УДК 512.543

Е. Д. Логинова, Д. И. Молдаванский

О СОПРЯЖЕННОЙ ФИНИТНОЙ ОТДЕЛИМОСТИ ЦИКЛИЧЕСКИХ ПОДГРУПП

Подгруппа H группы G называется сопряженно финитно отделимой, если для любого элемента $g \in G$, не сопряженного ни с одним элементом из H, найдется такой гомоморфизм φ группы G на некоторую конечную группу, что элемент $g\varphi$ не сопряжен в группе $G\varphi$ ни с одним элементом из подгруппы $H\varphi$. Известно, что в любой свободной группе все конечно порожденные подгруппы сопряженно финитно отделимы, но прямое произведение двух свободных групп ранга 2 содержит конечно порожденную подгруппу, не являющуюся сопряженно финитно отделимой. Доказывается, тем не менее, что все циклические подгруппы прямого произведения двух свободных групп сопряженно финитно отделимы. Доказано также, что свободное произведение произвольного семейства групп, в каждой из которых любая циклическая подгруппа сопряженно финитно отделима, является группой, в которой все циклические подгруппы сопряженно финитно отделимы.

Ключевые слова: финитно аппроксимируемые группы, финитно отделимые подгруппы, сопряженно отделимые подгруппы, прямые произведения групп, свободные произведения групп.

E. D. Loginova, D. I. Moldavanskii

ON THE CONJUGACY FINITELY SEPARABILITY OF CYCLIC SUBGROUPS

A subgroup H of a group G is said to be conjugacy finitely separable if, for every element $g \in G$ that is not conjugate to any element from H, there exists a homomorphism φ of the group G onto some finite group such that the element $g\varphi$ is not conjugate in the group $G\varphi$ to any element from the subgroup $H\varphi$. It is known that, in any free group, all finitely generated subgroups are conjugacy finitely separable, but the direct product of two free groups of rank 2 contains a finitely generated subgroup that is not conjugacy finitely separable. It is proved, however, that all cyclic subgroups of the direct product of two free groups are conjugacy finitely separable. It is also proved that the free product of any family of groups with the property of conjugacy finitely separability of all cyclic subgroups is a group, in which all cyclic subgroups are conjugacy finitely separable.

Key words: residually finite groups, finitely separable subgroups, conjugacy separable subgroups, direct products of groups, free products of groups.

1. Введение. Формулировка результатов

Понятие финитно аппроксимируемой группы, впервые, как свидетельствуют авторы исторического обзора [9], введенное А. И. Мальцевым в работе [4], обобщалось в ряде направлений. Так, в другой статье А. И. Мальцева [5] изучалась аппроксимируемость (уже с явным использованием этого термина) нильпотентными группами свободных произведений групп, а в работе [6] было предложено рассматривать понятие группы, аппроксимируемой группами произвольного класса $\mathcal{K}$: группа G называется аппроксимируемой группами из класса $\mathcal{K}$ (короче, $\mathcal{K}$-аппроксимируемой), если для любого неединичного элемента $g \in G$ существует гомоморфизм φ группы G на некоторую группу из класса $\mathcal{K}$, образ $g\varphi$ элемента g при котором отличен от единицы.

Очевидно, что группа G является $\mathcal{K}$-аппроксимируемой тогда и только тогда, когда для любых двух различных элементов этой группы их образы при некотором гомоморфизме на группу из класса $\mathcal{K}$ также различны, и еще одно направление обобщения $\mathcal{K}$-аппроксимируемости состоит в том, что вместо отношения равенства рассматривается некоторое другое, определенное на всех группах, отношение ρ между элементами и множествами элементов группы. Группа G называется $\mathcal{K}$-аппроксимируемой относительно отношения ρ, если для любых ее элементов и множеств элементов, для которых ρ ложно, существует гомоморфизм группы G на некоторую группу из класса $\mathcal{K}$, в которой ρ ложно для образов этих элементов и множеств (см., например, [2, с. 57]).

Подавляющее большинство результатов, полученных в этом направлении к настоящему времени, относятся к свойствам $\mathcal{K}$-аппроксимируемости относительно равенства элементов группы, относительно сопряженности элементов и относительно вхождения элемента в данную подгруппу.

