УДК 512.714

Ю. А. Хашина

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ БИКВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ В ВИДЕ СУММЫ/РАЗНОСТИ КВАДРАТОВ

Биквадратичная функция с точностью до постоянного слагаемого может быть представлена в виде суммы/разности четырех квадратов билинейных функций. Существуют биквадратичные функции, не представимые с точностью до постоянного слагаемого виде суммы/разности меньшего числа квадратов.

Ключевые слова: биквадратичная функция, билинейная функция.

Each biquadratic function up to a constant term can be presented in the form of a sum or difference of not more than four squares of bilinear functions. There are biquadratic functions not representable up to a constant in term a sum or difference of less number of squares.

Key words: biquadratic function, bilinear function.

При решении некоторых задач компьютерной графики используются биквадратичные функции, т. е. многочлены от двух переменных, квадратичные по каждой из них:

$$F = a_{22}x^2y^2 + 2a_{21}x^2y + 2a_{12}xy^2 + a_{20}x^2 + 2a_{11}xy + a_{02}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{01}y + a_{00}.$$

За последние годы был получен ряд результатов, касающихся биквадратичных функций [1—6].

Биквадратичные функции часто возникают как суммы квадратов билинейных функций. Если биквадратичная функция может быть представлена в виде суммы нескольких полных квадратов билинейных, то с точностью до постоянного слагаемого ее можно представить в виде суммы не более трех таких слагаемых и неотрицательной константы [6].

Возникает вопрос о существовании подобного представления для произвольной биквадратичной функции.

Любая биквадратичная функция может быть представлена в виде суммы/разности квадратов билинейных, поскольку каждый ее член представим в таком виде:

$$a_{22}x^2y^2 = \pm(\sqrt{|a_{22}|}xy)^2, \qquad a_{00} = \pm(\sqrt{|a_{00}|})^2,$$
$$a_{20}x^2 = \pm(\sqrt{|a_{20}|}x)^2, \qquad a_{02}y^2 = \pm(\sqrt{|a_{02}|}y)^2,$$
$$2a_{01}y = (y + a_{01}/2)^2 - (y - a_{01}/2)^2,$$
$$2a_{10}x = (x + a_{10}/2)^2 - (x - a_{10}/2)^2,$$
$$2a_{11}xy = (xy + a_{11}/2)^2 - (xy - a_{11}/2)^2,$$
$$2a_{12}xy^2 = (xy + a_{12}/2y)^2 - (xy - a_{12}/2y)^2,$$
$$2a_{21}x^2y = (xy + a_{21}/2x)^2 - (xy - a_{21}/2x)^2.$$

Это представление для некоторых членов, а следовательно, и для F неоднозначно. Желательно найти минимальное представление вида

$$F = (\alpha_1 xy + \beta_1 x + \gamma_1 y + \delta_1)^2 - (\alpha_2 xy + \beta_2 x + \gamma_2 y + \delta_2)^2 + \dots .$$

Теорема 1. *Биквадратичная функция с точностью до постоянного слагаемого может быть представлена в виде суммы/разности четырех квадратов.*

Доказательство. Выберем первые две билинейные функции так, чтобы остаток содержал степени не выше второй:

$$\begin{cases} \alpha_1^2 - \alpha_2^2 = a_{22} \\ \alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2 = a_{21} \\ \alpha_1\gamma_1 - \alpha_2\gamma_2 = a_{12}. \end{cases}$$

Пусть, например, $\beta_1 = \gamma_1 = 0$, $\alpha_2^2 = |a_{22}| + 1$. Тогда

$$\begin{cases} \alpha_1^2 - \alpha_2^2 = a_{22} \\ \quad -\alpha_2\beta_2 = a_{21} \\ \quad -\alpha_2\gamma_2 = a_{12} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha_1^2 = a_{22} + \alpha_2^2 \\ \beta_2 = -\dfrac{a_{21}}{\alpha_2} \\ \gamma_2 = -\dfrac{a_{12}}{\alpha_2}, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} F = {} & (\alpha_1 xy + \delta_1)^2 - (\alpha_2 xy + \beta_2 x + \gamma_2 y + \delta_2)^2 + \\ & + (a_{20} + \beta_2^2)x^2 + (a_{02} + \gamma_2^2)y^2 + 2(a_{11} - \alpha_1\delta_1 + \alpha_2\delta_2 + \beta_2\gamma_2)xy + \\ & + 2(a_{10} + \beta_2\delta_2)x + 2(a_{01} + \gamma_2\delta_2)y + a_{00} - \delta_1^2 + \delta_2^2. \end{aligned}$$

