УДК 512.543

Д. Н. Азаров, А. А. Кряжева

О ФИНИТНОЙ ОТДЕЛИМОСТИ ПОДГРУПП В РАСЩЕПЛЯЕМЫХ РАСШИРЕНИЯХ ГРУПП

Пусть G — расщепляемое расширение группы A с помощью группы B. Будем предполагать, что для каждого натурального числа n число всех подгрупп группы A индекса n конечно. И пусть Ω — класс групп, удовлетворяющий следующим условиям: (i) если $X \in \Omega$, то любой гомоморфный образ группы X принадлежит Ω, (ii) если $X \in \Omega$, то любая подгруппа конечного индекса группы X принадлежит Ω.

Доказано, что следующие два условия равносильны.

1. В группе G все Ω-подгруппы финитно отделимы.

2. В группах A и B все Ω-подгруппы финитно отделимы и, сверх того, в группе A финитно отделимы все подгруппы, высекаемые в A Ω-подгруппами группы G.

Этот результат является обобщением следующей хорошо известной теоремы Р. Алленби и Р. Грегораса. Если группа A является конечно порожденной, все подгруппы группы A финитно отделимы и все конечно порожденные подгруппы группы B финитно отделимы, то все конечно порожденные подгруппы группы G финитно отделимы.

Ключевые слова: расщепляемое расширение группы, финитно отделимая подгруппа

Let G be a split extension of a group A by a group B. Suppose that for every natural number n the number of all subgroups of the group A of index n is finite. And let Ω be a class of groups satisfying the following conditions: (i) if $X \in \Omega$, then any homomorphic image of X belongs to Ω, (ii) if $X \in \Omega$, then any subgroup of finite index of X belongs to Ω.

It is proved that the following two conditions are equivalent.

1. All Ω-subgroups in G are finitely separable.

2. All Ω-subgroups in A and B are finitely separable, and, moreover, all subgroups of the group A that are the intersections of A with the Ω-subgroups of G are finitely separable.

This result is a generalization of the following well-known theorem by R. Allenby and R. Gregorac. If the group A is finitely generated, all subgroups of A are finitely separable and all finitely generated subgroups of B are finitely separable, then all finitely generated subgroups of G are finitely separable.

Key words: split extension of a group, finitely separable subgroup.

1. Введение

Напомним, что подгруппа H группы G называется финитно отделимой [9], если для каждого элемента g группы G, не принадлежащего подгруппе H, существует гомоморфизм группы G на некоторую конечную группу, при котором образ элемента g не принадлежит образу подгруппы H. Группа называется финитно аппроксимируемой, если ее единичная

Публикуемые результаты получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России № 1.8695.2017/БЧ.

подгруппа финитно отделима. Известно, [12, п. 1.3.10], что в полициклической группе все подгруппы финитно отделимы. Условие финитной отделимости всех подгрупп является достаточно жестким ограничением. Менее жестким ограничением является финитная отделимость всех конечно порожденных подгрупп. Р. Бернс [11] для обозначения групп с финитно отделимыми конечно порожденными подгруппами ввел термин LERF (locally-extended residually finite). Простейшим примером группы, не удовлетворяющей условию LERF, служит группа с одним соотношением $a^{-1}ba = b^2$. В этой группе циклическая подгруппа, порожденная элементом b, не является финитно отделимой.

Напомним, что группа G называется расщепляемым расширением группы A с помощью группы B, если группа A является нормальной подгруппой группы G, B — подгруппа группы G, $G = AB$ и $A \cap B = 1$. Расщепляемые расширения групп и их финитная аппроксимируемость рассматривались в работах А. И. Мальцева [9] и Д. Н. Азарова [1–4, 6]. Классическая теорема А. И. Мальцева утверждает, что расщепляемое расширение конечно порожденной финитно аппроксимируемой группы при помощи финитно аппроксимируемой группы само является финитно аппроксимируемой группой.

Данная статья посвящена исследованиям финитной отделимости подгрупп в расщепляемых расширениях. В основе этих исследований лежит следующая теорема Р. Алленби и Р. Грегораса [10].