В последнем случае, следуя [6], говорят о $\mathcal{K}$-отделимых подгруппах: подгруппа H группы G называется $\mathcal{K}$-отделимой, если для любого элемента $g \in G$, не принадлежащего подгруппе H, существует гомоморфизм φ группы G на некоторую группу из класса $\mathcal{K}$ такой, что образ $g\varphi$ элемента g не входит в образ $H\varphi$ подгруппы H. Очевидно, что группа является $\mathcal{K}$-аппроксимируемой тогда и только тогда, когда ее единичная подгруппа $\mathcal{K}$-отделима.

Другой вид отделимости подгрупп получается заменой отношения принадлежности подгруппе отношением «быть сопряженным с некоторым элементом этой подгруппы».

Более точно, назовем подмножество M группы G сопряженно $\mathcal{K}$-отделимым, если для любого элемента $a \in G$, не сопряженного ни с одним элементом из M, найдется такой гомоморфизм φ группы G на некоторую группу из класса $\mathcal{K}$, что элемент $a\varphi$ не сопряжен в группе $G\varphi$ ни с одним элементом из подмножества $M\varphi$. Другими словами, если $a^G \cap M = \varnothing$, то $a^G \cap MN = \varnothing$ для некоторой нормальной подгруппы N такой, что фактор-группа G/N принадлежит классу $\mathcal{K}$ (здесь, как обычно, a^G обозначает совокупность всех элементов $a^x = x^{-1}ax$, сопряженных с a в группе G).

Разумеется, нас, главным образом, интересует сопряженная отделимость подгрупп, но и сопряженная отделимость подмножеств, не являющихся подгруппами, также может представлять определенный интерес. Хорошо известно, например, что если класс $\mathcal{K}$ гомоморфно замкнут, то для любой нормальной подгруппы N группы G $\mathcal{K}$-аппроксимируемость фактор-группы G/N равносильна $\mathcal{K}$-отделимости подгруппы N. Оказалось (см.: [1, предложение 1]), что если $\mathcal{K}$ — гомоморфно замкнутый класс, то для любой группы G и произвольной ее нормальной подгруппы N фактор-группа G/N является $\mathcal{K}$-аппроксимируемой относительно сопряженности тогда и только тогда, когда каждый смежный класс группы G по подгруппе N сопряженно $\mathcal{K}$-отделим.

Всюду далее рассматривается только аппроксимируемость в классе $\mathcal{F}$ всех конечных групп.

Хорошо известно (см.: [6]), что $\mathcal{F}$-аппроксимируемость конечно определенной группы относительно отношения ρ влечет за собой существование алгоритма, распознающего истинность этого отношения. Поэтому построенный в работе [14] пример подгруппы H конечно порожденной нильпотентной группы G такой, что проблема распознавания сопряженности элемента $g \in G$ с некоторым элементом из H алгоритмически неразрешима, показывает, что конечно порожденная нильпотентная группа может содержать подгруппу, не являющуюся сопряженно $\mathcal{F}$-отделимой. Тем не менее, имеет место доказанное Дж. Дайер

Предложение 1.1 [13, лемма 6]. *В произвольной конечно порожденной нильпотентной группе все циклические подгруппы являются сопряженно $\mathcal{F}$-отделимыми.*

В той же статье доказано и

Предложение 1.2 [13, лемма 8]. *В любой свободной группе все циклические подгруппы являются сопряженно $\mathcal{F}$-отделимыми.*

Это утверждение было обобщено следующим образом.

Предложение 1.3 [7, теорема 1]. *В любой свободной группе все конечно порожденные подгруппы являются сопряженно $\mathcal{F}$-отделимыми.*

В данной статье рассматривается поведение свойства сопряженной $\mathcal{F}$-отделимости подгрупп относительно операций прямого произведения и (обычного) свободного произведения.

Отрицательный ответ на вопрос о сопряженной $\mathcal{F}$-отделимости любых конечно порожденных подгрупп прямого произведения групп, все конечно порожденные подгруппы которых сопряженно $\mathcal{F}$-отделимы, получается с помощью указанного в статье [10] примера конечно порожденной подгруппы прямого произведения двух свободных групп ранга 2, не являющейся $\mathcal{F}$-отделимой. Для полноты изложения приведем схему построения этого примера.

Пусть A — свободная группа со свободными порождающими a и b, B — свободная группа со свободными порождающими c и d и G — их прямое произведение, т. е., напомним, A и B — поэлементно перестановочные подгруппы группы G, причем $G = AB$ и $A \cap B = 1$.

