K	21	22	23	24	25	26	31	32	33	34	35	36
10000	83	84	45	47	52	79	67	72	33	31	52	48
1000	83	87	69	68	78	79	74	77	50	47	76	59
100	85	88	81	78	90	81	81	82	75	75	90	72
10	89	91	92	90	90	88	87	86	92	90	90	81
min	82	84	41	42	52	78	62	70	27	28	51	45

Как и выше, оценим на основе полученных данных количество локальных экстремумов целевой функции:

K	21	22	26	31	32	36
N_{extr}	$640K$	$200K$	$61K$	$\approx 50M$	$> 50M$	$\approx 40M$

5. Заключение

На основе проведенных экспериментов можно сделать следующие выводы.

1. Достаточно очевидный и ожидаемый результат: с помощью трёх нейронов можно достичь лучшей аппроксимации, чем с помощью двух.

2. Почти во всех случаях наилучших результатов можно добиться с помощью активаторной функции ReLU: $f(x) = max(0, x)$, с ней может соперничать функция RuLU1: $f(x) = min(max(0, x), 1)$.

Библиографический список

1. *Галушкин А. И.* Нейрокомпьютеры : учеб. пособие // М. : Альянс, 2014. 528 с.
2. *Николенко С., Кадурин А., Архангельская Е.* Глубокое обучение // СПб. : Питер, 2018. 480 с.
3. Основы нейрокибернетики. М. : Горячая линия – Телеком, 2015. 372 с.
4. Центр загрузки Microsoft. URL: https://www.microsoft.com/ru-ru/download (дата обращения: 20.01.2019).

УДК 512.714

Ю. А. Хашина

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ N-КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ В ВИДЕ СУММЫ КВАДРАТОВ

n-квадратичная функция, представимая в виде суммы квадратов n-линейных функций, может быть представлена в виде такой суммы, состоящей не более чем из $2^n - 1$ слагаемых и неотрицательной константы.

Ключевые слова: n-квадратичная функция, экстремум.

An n-quadratic function represented as a sum of squares of n-linear functions can be represented as such a sum consisting of no more than $2^n - 1$ terms and a nonnegative constants.

Key words: n-quadratic function, extremum.

Утверждение следующей теоремы является обобщением результата работы автора «Биквадратичные функции и их представление в виде суммы квадратов» (Вестник Ивановского государственного университета. Сер.: Естественные, общественные науки. 2017. Вып. 2. С. 36—42).

Теорема. *Если n-квадратичная функция $F = F(x_1, \ldots, x_n)$ может быть представлена в виде суммы нескольких квадратов n-линейных функций:*

$$F = \sum_{j_1, \ldots, j_n = 0}^{2} a_{j_1 \ldots j_n} x_1^{j_1} \ldots x_n^{j_n} = \sum_{r=1}^{m} \left(\sum_{i_1, \ldots, i_n = 0}^{1} b^{(r)}_{i_1 \ldots i_n} x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n} \right)^2, \qquad (1)$$

то F можно представить в виде суммы

1) *не более чем 2^n таких слагаемых,*

2) *не более чем $2^n - 1$ таких слагаемых и неотрицательной константы.*

Доказательство. Существование представления (1) эквивалентно системе равенств соответствующих коэффициентов.

Пусть $b_{i_1 \ldots i_n} = \left(b^{(1)}_{i_1 \ldots i_n}, \ldots, b^{(m)}_{i_1 \ldots i_n}\right)$ — векторы строк коэффициентов. Тогда систему равенств коэффициентов можно записать как систему равенств скалярных произведений вида

$$\sum_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_l = 0}^{1} b_{i_1 \ldots \overset{k_1}{\varepsilon_1} \ldots \overset{k_l}{\varepsilon_l} \ldots i_n} \, b_{i_1 \ldots \overset{k_1}{(1-\varepsilon_1)} \ldots \overset{k_l}{(1-\varepsilon_l)} \ldots i_n} = a_{2i_1 \ldots \overset{k_1}{1} \ldots \overset{k_l}{1} \ldots 2i_n}$$

для всех $0 \le l \le n$, всех $1 \le k_1 < \ldots < k_l \le n$ и всех наборов $(i_1, \ldots, i_n)$, где $i_j \in \{0; 1\}$ и $j \ne k_1, \ldots, k_l$.

1) Рассмотрим ортонормированный базис линейной оболочки

$$\left\langle \left\{ b_{i_1 \ldots i_n} \mid i_j \in \{0; 1\} \right\} \right\rangle.$$

В этом базисе векторы $b_{i_1 \ldots i_n}$ будут задаваться не более чем 2^n координатами. Равенства скалярных произведений сохранятся, следовательно, и равенства соответствующих коэффициентов в формуле (1) для $m = 2^n$ будут выполнены.

2) Выберем новый ортонормированный базис линейной оболочки

$$\left\langle \left\{ b_{i_1 \ldots i_n} \mid i_j \in \{0; 1\} \right\} \right\rangle$$

так, чтобы первые $2^n - 1$ векторов этого базиса порождали линейную оболочку

$$\left\langle \left\{ b_{i_1 \ldots i_n} \mid i_j \in \{0; 1\}, \ \sum i_j > 0 \right\} \right\rangle$$

векторов с ненулевыми мультииндексами. Тогда для всех ненулевых мультииндексов последняя координата равна нулю:

$$b^{(2^n)}_{i_1 \ldots i_n} = 0, \ i_j \in \{0; 1\}, \ \sum i_j > 0.$$

Следовательно, последний квадрат n-линейной функции в правой части равенства (1) имеет вид $\left(b^{(2^n)}_{0 \ldots 0}\right)^2$ и является неотрицательной константой.