Теорема 1. *Пусть G — расщепляемое расширение конечно порожденной группы A с помощью группы B.*

1. Если в группах A и B все подгруппы (все циклические подгруппы) финитно отделимы, то и в группе G все подгруппы (все циклические подгруппы) финитно отделимы.

2. Если в группе A все подгруппы финитно отделимы, а в группе B все конечно порожденные подгруппы финитно отделимы, то в группе G все конечно порожденные подгруппы финитно отделимы.

Р. Бернс в упомянутой выше работе [11] доказал, что любая свободная группа обладает свойством LERF. С другой стороны, хорошо известно и легко проверяется, что прямое произведение двух свободных групп ранга 2 не является LERF [10] и поэтому пункт 2 теоремы 1 нельзя сформулировать по аналогии с пунктом 1.

Легко также заметить, что первый пункт теоремы 1 можно очевидным образом обратить. Второй же пункт теоремы 1 дает только достаточное условие финитной отделимости конечно порожденных подгрупп в расщепляемом расширении G конечно порожденной группы A. Нам удалось ослабить это достаточное условие до критерия финитной отделимости всех конечно порожденных подгрупп группы G, который формулируется следующим образом.

Пусть G — расщепляемое расширение конечно порожденной группы A с помощью группы B. В группе G все конечно порожденные подгруппы финитно отделимы тогда и только тогда, когда в группах A и B все конечно порожденные подгруппы финитно отделимы и, сверх того, в группе A финитно отделимы все подгруппы, высекаемые в A конечно порожденными подгруппами группы G.

Кроме того, нам удалось обобщить теорему Р. Алленби и Р. Грегораса (и найденный нами критерий LERF расщепляемого расширения) в следующих двух направлениях.

Первое направление состоит в том, что условие конечной порожденности, накладываемое в теореме 1 на базовую группу A, мы ослабляем до следующего условия: для любого натурального числа n число всех подгрупп группы A индекса n конечно. Напомним в связи с этим, что конечность числа всех подгрупп данного конечного индекса в произвольной конечно порожденной группе была установлена еще М. Холлом (см., например, [7, с. 250]).

Второе направление, в котором обобщаются теорема 1 и сформулированный выше критерий LERF, связано с тем, что вместо финитной отделимости всех подгрупп (всех конечно порожденных подгрупп, всех циклических подгрупп) мы исследуем более общее свойство финитной отделимости всех Ω-подгрупп, где Ω — класс групп, замкнутый относительно факторизации и подгрупп конечного индекса, т. е. класс групп, удовлетворяющий следующим двум условиям: (i) если $X \in \Omega$, то любой гомоморфный образ группы X принадлежит Ω, (ii) если $X \in \Omega$, то любая подгруппа конечного индекса группы X принадлежит Ω.

Подводя итоги сказанному выше, сформулируем основной результат настоящей работы.

Теорема 2. *Пусть G — расщепляемое расширение группы A с помощью группы B и для любого натурального числа n число всех подгрупп группы A индекса n конечно. И пусть Ω — класс групп, замкнутый относительно факторизации и подгрупп конечного индекса. Тогда следующие два условия равносильны.*

1. В группе G все Ω-подгруппы финитно отделимы.

2. В группах A и B все Ω-подгруппы финитно отделимы и, сверх того, в группе A финитно отделимы все подгруппы, высекаемые в A Ω-подгруппами группы G.

Так как класс всех конечно порожденных групп замкнут относительно факторизации и подгрупп конечного индекса, то из теоремы 2 вытекает следующий критерий для свойства LERF.

Следствие 1. *Пусть G – расщепляемое расширение группы A с помощью группы B и для любого натурального числа n число всех подгрупп группы A индекса n конечно. В группе G все конечно порожденные подгруппы финитно отделимы тогда и только тогда, когда в группах A и B все конечно порожденные подгруппы финитно отделимы и в группе A финитно отделимы все подгруппы, высекаемые в A конечно порожденными подгруппами группы G. В частности, если в группе A все подгруппы финитно отделимы, а в группе B все конечно порожденные подгруппы финитно отделимы, то в группе G все конечно порожденные подгруппы финитно отделимы.*

Частным случаем этого критерия является достаточное условие LERF, установленное Р. Алленби и Р. Грегорасом (см. п. 2 теоремы 1).