Фиксируем некоторое конечное множество W элементов группы A такое, что группа $\langle a, b;\ W \rangle$ не является $\mathcal{F}$-аппроксимируемой и потому нормальное замыкание N подмножества W в группе A не является $\mathcal{F}$-отделимой ее подгруппой (например, в силу [11] таким является множество, состоящее из единственного элемента $a^{-1}b^2ab^{-3}$). Следовательно, существует не принадлежащий подгруппе N элемент $g \in A$, образ которого при любом гомоморфизме группы A на конечную группу лежит в образе подгруппы N.

Обозначим через H подгруппу группы G, порожденную подмножеством W и элементами ac и bd. Тогда выполнено равенство $A \cap H = N$, из которого следует, в частности, что элемент g не входит в подгруппу H, тогда как, с другой стороны, очевидно, что при любом гомоморфизме группы G на конечную группу образ этого элемента лежит в образе подгруппы H. Легко видеть, что, в действительности, элемент g не сопряжен в группе G ни с одним элементом из подгруппы H.

В самом деле, если для некоторого $z \in G$ выполнено включение $z^{-1}gz \in H$, то, записав элемент z в виде $z = xy$, где $x \in A$ и $y \in B$, получаем $z^{-1}gz = x^{-1}gx \in A$. Следовательно, $x^{-1}gx \in A \cap H = N$ и потому элемент g принадлежит подгруппе N, что противоречит его выбору.

Таким образом, в прямом произведении G двух свободных групп ранга 2 существует элемент g, не сопряженный ни с одним элементом из конечно порожденной подгруппы H, но при любом гомоморфизме группы G на конечную группу образ элемента g входит в образ подгруппы H. Отсюда и из предложения 1.3 следует, что семейство групп, в которых все конечно порожденные подгруппы сопряженно $\mathcal{F}$-отделимы, не замкнуто относительно операции прямого произведения.

С другой стороны, здесь будет доказана

Теорема 1. *В прямом произведении двух свободных групп каждая циклическая подгруппа является сопряженно $\mathcal{F}$-отделимой.*

Вопрос о том, будет ли в общем случае прямое произведение групп, в каждой из которых любые циклические подгруппы сопряженно $\mathcal{F}$-отделимы, группой с сопряженно $\mathcal{F}$-отделимыми всеми циклическими подгруппами, остается открытым. Неизвестно также, наследует ли свободное произведение групп от сомножителей свойство сопряженной $\mathcal{F}$-отделимости всех конечно порожденных подгрупп. Второй результат данной работы утверждает, что для циклических подгрупп это верно.

Теорема 2. *Свободное произведение произвольного семейства групп, в каждой из которых любая циклическая подгруппа сопряженно $\mathcal{F}$-отделима, является группой, в которой все циклические подгруппы сопряженно $\mathcal{F}$-отделимы.*

2. Доказательство теоремы 1

Здесь будет удобнее пользоваться внешним определением прямого произведения групп.

Пусть A и B — свободные группы и $G = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$ — их прямое произведение. Пусть также H — циклическая подгруппа группы G, порожденная элементом $h = (c, d)$, и пусть элемент $g = (a, b)$ группы G не сопряжен ни с одним элементом из подгруппы H (где, разумеется, $a, c \in A$ и $b, d \in B$). Требуется показать, что существует гомоморфизм φ группы G на некоторую конечную группу такой, что в этой группе элемент $g\varphi$ не сопряжен ни с одним элементом из подгруппы $H\varphi$.

Обозначим через C циклическую подгруппу группы A, порожденную элементом c, и через D — циклическую подгруппу группы B, порожденную элементом d.

Если в группе A элемент a не сопряжен ни с одним элементом подгруппы C, то в силу предложения 1.2 можно выбрать такую нормальную подгруппу N конечного индекса группы A, что $a^A \cap CN = \varnothing$. Очевидно, что в этом случае произведение проектирования G на A и естественного отображения A на A/N является искомым гомоморфизмом. В случае, когда элемент b не сопряжен ни с одним элементом подгруппы D, требуемый гомоморфизм строится аналогично.

Легко видеть, что в случаях, когда хотя бы один из элементов a, b, c, d равен единице, вопрос о существовании требуемого гомоморфизма либо сводится к только что рассмотренным случаям, либо решается непосредственно с использованием проектирований. Поэтому можем считать далее, что все элементы a, b, c, d отличны от единицы и что для некоторых элементов $x \in A$ и $y \in B$ и некоторых целых чисел m и n выполнены равенства $x^{-1}ax = c^m$ и $y^{-1}by = d^n$. При этом, поскольку тогда $(x, y)^{-1}g(x, y) = (c^m, d^n)$, равенство $m = n$ невозможно.