Таким образом, задача сводится к представлению в виде суммы/разности квадратов многочлена 2-й степени от двух переменных:

$$F_1 = b_{20}x^2 + 2b_{11}xy + b_{02}y^2 + 2b_{10}x + 2b_{01}y + b_{00}.$$

Если $F_1 = (\beta_3 x + \gamma_3 y + \delta_3)^2 - (\beta_4 x + \gamma_4 y + \delta_4)^2$, то

$$\begin{cases} \beta_3^2 - \beta_4^2 = b_{20} \\ \gamma_3^2 - \gamma_4^2 = b_{02} \\ \beta_3\gamma_3 - \beta_4\gamma_4 = b_{11} \\ \beta_3\delta_3 - \beta_4\delta_4 = b_{10} \\ \gamma_3\delta_3 - \gamma_4\delta_4 = b_{01} \\ \delta_3^2 - \delta_4^2 = b_{00}. \end{cases}$$

Базис Гребнера соответствующего идеала для lex-упорядочения, где

$$\delta_4 > \gamma_4 > \beta_4 > \delta_3 > \gamma_3 > b_{00},$$

имеет вид

$$-b_{01}^2 b_{20} + 2b_{11}b_{01}b_{10} - b_{10}^2 b_{02} + b_{00}(-b_{11}^2 + b_{20}b_{02}) = 0,$$

$$b_{11}^2 - b_{20}b_{02} + \beta_3^2 b_{02} - 2\beta_3\gamma_3 b_{11} + \gamma_3^2 b_{20} = 0,$$

$$
\begin{gathered}
(b_{11}b_{01}-b_{02}b_{10})\beta_3+(-b_{20}b_{01}+b_{11}b_{10})\gamma_3+(-b_{11}^2+b_{20}b_{02})\delta_3=0,\\
\beta_3^2-\beta_4^2-b_{20}=0,\\
\gamma_4\beta_3^2-\gamma_4 b_{20}-\beta_4\beta_3\gamma_3+\beta_4 b_{11}=0,\\
(b_{11}b_{01}-b_{02}b_{10})\beta_4+(-b_{20}b_{01}+b_{11}b_{10})\gamma_4+(-b_{11}^2+b_{20}b_{02})\delta_4=0.
\end{gathered}
$$

Тогда

$$b_{00}=\frac{b_{01}^2b_{20}-2b_{11}b_{01}b_{10}+b_{10}^2b_{02}}{b_{20}b_{02}-b_{11}^2},$$

$$\gamma_3 \text{ — корень уравнения } b_{20}\gamma_3^2-2\beta_3b_{11}\gamma_3+b_{11}^2+\beta_3^2b_{02}-b_{20}b_{02}=0,$$

$$\delta_3=-\frac{(b_{11}b_{01}-b_{02}b_{10})\beta_3+(-b_{20}b_{01}+b_{11}b_{10})\gamma_3}{b_{20}b_{02}-b_{11}^2},$$

$$\beta_4 \text{ — корень уравнения } \beta_3^2-\beta_4^2-b_{20}=0,$$

$$\gamma_4=\frac{\beta_3\gamma_3-b_{11}}{\beta_4},$$

$$\delta_4=-\frac{(b_{11}b_{01}-b_{02}b_{10})\beta_4+(-b_{20}b_{01}+b_{11}b_{10})\gamma_4}{b_{20}b_{02}-b_{11}^2}.$$

Итак, в общем случае можно представить биквадратичную функцию в виде суммы/разности четырех квадратов и константы.

Теорема 2. *Полученное в теореме 1 представление минимально в том смысле, что существуют биквадратичные функции, не представимые с точностью до постоянного слагаемого виде суммы/разности меньшего числа квадратов билинейных функций.*

Доказательство. Рассмотрим биквадратичную функцию

$$F=2x+2xy^2.$$

Функция F не ограничена, следовательно, в ее представлении должны присутствовать слагаемые с разными знаками.