Сформулируем теперь еще один результат работы, который получается из теоремы 2 при более сильных ограничениях на класс Ω. Мы усиливаем требование замкнутости класса Ω относительно подгрупп конечного индекса, накладываемое в теореме 2, до требования замкнутости класса Ω относительно любых подгрупп. За счет этого критерий финитной отделимости всех Ω-подгрупп расщепляемого расширения принимает следующий более простой вид (по сравнению с теоремой 2).

Теорема 3. *Пусть G — расщепляемое расширение группы A с помощью группы B и для любого натурального числа n число всех подгрупп группы A индекса n конечно. И пусть Ω — класс групп, замкнутый относительно факторизации и подгрупп. Тогда следующие два утверждения равносильны.*

1. В группе G все Ω-подгруппы финитно отделимы.

2. В группах A и B все Ω-подгруппы финитно отделимы.

Как уже отмечалось выше, теорема 3 может быть легко установлена с помощью теоремы 2. В самом деле, если Ω — класс групп, замкнутый относительно подгрупп, то п. 2 теоремы 2 равносилен п. 2 теоремы 3.

Если в теореме 3 в качестве Ω взять класс, состоящий только из единичной группы, то данная теорема дает критерий финитной аппроксимируемости расщепляемого расширения, существенно обобщающий упомянутую выше теорему А. И. Мальцева.

Очевидными примерами классов групп, замкнутых относительно подгрупп и факторизации, являются класс всех групп, класс всех циклических групп, класс всех полициклических групп, а также любое многообразие групп. Поэтому из теоремы 3 вытекает следующее утверждение.

Следствие 2. *Пусть G — расщепляемое расширение группы A с помощью группы B и для любого натурального числа n число всех подгрупп группы A индекса n конечно. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. В группе G все подгруппы финитно отделимы тогда и только тогда, когда в группах A и B все подгруппы финитно отделимы.

2. В группе G все циклические (полициклические) подгруппы финитно отделимы тогда и только тогда, когда в группах A и B все циклические (полициклические) подгруппы финитно отделимы.

3. Пусть V — многообразие групп. В группе G все подгруппы из многообразия V финитно отделимы тогда и только тогда, когда в группах A и B все подгруппы из многообразия V финитно отделимы.

4. В частности, в группе G все абелевы (разрешимые, нильпотентные) подгруппы финитно отделимы тогда и только тогда, когда в группах A и B все абелевы (разрешимые, нильпотентные) подгруппы финитно отделимы.

Заметим, что следствие 2 является обобщением первого пункта теоремы Р. Алленби и Р. Грегораса.

Еще одно обобщение теоремы Р. Алленби и Р. Грегораса получено в работе [5], где доказано, что в теореме 1 условие конечной порожденности группы A можно ослабить до требования конечности ее общего ранга (термин был введен А. И. Мальцевым в работе [8]). Этот результат перекрывается теоремами 2 и 3, поскольку группа конечного общего ранга может содержать только конечное число подгрупп данного конечного индекса [1].

2. Вспомогательные утверждения

Докажем сначала несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Пусть G — группа, H — подгруппа группы G. Если подгруппа M группы H финитно отделима в группе G, то она финитно отделима и в группе H.*

Доказательство. Пусть элемент h принадлежит подгруппе H, но не принадлежит подгруппе M. Так как M — подгруппа группы G, то по условию леммы M финитно отделима в группе G. Поэтому существует гомоморфизм φ группы G на некоторую конечную группу такой, что $h\varphi \notin M\varphi$. Пусть φ_1 — ограничение гомоморфизма φ на подгруппу H. Тогда φ_1 — гомоморфизм группы H на конечную группу и $h\varphi_1 \notin M\varphi_1$. Таким образом, подгруппа M финитно отделима в H. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть Ω – класс групп, замкнутый относительно подгрупп конечного индекса. И пусть H – подгруппа конечного индекса группы G. Если в группе H все подгруппы из класса Ω финитно отделимы, то и в группе G финитно отделимы все подгруппы из класса Ω.*

Доказательство. Пусть подгруппа H группы G имеет конечный индекс в группе G и в группе H все подгруппы из класса Ω финитно отделимы. Тогда в подгруппе H содержится нормальная подгруппа H_1 группы G, имеющая в группе G конечный индекс, причем любая Ω-подгруппа группы H_1 по условию финитно отделима в H, а, значит, и в H_1 (см. лемму 1). Поэтому без потери общности будем предполагать, что подгруппа H нормальна в группе G.