Рассмотрим сначала случай, когда и равенство $n = -m$ не имеет места, так что $|m| \neq |n|$.

Здесь нам понадобится хорошо известное и без труда проверяемое свойство свободных групп: для любого неединичного элемента f свободной группы F и любого положительного целого числа r в группе F существует нормальная подгруппа конечного индекса N такая, что порядок элемента fN фактор-группы F/N равен r. Поэтому в группах A и B существуют нормальные подгруппы R и S конечных индексов такие, что порядок элемента cR фактор-группы A/R, как и порядок элемента dS фактор-группы B/S, равен числу $r = |mn|$. Полагая $P = A/R \times B/S$, покажем, что гомоморфизм $\varphi\colon G \to P$, определяемый естественными отображениями A на A/R и B на B/S (т. е. $(x, y)\varphi = (xR, yS)$ для любого $(x, y) \in G$), является искомым.

В самом деле, если предположить, что в группе P элемент $g\varphi$ сопряжен с элементом подгруппы $H\varphi$, то для некоторых элементов $u \in A$, $v \in B$ и некоторого целого числа t в этой группе должно выполняться равенство $\big((u, v)\varphi\big)^{-1}(g\varphi)\big((u, v)\varphi\big) = (h\varphi)^t$, равносильное, как легко видеть, системе сравнений

$$\begin{cases} u^{-1}au \equiv c^t \pmod{R} \\ v^{-1}bv \equiv d^t \pmod{S}. \end{cases}$$

Отсюда и из равенств $x^{-1}ax = c^m$ и $y^{-1}by = d^n$ следует, что элементы $(cR)^m$ и $(cR)^t$ группы A/R и элементы $(dS)^n$ и $(dS)^t$ группы B/S сопряжены в этих группах. Поэтому порядки элементов $(cR)^m$ и $(cR)^t$ равны и порядки элементов $(dS)^n$ и $(dS)^t$ равны. Следовательно, $(r, m) = (r, t) = (r, n)$, так что и порядки элементов $(cR)^m$ и $(cR)^n$ должны совпадать. Но это невозможно, так как в силу выбора числа r порядки элементов $(cR)^m$ и $(cR)^n$ равны числам $|n|$ и $|m|$ соответственно.

Предположим теперь, что $n = -m$. Поскольку тогда элемент g сопряжен с элементом $(c, d^{-1})^m$, для завершения доказательства нам достаточно указать такой гомоморфизм группы G на конечную группу, образ при котором элемента $(c, d^{-1})^m$ не сопряжен ни с одним элементом образа подгруппы H.

Напомним, что известная теорема В. Магнуса [3, теорема 5.7 и следствие 5.12] (см. также [8, с. 14]) утверждает, что в любой свободной группы F пересечение $\bigcap_{i=1}^{\infty} \gamma_i(F)$ всех членов нижнего центрального ряда совпадает с единичной подгруппой и все фактор-группы $F/\gamma_i(F)$ являются нильпотентными группами без кручения. Поскольку элементы c и d отличны от единицы, отсюда следует существование натуральных чисел i и j таких, что $c \in \gamma_i(A) \setminus \gamma_{i+1}(A)$ и $d \in \gamma_j(B) \setminus \gamma_{j+1}(B)$. При этом элементы $c\gamma_{i+1}(A)$ и $d\gamma_{i+1}(B)$ фактор-групп $A/\gamma_{i+1}(A)$ и $B/\gamma_{j+1}(B)$ являются центральными, а порядки их бесконечны.

Пусть $\overline{G} = A/\gamma_{i+1}(A) \times B/\gamma_{j+1}(B)$ — прямое произведение групп $A/\gamma_{i+1}(A)$ и $B/\gamma_{j+1}(B)$ и σ — гомоморфизм группы G на группу $\overline{G}$, определяемый естественными отображениями A на $A/\gamma_{i+1}(A)$ и B на $B/\gamma_{j+1}(B)$ (для краткости σ-образы элементов $x \in G$ и подмножеств $X \subseteq G$ будем обозначать через $\overline{x}$ и $\overline{X}$ соответственно).

