 \cdots h_{s-1} t^{\varepsilon_s} h_s$ — приведенная запись неединичного элемента $g \in G$.

Если $s = 0$, т. е. элемент g принадлежит подгруппе H, то в силу предложения 2.4 этот элемент не входит в подгруппу R_n для некоторого π-числа n. Так как действие гомоморфизма ρ_n на подгруппе H совпадает с естественным гомоморфизмом H на H/R_n, элемент $g\rho_n$ отличен от единицы и потому не входит в подгруппу S_n.

Предположим теперь, что $s > 0$, и для каждого числа $i = 0, 1, \ldots, s-1$ введем в рассмотрение нормальную подгруппу N_i конечного π-индекса группы H следующим образом.

В качестве N_0 возьмем произвольную нормальную подгруппу конечного π-индекса группы H.

Пусть $1 \leqslant i < s$. Тогда

если $\varepsilon_i = \varepsilon_{i+1}$, полагаем $N_i = N_0$;

если $\varepsilon_i = -1$ и $\varepsilon_{i+1} = 1$, то элемент h_i группы H не принадлежит подгруппе A^k и через N_i обозначим некоторую нормальную подгруппу конечного π-индекса группы H, удовлетворяющую условию $h_i \notin A^k N_i$;

если $\varepsilon_i = 1$ и $\varepsilon_{i+1} = -1$, то элемент h_i группы H не принадлежит подгруппе B и через N_i обозначим некоторую нормальную подгруппу конечного π-индекса группы H, удовлетворяющую условию $h_i \notin BN_i$.

(Возможность выбора подгруппы во втором и третьем случаях обеспечена предложением 2.2.)

Пересечение $\bigcap_{i=0}^{s-1} N_i$ является нормальной подгруппой конечного π-индекса группы H, и, повторяя соответствующее рассуждение в доказательстве предложения 2.4, можно показать, что в подгруппе N содержится подгруппа R_n для некоторого π-числа n. Очевидно, что запись

$$(h_0 R_n) t_n^{\varepsilon_1} (h_1 R_n) t_n^{\varepsilon_2} (h_2 R_n) \cdots (h_{s-1} R_n) t_n^{\varepsilon_s} (h_s R_n)$$

элемента $g\rho_n$ является приведенной в HNN-расширении G_n, а это означает, что $g\rho_n \neq 1$, и потому $g \notin S_n$. Предложение доказано.

Предложение 3.3. *Если m и k являются π-числами, то для любого положительного π-числа n группа $\overline{G}_n$ (определяемая параметрами m и k) является $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемой.*

Доказательство. Фиксируем произвольное π-число l и введем в рассмотрение группу

$$X(n,l) = \langle x_1, x_2, \ldots, x_l;\ [x_i, x_j] = 1,\ x_i^{kn} = 1\ (i, j = 1, 2, \ldots, l)\rangle,$$

являющуюся, очевидно, абелевой конечной π-группой. Очевидно также, что циклическая перестановка порождающих определяет автоморфизм этой группы, порядок которого равен числу l. Поэтому группа

$$\begin{gathered} Y(n,l) = \langle x_1, x_2, \ldots, x_l, y;\ [x_i, x_j] = 1,\ x_i^{kn} = 1\ (i, j = 1, 2, \ldots, l), \\ y^{-1} x_i y = x_{i+1}\ (i = 1, 2, \ldots, l-1),\ y^{-1} x_l y = x_1,\ y^l = 1\rangle \end{gathered}$$

является расщепляемым расширением группы $X(n,l)$ при помощи конечной циклической группы порядка l и потому является конечной π-группой.

В соответствии с определением конструкции *HNN*-расширения группа

$$\overline{G}_n = (\overline{H}_n, t_n;\ t_n^{-1}\overline{A}^k t_n = \overline{B},\ \overline{\varphi})$$

имеет представление

$$\langle a, b, t_n;\ b^{-1}a^m b = a^m,\ a^{kn} = 1,\ b^n = 1,\ t_n^{-1}a^k t_n = b\rangle.$$

Определим отображение его порождающих символов в группу $Y(n,l)$ следующим образом: $a \mapsto x_1$, $b \mapsto x_2^k$, $t_n \mapsto y$.

Очевидно, что первые три определяющих соотношения группы $\overline{G}_n$ переходят при этом в равенства, выполненные в группе $Y(n,l)$. Так как слово $t_n^{-1}a^k t_n$ переходит в элемент $y^{-1}x_1^k y = x_2^k$, совпадающий с образом символа b, это справедливо и для четвертого соотношения.

Таким образом, указанное отображение продолжаемо до гомоморфизма ψ группы $\overline{G}_n$ в группу $Y(n,l)$. Так как порядки элементов a^k и b группы $\overline{H}_n$ совпадают с порядками их образов, ядро N гомоморфизма ψ тривиально пересекается с каждой из связанных подгрупп. Поэтому в силу теоремы о подгруппах HNN-расширения [9] группа N является обычным свободным произведением некоторой свободной группы и некоторого семейства групп, каждая из которых сопряжена с подгруппой базовой группы $\overline{H}_n$ и потому $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема в силу предложения 2.5. Следовательно, группа $\overline{G}_n$ является расширением $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемой группы при помощи конечной π-группы и потому $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема. Предложение 3.3 доказано.

$\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемость группы $G(m,m;k)$ является очевидным следствием предложений 3.2 и 3.3.

Библиографический список

1. *Борщев А. В., Молдаванский Д. И.* Об изоморфизме некоторых групп с одним определяющим соотношением // Математические заметки. 2006. Т. 79, № 1. С. 34—44.
2. *Варламова И. А., Молдаванский Д. И.* Об аппроксимируемости конечными группами групп Баумслага — Солитэра // Вестник Ивановского государственного университета. Сер.: Естественные, общественные науки. 2012. Вып. 2. С. 107—114.
3. *Кавуцкий М. А., Молдаванский Д. И.* Об одном классе групп с одним определяющим соотношением // Алгебраические и дискретные системы : межвузовский сборник научных трудов. Иваново : Иван. гос. ун-т, 1988. С. 35—48.
4. *Молдаванский Д. И.* Аппроксимируемость конечными p-группами HNN-расширений // Вестник Ивановского государственного университета. Сер.: Биология. Химия. Физика. Математика. 2000. Вып. 3. С. 129—140.
5. *Baumslag G.* A noncyclic one-relator group all of whose finite quotients are cyclic // J. Austral. Math. Soc. 1969. Vol. 10, № 3—4. P. 497—498.
6. *Baumslag G., Solitar D.* Some two-generator one-relator non-Hopfian groups // Bull. Amer. Math. Soc. 1962. Vol. 68. P. 199—201.
7. *Brunner A. M.* On a class of one-relator groups // Can. J. Math. 1980. Vol. 50. P. 414—420.
8. *Gruenberg K. W.* Residual properties of infinite soluble groups // Proc. London Math. Soc. 1957. Vol. 7. P. 29—62.
9. *Karrass A., Solitar D.* Subgroups of HNN groups and groups with one defining relation // Can. J. Math. 1971. Vol. 28. P. 627—643.
10. *Kim G., Tang C. Y.* A criterion for the conjugacy separability of certain HNN extensions of groups // J. Algebra. 1999. Vol. 222. P. 574—594.