Пусть A — произвольная подгруппа группы G из класса Ω, и элемент g группы G не принадлежит подгруппе A. Используя тот факт, что все подгруппы из класса Ω группы H финитно отделимы, покажем, что подгруппа A финитно отделима в группе G, т. е. в группе G существует нормальная подгруппа N, имеющая конечный индекс в группе G и такая, что элемент g не принадлежит подгруппе AN.

Если $g \notin AH$, то в качестве подгруппы N выступает сама подгруппа H.

Пусть теперь $g \in AH$, т. е. $g = ah$ для некоторых элементов $a \in A$ и $h \in H$. Полагая $A_1 = A \cap H$, получаем подгруппу A_1 группы H, не содержащую, очевидно, элемент h этой группы. Поскольку подгруппа конечного индекса некоторой группы высекает в каждой подгруппе этой группы подгруппу конечного индекса, индекс подгруппы A_1 в группе A конечен. Так как группа A принадлежит классу Ω и Ω замкнут относительно подгрупп конечного индекса, то подгруппа A_1 также принадлежит классу Ω. Таким образом, A_1 является финитно отделимой в группе H и поэтому существует нормальная подгруппа K конечного индекса группы H такая, что элемент h не принадлежит A_1K. Так как индекс подгруппы H в группе G конечен, то K является подгруппой конечного индекса группы G и поэтому содержит подгруппу N, нормальную в группе G и имеющую в группе G конечный индекс. Поскольку $h \notin A_1K$ и N — подгруппа группы K, элемент h не принадлежит A_1N.

Покажем, что $g \notin AN$, т. е. что подгруппа N — искомая. Предположим, напротив, что $g \in AN$, т. е. $g = a_1n$ для некоторых элементов

$a_1 \in A$, $n \in N$. Так как, к тому же, $g = ah$, имеем равенство $ah = a_1 n$, т. е. $a^{-1}a_1 = hn^{-1}$. А так как $a^{-1}a_1 \in A$, $hn^{-1} \in H$, то получаем включение $a^{-1}a_1 \in A_1$. Отсюда $h = (a^{-1}a_1)n \in A_1 N$, что невозможно. Тем самым лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть G — расщепляемое расширение конечной группы A с помощью группы B. И пусть Ω — класс групп, замкнутый относительно подгрупп конечного индекса. Если в группе B все подгруппы из класса Ω финитно отделимы, то и в группе G все подгруппы из класса Ω финитно отделимы.*

Доказательство. Очевидно, что B — подгруппа конечного индекса группы G и индекс $[G : B]$ совпадает с порядком группы A. Поэтому данная лемма непосредственно вытекает из леммы 2.

Лемма 4. *Пусть G — группа. И пусть A, H — подгруппы группы G. Если подгруппа H финитно отделима в группе G, то $A \cap H$ финитно отделима в A.*

Доказательство. Пусть подгруппа H финитно отделима в группе G. Докажем, что $A \cap H$ финитно отделима в A. Возьмем элемент g из подгруппы A такой, что $g \notin A \cap H$. Тогда $g \notin H$. Подгруппа H финитно отделима в G, значит, существует гомоморфизм φ группы G на некоторую конечную группу такой, что $g\varphi \notin H\varphi$. Следовательно, $g\varphi \notin (A \cap H)\varphi$. Пусть φ_1 — ограничение гомоморфизма φ на подгруппу A. Тогда φ_1 — гомоморфизм группы A на некоторую конечную группу и $g\varphi_1 \notin (A \cap H)\varphi_1$. Таким образом, получаем, что $A \cap H$ финитно отделима в A.