Подгруппа $\overline{H}$ лежит в центре конечно порожденной нильпотентной группы $\overline{G}$ и порождается элементом $\overline{(c,d)} = (cR, dS)$. Так как порядки элементов cR и dS бесконечны, элемент $\overline{(c, d^{-1})^m} = \big((cR)^m,\, (dS)^{-m}\big)$ не входит, очевидно, в эту подгруппу, и потому в силу $\mathcal{F}$-отделимости подгрупп конечно порожденной нильпотентной группы (см.: [6]) существует гомоморфизм τ группы $\overline{G}$ на конечную группу, в которой τ-образ элемента $\overline{(c, d^{-1})^m}$ не принадлежит подгруппе $\overline{H}\tau$ и, следовательно, не сопряжен с ее элементами, так как она центральна. Произведение $\varphi = \sigma\tau$ является, очевидно, требуемым гомоморфизмом.

3. Доказательство теоремы 2

Для большей замкнутости изложения напомним ряд понятий и утверждений, связанных с конструкцией свободного произведения групп.

Пусть $G = A * B$ — свободное произведение некоторых групп A и B. Тогда эти группы можно считать подгруппами группы G. Произвольный неединичный элемент $g \in G$ однозначно представим в виде произведения вида $g = x_1x_2\ldots x_s$, где $s \geqslant 1$, каждый сомножитель x_i является неединичным элементом либо подгруппы A (и называется A-слогом этого произведения), либо подгруппы B (и называется B-слогом) и при $s > 1$ любые соседние слоги x_i и x_{i+1} не лежат в одной и той же подгруппе A или B. Такая запись элемента g называется несократимой записью, а количество s сомножителей этой записи называется длиной этого элемента и обозначается символом $l(g)$. Несократимой записью единичного элемента группы G считают пустое произведение, а его длину считают равной нулю.

Если g — элемент группы G с несократимой записью $g = x_1x_2\ldots x_s$, где $s \geqslant 2$, утверждение о том, что несократимая запись этого элемента имеет вид cd для некоторых элементов c и d, будет означать, что она получается соединением несократимых записей этих элементов, т. е. $c = x_1x_2\ldots x_i$ и $d = x_{i+1}x_{i+2}\ldots x_s$ для некоторого i, $1 < i < s$.

Элемент g группы называется циклически несократимым, если в его несократимой записи $g = x_1x_2\ldots x_s$ при $s \geqslant 2$ крайние сомножители x_1 и x_s не являются одновременно A-слогами или B-слогами (так что при $s \leqslant 1$ элемент g циклически несократим).

Можно показать, что элемент g группы G не является циклически несократимым тогда и только тогда, когда его можно представить в виде $g = uvu^{-1}$, где u и v — неединичные элементы группы G с несократимыми записями $u = x_1x_2\ldots x_r$ и $v = y_1y_2\ldots y_s$, причем элемент v циклически несократим, элементы x_r и y_1 не принадлежат одной и той же подгруппе

A или B и при $s > 1$ элемент $y_s x_r^{-1}$ (лежащий в той же подгруппе A или B, где находятся элементы x_r и y_s) отличен от единицы. Отсюда следует, что если элемент g не является циклически несократимым, то для любого целого $m > 0$ элемент g^m также не является циклически несократимым.

Циклической перестановкой циклически несократимого элемента g с несократимой записью $g = x_1 x_2 \ldots x_s$, где $s \geqslant 2$, называется любой элемент, определяемый (очевидно, циклически несократимой) записью вида $x_{i+1} x_{i+2} \ldots x_s x_1 \ldots x_i$, где $i = 0, 1, \ldots, s-1$.

С помощью этих понятий формулируется критерий сопряженности элементов группы G.

Предложение 3.1 [3, теорема 4.2]. *Справедливы следующие утверждения.*

1. *Каждый элемент группы $G = A * B$ сопряжен с некоторым циклически несократимым элементом.*

2. *Если длины двух циклически несократимых элементов группы различны, то эти элементы не являются сопряженными.*

3. *Циклически несократимые элементы длины 1 сопряжены в группе G тогда и только тогда, когда они лежат в одном и том же свободном сомножителе и сопряжены в нем.*

4. *Циклически несократимые элементы, длина которых больше 1, сопряжены в группе G тогда и только тогда, когда один из них является циклической перестановкой другого.*

Нам понадобится еще одно свойство элементов свободного произведения групп.