Если функция F с точностью до постоянного слагаемого представима в виде

$$\pm[(\alpha_1xy+\beta_1x+\gamma_1y+\delta_1)^2+(\alpha_2xy+\beta_2x+\gamma_2y+\delta_2)^2-(\alpha_3xy+\beta_3x+\gamma_3y+\delta_3)^2],$$

то, приравнивая коэффициенты, получим систему уравнений

$$
\begin{cases}
\alpha_1^2+\alpha_2^2-\alpha_3^2=0\\
\beta_1^2+\beta_2^2-\beta_3^2=0\\
\gamma_1^2+\gamma_2^2-\gamma_3^2=0\\
\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2-\alpha_3\beta_3=0\\
\gamma_1\delta_1+\gamma_2\delta_2-\gamma_3\delta_3=0\\
\alpha_1\gamma_1+\alpha_2\gamma_2-\alpha_3\gamma_3=\pm1\\
\beta_1\delta_1+\beta_2\delta_2-\beta_3\delta_3=\pm1\\
\alpha_1\delta_1+\alpha_2\delta_2-\alpha_3\delta_3+\beta_1\gamma_1+\beta_2\gamma_2-\beta_3\gamma_3=0.
\end{cases}
$$

Рассмотрим подсистему

$$\begin{cases}\alpha_1^2+\alpha_2^2-\alpha_3^2=0\\ \beta_1^2+\beta_2^2-\beta_3^2=0\\ \alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2-\alpha_3\beta_3=0\end{cases} \iff \begin{cases}\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2=2\alpha_3^2\\ \beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2=2\beta_3^2\\ \alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3=2\alpha_3\beta_3.\end{cases}$$

Следовательно,

$$\begin{cases}(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2)(\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2)=4\alpha_3^2\beta_3^2\\ (\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3)^2=4\alpha_3^2\beta_3^2\end{cases} \Longrightarrow (\overline{\alpha}\overline{\beta})^2=\overline{\alpha}^2\overline{\beta}^2.$$

Из 7 и 8-го уравнений исходной системы следует, что ни один из векторов $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$, $\overline{\gamma}$, $\overline{\delta}$ не нулевой.

Значит, $\cos^2(\overline{\alpha},\overline{\beta})=1$ и $\overline{\beta}=m\overline{\alpha}$, где $m\neq 0$.

Исходная система принимает вид

$$\begin{cases}\alpha_1^2+\alpha_2^2-\alpha_3^2=0\\ \gamma_1^2+\gamma_2^2-\gamma_3^2=0\\ \gamma_1\delta_1+\gamma_2\delta_2-\gamma_3\delta_3=0\\ \alpha_1\gamma_1+\alpha_2\gamma_2-\alpha_3\gamma_3=\pm1\\ \alpha_1\delta_1+\alpha_2\delta_2-\alpha_3\delta_3=\pm\dfrac{1}{m}\\ \alpha_1\delta_1+\alpha_2\delta_2-\alpha_3\delta_3+m(\alpha_1\gamma_1+\alpha_2\gamma_2-\alpha_3\gamma_3)=0.\end{cases}$$

Следовательно, $\pm(\frac{1}{m}+m)=0$. Противоречие.

Таким образом, не всякую биквадратичную функцию можно с точностью до постоянного слагаемого представить как сумму/разность трех квадратов билинейных.

Полученные результаты могут быть использованы в работах по сжатию видео.

Библиографический список

1. *Ерохина А. В.* Экстремумы биквадратичных функций : дипломная работа / Иван. гос. ун-т. Иваново, 2015. 48 с.
2. *Кадочникова А. В.* Условия неотрицательности биквадратичной функции : дис. ... магистра математики / Иван. гос. ун-т. Иваново, 2017. 33 с.
3. *Конопелько Е. А.* Минимум биквадратичной функции двух переменных : дис. ... магистра математики / Иван. гос. ун-т. Иваново, 2006. 26 с.
4. *Косоурова Ю. А.* Достаточные условия отсутствия минимумов биквадратичной функции на единичном квадрате : дипломная работа / Иван. гос. ун-т. Иваново, 2010. 25 с.
5. *Митрофанова М. К.* Каноническая форма биквадратного многочлена : дипломная работа / Иван. гос. ун-т. Иваново, 2005. 100 с.
6. *Хашина Ю. А.* Биквадратичные функции и их представление в виде суммы квадратов // Вестник Ивановского государственного университета. Сер.: Естественные, общественные науки. 2017. Вып. 2. С. 98—104.