Лемма 5. *Пусть H — подгруппа группы G, индекс подгруппы H в группе G конечен и равен n. И пусть число всех подгрупп группы G индекса n конечно. Тогда в группе G существует характеристическая подгруппа N конечного индекса такая, что $N \subseteq H$.*

Доказательство. Так как число всех подгрупп группы G индекса n конечно, то можно выписать все подгруппы группы G индекса n:

$$H_1, H_2, ..., H_s.$$

Пусть $\varphi \in \mathrm{Aut}\, G$. Так как автоморфизм группы G отображает подгруппу индекса n на подгруппу индекса n, то φ переставляет между собой подгруппы $H_1, H_2, ..., H_s$. Поэтому

$$\{H_1, H_2, ..., H_s\} = \{H_1\varphi, H_2\varphi, ..., H_s\varphi\}$$

и, следовательно,

$$\left(\bigcap_{i=1}^{s} H_i\right)\varphi = \bigcap_{i=1}^{s} H_i\varphi = \bigcap_{i=1}^{s} H_i,$$

т. е., если положить

$$N = \bigcap_{i=1}^{s} H_i,$$

то $N\varphi = N$. Поэтому N — характеристическая подгруппа группы G. Так как по теореме Пуанкаре пересечение конечного числа подгрупп конечного индекса группы G является подгруппой конечного индекса группы G (см., например, [7, с. 53]), то N — подгруппа конечного индекса группы G.

Так как одна из подгрупп H_i совпадает с подгруппой H, то $N \subseteq H$. Следовательно, N — искомая подгруппа. Лемма доказана.

3. Доказательство теоремы 2

Теперь перейдем непосредственно к доказательству теоремы 2.

Докажем сначала достаточность в теореме 2. Пусть G — расщепляемое расширение группы A с помощью группы B. И пусть для любого натурального числа n число всех подгрупп группы A индекса n конечно. Пусть Ω — класс групп, замкнутый относительно факторизации и подгрупп конечного индекса. Предположим, что в группах A и B финитно отделимы все подгруппы из класса Ω и в группе A финитно отделимы все подгруппы, являющиеся пересечениями группы A со всеми подгруппами из класса Ω группы G.

Возьмем произвольную подгруппу H из класса Ω группы G и элемент g, принадлежащий группе G, но не принадлежащий подгруппе H.

Сначала рассмотрим случай, когда $g \notin HA$. В этом случае $gA \notin HA/A$. Фактор-группа HA/A является подгруппой группы G/A. Так как

$$G/A = BA/A \cong B/B \cap A \cong B,$$

а в группе B все подгруппы из класса Ω финитно отделимы, то и в группе G/A все подгруппы из класса Ω финитно отделимы. При этом подгруппа HA/A группы G/A принадлежит классу Ω, так как класс Ω замкнут относительно факторизации. Из последних двух обстоятельств следует, что подгруппа HA/A финитно отделима в группе G/A. Следовательно, существует гомоморфизм φ из фактор-группы G/A на конечную группу такой, что $(gA)\varphi \notin (HA/A)\varphi$. Пусть ψ — естественный гомоморфизм группы G на фактор-группу G/A, тогда $H\psi = HA/A$. Получаем, что $g\psi\varphi \notin H\psi\varphi$. Таким образом, гомоморфизм $\psi\varphi$ — искомый.

Теперь рассмотрим случай, когда $g \in HA$, т. е. когда $g = ha$, где $h \in H$, $a \in A$. Заметим, что элемент a не принадлежит подгруппе $H_1 = H \cap A$. По условию подгруппа H_1 финитно отделима в A. Поэтому в группе A существует нормальная подгруппа N конечного индекса такая, что $a \notin H_1N$. Так как для любого натурального числа n число всех подгрупп группы A индекса n конечно, то по лемме 5 любая подгруппа конечного индекса группы A содержит в себе характеристическую подгруппу группы A конечного индекса. Поэтому без потери общности можем считать подгруппу N характеристической в A. Поскольку подгруппа A является нормальной в группе G, то и подгруппа N нормальна в группе G. Покажем, что $g \notin HN$.