Предложение 3.2. *Пусть f и g — циклически несократимые элементы группы $G = A * B$, причем длина хотя бы одного из них больше 1. Тогда для любого целого числа $m > 0$ из равенства $f^m = g^m$ следует равенство $f = g$ и из того, что в группе G элементы f^m и g^m сопряжены, следует, что сопряженными являются и элементы f и g.*

Доказательство. В самом деле, пусть $l(g) \geqslant 2$. Тогда в силу циклической несократимости этого элемента несократимая запись элемента g^m состоит из m отрезков, каждый из которых совпадает с несократимой записью элемента g, так что $l(g^m) = ml(g)$.

Если $f^m = g^m$, то элемент f^m является циклически несократимым и потому (как отмечено выше) циклически несократим и элемент f, причем его длина больше 1. Поэтому несократимая запись элемента f^m тоже состоит из m отрезков, каждый из которых совпадает с несократимой записью элемента f, и $l(f^m) = ml(f)$. Следовательно, $l(f) = l(g)$ и из единственности несократимой записи элементов группы G вытекает, что $f = g$.

Если элементы f^m и g^m сопряжены, то (в силу предложения 3.1) элемент f^m совпадает с некоторой циклической перестановкой элемента g^m. Это означает, что несократимая запись элемента g^m представлена в виде соединения cd записей некоторых элементов c и d и несократимая запись элемента f^m совпадает с записью произведения dc. Очевидно, что существуют элементы u и v и целые числа $k \geqslant 0$ и $l \geqslant 0$ такие, что $g = uv$, $c = g^k u$, $d = vg^l$ и $k + l = m - 1$. Поскольку тогда $c = u(vu)^k$ и $d = (vu)^l v$, имеем $f^m = dc = (vu)^m$, откуда в силу доказанного первого утверждения предложения получаем $f = vu$. Таким образом, элементы f и g сопряжены и предложение 3.2 доказано полностью.

Переходя непосредственно к доказательству теоремы 2, заметим, что, как нетрудно видеть, для этого достаточно рассмотреть лишь случай свободного произведения двух групп.

Предположим, что группа $G = A * B$ является свободным произведением групп A и B, в каждой из которых все циклические подгруппы сопряженно $\mathcal{F}$-отделимы. Отметим, что поскольку сопряженная $\mathcal{F}$-отделимость всех циклических подгрупп некоторой группы влечет $\mathcal{F}$-отделимость ее единичной подгруппы и потому $\mathcal{F}$-аппроксимируемость этой группы, группа G $\mathcal{F}$-аппроксимируема.

Пусть U — циклическая подгруппа группы G, порожденная элементом u, и g — элемент группы G, не сопряженный ни с одним элементом из подгруппы U. Требуется доказать существование гомоморфизма φ группы G на конечную группу, в которой элемент $g\varphi$ не сопряжен ни с одним элементом подгруппы $U\varphi$. Очевидно при этом, что элементы g и u можно считать циклически несократимыми.

В случае, когда элемент g и подгруппа U принадлежат одному и тому же свободному сомножителю, существование такого гомоморфизма является очевидным следствием предположения о сопряженной $\mathcal{F}$-отделимости всех циклических подгрупп групп A и B. Поэтому всюду ниже будем считать, что если U лежит в одной из подгрупп A или B, то элемент g в эту подгруппу не входит.

Предположим сначала, что группы A и B конечны. В этом случае группа G содержит нормальную свободную подгруппу F конечного индекса и потому, в силу результата статьи [12], $\mathcal{F}$-аппроксимируема относительно сопряженности. Следовательно, если подгруппа U содержится в одной из подгрупп A и B и потому конечна, существование требуемого гомоморфизма очевидно.

Таким образом, остается рассмотреть ситуацию, когда $l(u) \geqslant 2$, и рассмотрение ее начнем с замечания о том, что для любого целого $m > 0$ элемент g^m не сопряжен в группе G ни с одним элементом из подгруппы U^m. Действительно, из того, что элемент g^m сопряжен с элементом u^{mk} для некоторого целого числа k, в соответствии с утверждением предложения 3.2 следовало бы, что элемент g сопряжен с элементом u^k, а это невозможно в силу выбора g.

Отсюда следует, что если число m совпадает с индексом подгруппы F в группе G, то элемент $f = g^m$ группы F не сопряжен в группе G ни с одним элементом из подгруппы $V = U^m$, также лежащей в F.

Фиксируем некоторую систему $x_1, x_2, \ldots, x_m$ представителей левых смежных классов группы G по подгруппе F и для каждого $i = 1, 2, \ldots, m$ полагаем $f_i = x_i^{-1} f x_i$. Так как для каждого такого i элемент f_i не сопряжен в группе F ни с одним элементом из подгруппы V (и в группе F все циклические подгруппы сопряженно $\mathcal{F}$-отделимы), в F существует нормальная подгруппа конечного индекса M_i такая, что элемент f_i не сопряжен в F ни с одним элементом подгруппы VM_i. Подгруппа $M = \bigcap_{i=1}^{m} M_i$ имеет конечный индекс в группе G и потому содержит подгруппу N, нормальную в G и имеющую в G конечный индекс. Утверждается, что элемент f не сопряжен в группе G ни с одним элементом подгруппы VN.

Действительно, пусть, напротив, существует элемент $x \in G$ такой, что $x^{-1}fx \in VN$. Этот элемент может быть представлен в виде $x = x_i y$ для некоторого номера $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ и некоторого $y \in F$. Тогда включение $x^{-1}fx \in VN$ принимает вид $y^{-1}f_i y \in VN$, откуда вытекает включение $y^{-1}f_i y \in VM_i$, противоречащее выбору подгруппы M_i.

Таким образом, в фактор-группе G/N элемент $(gN)^m$ не сопряжен ни с одним элементом подгруппы $(UN/N)^m$. Так как тогда элемент gN не сопряжен, очевидно, ни с одним элементом подгруппы UN/N, естественный гомоморфизм G на G/N является искомым.

Итак, утверждение о сопряженной $\mathcal{F}$-отделимости всех циклических подгрупп свободного произведения двух конечных групп доказано. Тем самым, задача построения в общем случае требуемого гомоморфизма группы G на конечную группу сводится к нахождению таких нормальных подгрупп R и S конечных индексов групп A и B, что при гомоморфизме ρ группы G на группу $A/R * B/S$, продолжающем естественные отображения A на A/R и B на B/S, образ $g\rho$ элемента g в этой группе не сопряжен ни с одним элементом образа $U\rho$ подгруппы U.

Обозначим через X и Y множества соответственно всех A-слогов и всех B-слогов несократимых записей элементов g и u, и пусть W — множество всех неединичных элементов группы G, все слоги несократимых записей которых входят в $X \cup Y$. Поскольку множества X и Y конечны, а группы A и B $\mathcal{F}$-аппроксимируемы, в этих группах можно выбрать такие нормальные подгруппы R и S конечных индексов, что $R \cap X = \varnothing$ и $S \cap Y = \varnothing$. Пусть также ρ — гомоморфизм группы G на группу $\overline{G} = A/R * B/S$, продолжающий естественные отображения A на A/R и B на B/S.

Легко видеть, что при любом выборе подгрупп R и S, удовлетворяющих условиям $R \cap X = \varnothing$ и $S \cap Y = \varnothing$, для любого $c \in W$ имеем $l(c\rho) = l(c)$, причем, если элемент c циклически несократим, то и элемент $c\rho$ циклически несократим, и для любых $c, d \in W$ из того, что $c\rho = d\rho$, следует, что $c = d$. В частности, если $l(u) = 1$, т. е. подгруппа U лежит в одном из свободных сомножителей, скажем $U \subseteq A$, то для любых таких подгрупп R и S образ элемента g относительно соответствующего гомоморфизма ρ не сопряжен ни с одним элементом из образа подгруппы U. Действительно, если $l(g) = 1$, то $g\rho$ является неединичным элементом подгруппы B/S, а если $l(g) > 1$, то элемент $g\rho$ не сопряжен ни с одним элементом подгруппы A/R.

Если $l(u) > 1$, то в силу циклической несократимости элемента u все неединичные элементы подгруппы U принадлежат множеству W. Поэтому в случае, когда число $l(g)$ не делится на $l(u)$, снова образ элемента g не сопряжен ни с одним элементом из образа подгруппы U при гомоморфизме ρ, соответствующем произвольному выбору подгрупп R и S с теми же свойствами. Это следует из того, что элемент $g\rho$ и все неединичные элементы подгруппы $U\rho$ циклически несократимы и потому сопряженность элементов $g\rho$ и $(u\rho)^k$ для некоторого k влечет равенства $l(g) = l(g\rho) = l\big((u\rho)^k\big) = kl(u\rho) = kl(u)$.