Если, напротив, элемент g принадлежит подгруппе HN, то элемент g представим в виде $g = h_1x$, где $h_1 \in H$, $x \in N$. С другой стороны, $g = ha$, где $h \in H$, $a \in A$. Тогда $ha = h_1x$. Следовательно, получаем равенство $h^{-1}h_1 = ax^{-1}$, где $h^{-1}h_1 \in H$, $ax^{-1} \in A$. Значит, $h^{-1}h_1 \in H_1$ и поэтому элемент $a = h^{-1}h_1x$ принадлежит подгруппе H_1N, но это противоречит выбору подгруппы N. Следовательно, $g \notin HN$.

Рассмотрим фактор-группу G/N и естественный гомоморфизм φ из группы G на фактор-группу G/N. Так как элемент g не принадлежит подгруппе HN, то $gN \notin HN/N$, т. е. $g\varphi \notin H\varphi$.

Поскольку G — расщепляемое расширение группы A с помощью группы B и подгруппа N содержится в A, то легко видеть, что G/N является расщепляемым расширением группы A/N с помощью группы BN/N, причем группа A/N конечна, так как подгруппа N имеет конечный индекс в группе A. Так как группа BN/N изоморфна группе B, то по условию теоремы в группе BN/N все подгруппы из класса Ω финитно отделимы. Поэтому в силу леммы 3 в группе G/N все подгруппы из класса Ω финитно отделимы.

Так как подгруппа H принадлежит классу Ω, то и подгруппа HN/N принадлежит классу Ω. Отсюда и из того, что в группе G/N все подгруппы из класса Ω финитно отделимы, следует, что HN/N финитно отделима в G/N, т. е. $H\varphi$ финитно отделима в G/N. А поскольку $g\varphi \notin H\varphi$, то существует гомоморфизм ψ группы G/N на некоторую конечную группу такой, что $(g\varphi)\psi \notin (H\varphi)\psi$. Таким образом, подгруппа H финитно отделима в группе G. Тем самым достаточность в теореме 2 доказана.

Необходимость в доказываемой теореме обеспечивается леммами 1 и 4. Теорема 2 полностью доказана.

Библиографический список

1. *Азаров Д. Н.* О группах конечного общего ранга // Вестник Ивановского государственного университета. Сер.: Биология, Химия, Физика, Математика. 2004. Вып. 3. С. 100—103.
2. *Азаров Д. Н.* О почти аппроксимируемости конечными p-группами // Чебышевский сборник. 2010. Т. 11, вып. 3. С. 11—21.
3. *Азаров Д. Н.* Аппроксимационные свойства групп автоморфизмов и расщепляемых расширений // Известия высших учебных заведений. Математика. 2015. № 8. С. 3—13.
4. *Азаров Д. Н.* Некоторые аппроксимационные свойства полициклических групп и расщепляемых расширений // Владикавказский математический журнал. 2015. Т. 17, № 4. С. 3—10.
5. *Азаров Д. Н.* О финитно аппроксимируемых группах конечного общего ранга // Математические заметки. 2017. Т. 101, № 3. С. 323—329.
6. *Азаров Д. Н., Чуракова Е. И.* Об аппроксимируемости конечными p-группами некоторых расщепляемых расширений // Вестник Ивановского государственного университета. Сер.: Естественные, общественные науки. 2009. Вып. 2. С. 68—71.
7. *Курош А. Г.* Теория групп. М. : Наука, 1967. 648 с.
8. *Мальцев А. И.* О группах конечного ранга // Математический сборник. 1948. Т. 22, № 2. С. 351—352.
9. *Мальцев А. И.* О гомоморфизмах на конечные группы // Ученые записки Ивановского государственного педагогического института. 1958 Т. 18, № 5. С. 49—60.
10. *Allenby R., Gregorac R.* On locally extended residually finite groups // Lecture Notes Math. 1973. Vol. 319. P. 9—17.
11. *Burns R. C.* On finitely generated subgroups of free products // J. Austral. Math. Soc. 1971. Vol. 12. P. 358—364.
12. *Lennox J., Robinson D.* The theory of infinite soluble groups. Oxford : Clarendon Press, 2004. 359 c.