Остается рассмотреть случай, когда $l(g) = nl(u)$ для некоторого целого числа $n > 0$. При доказательстве предложения 3.2 было замечено, что если $v_1, v_2, \ldots, v_s$ — все циклические перестановки элемента u, то $v_1^n, v_2^n, \ldots, v_s^n$ — список всех циклических перестановок элемента u^n. Поскольку элемент g не сопряжен ни с одним элементом подгруппы U, он отличен от всех элементов этого списка, и, так как группа G является $\mathcal{F}$-аппроксимируемой, то элемент g отличен от всех этих элементов по модулю некоторой нормальной подгруппы N конечного индекса группы G.

Если $R_1 = A \cap N$, $S_1 = B \cap N$, а R_2 и S_2 — такие нормальные подгруппы конечных индексов групп A и B, что $R_2 \cap X = \varnothing$ и $S_2 \cap Y = \varnothing$, то нормальные подгруппы $R = R_1 \cap R_2$, $S = S_1 \cap S_2$ конечных индексов групп A и B не пересекаются с множествами X и Y и образ элемента g относительно соответствующего гомоморфизма $\rho\colon G \to A/R{*}B/S$ отличен от образов каждого из элементов $v_1^n, v_2^n, \ldots, v_s^n$.

Этот гомоморфизм является искомым. Действительно, если, напротив, элемент $g\rho$ сопряжен в группе $A/R * B/S$ с элементом подгруппы $U\rho$, то он совпадает с какой-то циклической перестановкой элемента $(u\rho)^k$ для некоторого целого числа k (которое можно считать положительным, заменив, если нужно, g на g^{-1}). Сравнение длин этих элементов дает равенство $k = n$, и, так как (практически очевидно, что) любая циклическая перестановка элемента $(u\rho)^n$ совпадает с элементом $(v_i^n)\rho$ для некоторого $i = 1, 2, \ldots, s$, мы приходим к равенству $g\rho = (v_i^n)\rho$.

Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Библиографический список

1. *Иванова Е. А., Молдаванский Д. И.* Об апппроксимируемости относительно сопряженности конечно порожденных нильпотентных групп // Вестник Ивановского государственного университета. Сер.: Биология, Химия, Физика, Математика. 2004. Вып. 3. С. 125—130.
2. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп : учебное пособие. 5-е изд., стереотип. СПб.: Лань, 2009. 288 с.
3. *Магнус В., Каррас А., Солитэр Д.* Комбинаторная теория групп. М.: Наука, 1974. 456 с.
4. *Мальцев А. И.* Об изоморфном представлении бесконечных групп матрицами // Математический сборник. 1940. Т. 8. С. 405—422.
5. *Мальцев А. И.* Обобщенно нильпотентные алгебры и их присоединенные группы // Математический сборник. 1949. Т. 25. С. 347—366.
6. *Мальцев А. И.* О гомоморфизмах на конечные группы // Ученые записки Ивановского государственного педагогического института. 1958. Т. 18. С. 49—60.
7. *Молдаванский Д. И.* О финитной отделимости подгрупп // Ивановский государственный университет. 20 лет: юбилейный сб. науч. ст. Ч. 2. Иваново, 1993. С. 18—23.
8. *Ольшанский А. Ю., Шмелькин А. Л.* Бесконечные группы // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. 1989. Т. 37. С. 5—113.
9. *Чандлер Б., Магнус В.* Развитие комбинаторной теории групп. М.: Мир, 1985. 255 с.
10. *Allenby R., Gregorac R.* On locally extended residually finite groups // Lecture Notes Math. 1973. Vol. 319. P. 9—17.
11. *Baumslag G., Solitar D.* Some two-generator one-relator non-Hopfian groups // Bull. Amer. Math. Soc. 1962. Vol. 68. P. 199—201.
12. *Dyer J. L.* Separating conjugates in free-by-finite groups // J. London Math. Soc. (2). 1979. Vol. 20, № 2. P. 215—221.
13. *Dyer J. L.* Separating conjugates in generalized free products and HNN extensions // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. 1980. Vol. 29, № 1. P. 35—51.
14. *Segal D.* Decidable properties of polycycle groups // Proc. London Math. Soc. 1990. Vol. 61. P. 497—528.