12. *Туманова Е. А.* К вопросу об аппроксимируемости корневыми классами групп обобщенных свободных произведений с нормальным объединением // Математика и ее приложения. Журнал Ивановского математического общества. 2013. Вып. 10. С. 61—64.
13. *Туманова Е. А.* Некоторые условия аппроксимируемости корневыми классами групп обобщенных свободных произведений с нормальной объединенной подгруппой // Чебышевский сборник. 2013. Т. 14, № 3. С. 134—141.
14. *Туманова Е. А.* Аппроксимируемость корневыми классами свободных конструкций групп : дис. ... канд. физ.-мат. наук. Иваново, 2014.
15. *Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости конечными π-группами обобщенных свободных произведений групп // Математические заметки. 2014. Т. 95, № 4. С. 605—614.
16. *Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости корневыми классами групп обобщенных свободных произведений с нормальным объединением // Известия высших учебных заведений. Математика. 2015. № 10. С. 27—44.
17. *Kim G., McCarron J.* On amalgamated free products of residually p-finite groups // Journal of Algebra. 1993. Vol. 162, № 1. P. 1—11.
18. *Sokolov E. V.* A necessary condition for the residual nilpotence of HNN-extensions // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2018. Vol. 39, № 2. P. 281—285.

УДК 510.5

Б. Я. Солон

СЛАБО ТОТАЛЬНЫЕ И КО-ТОТАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ И ЧАСТИЧНЫЕ СТЕПЕНИ

В статье рассматриваются новые понятия слабой тотальности и ко-тотальности функций и степеней перечислимости таких функций. Впервые данные понятия, примененные к множествам, были рассмотрены автором в 2005 году. Недавно группа американских математиков обратилась к теме ко-тотальных множеств и степеней перечислимости ввиду того, что наиболее фундаментальным понятием в различных приложениях является свойство ко-тотальности.

Ключевые слова: операторы перечисления, частично вычислимые операторы, частичные степени, тотальные функции, ко-тотальные функции.

B. Ya. Solon

WEAKLY TOTAL AND COTOTAL FUNCTIONS AND PARTIAL DEGREES

The article deals with new notions of weak totality and cototality of functions and enumeration degrees of such functions. For the first time, these notions applied to sets were considered by the author in 2005. Recently, a group of American mathematicians referred to the topic of cototal sets and enumeration degrees in view of the fact that the most fundamental concept in various applications is the property of cototality.

Key words: enumeration operators, partial recursive operators, partial degrees, total functions, cototal functions.

Мы будем использовать понятия и терминологию, которые приняты в монографии [7]. Пусть $\omega = \{0, 1, 2, \dots\}$ — множество натуральных чисел; A, B, $\ldots$, X, Y (с индексами или без) — подмножества ω. Пусть, как обычно, $\langle x, y\rangle$ — канторовский номер упорядоченной пары (x, y). Если z — канторовский номер пары (x, y), то пусть $\langle z\rangle_1 = x$ и $\langle z\rangle_2 = y$. Пусть PF — множество одноместных частичных арифметических функций. Для данной частичной функции α обозначим через $dom\,\alpha$, $ran\,\alpha$ и $graph\,\alpha = \{\langle x, \alpha(x)\rangle : x \in dom\,\alpha\}$ область определения, множество значений и график α, соответственно. Будем писать $\alpha(x)\!\downarrow$, если $x \in dom\,\alpha$, и $\alpha(x)\!\uparrow$ — в противном случае. Для обозначения частичных функций из PF будем использовать малые греческие буквы начала алфавита: α, β, γ, $\ldots$ Для данных частичных функций α и β через $\alpha \oplus \beta$ обозначим сочленение функций α и β. Пусть $\chi_A(x)$ — частичная характеристическая функция множества A с графиком $\{\langle x, 0\rangle : x \in A\}$ и $c_A(x)$ — характеристическая функция множества A с графиком $\{\langle x, 1\rangle : x \in A\} \cup \{\langle x, 0\rangle : x \notin A\}$. Мы ограничим использование символов f, g, h только для обозначения *тотальных* функций, т. е. таких, что $dom\, f = \omega$. Множество тотальных функций обозначим через TF. Будем писать $\alpha \subseteq \beta$, если $graph\,\alpha \subseteq graph\,\beta$. Термин *функциональный оператор* мы будем использовать в случае однозначных отображений $PF \to PF$ (не обязательно всюду определенных). Пусть, как обычно, $\Phi_z(X) = \big\{x : (\exists u)[\langle x, u\rangle \in W_z \;\&\; D_u \subseteq X]\big\}$ — результат применения e-оператора с геделевым номером z к множеству X.

Определение 1. Функциональный оператор Ψ называется *частично вычислимым* (ч. в.) [в терминологии Х. Роджерса — *частично рекурсивным*], если он определяется некоторым e-оператором Φ_z, т. е. для любых $\alpha, \beta \in PF$

$$\alpha = \Psi(\beta) \iff (\exists z)[graph\,\alpha = \Phi_z(graph\,\beta)].$$

Частичность функционального оператора Ψ, определяемого некоторым e-оператором Φ_z, состоит в том, что если даже $\alpha = \Psi(\beta)$, то это не гарантирует, что множество $\Psi(\gamma)$ является графиком некоторой функции для любой $\gamma \in PF$.

Определение 2. Ч. в. оператор Ψ называется *вычислимым* (в.) [в терминологии Х. Роджерса — *рекурсивным*], если он определяется таким e-оператором Φ_z, что функциональный оператор $\Psi\colon PF \to PF$ является всюду определенным.

Пусть $\{\Phi_z\}_{z\in\omega}$ — эффективное перечисление всех e-операторов и $\psi \in PF$. Введем в рассмотрение множество $K_\psi = \big\{\langle z, x\rangle : x \in \Phi_z(\psi)\big\}$. Легко проверить, что $graph\,\psi \equiv_e K_\psi$ для любой $\psi \in PF$.

Определение 3. Введем операцию *скип* на функциях: $\psi^\diamond = \chi_{\overline{K_\psi}}$ для любой $\psi \in PF$.

Определение 4. Введем операцию *e-скачка* на функциях: $\psi^{je} = \chi_{K_\psi} \oplus \chi_{\overline{K_\psi}}$ для любой $\psi \in PF$.

Термин «скип» мы позаимствовали из работы [4], где он применялся для аналогичной операции на множествах. Подробнее о скипах функций будет сказано ниже. Операция e-скачка для множеств была введена в статье [6], здесь мы адаптировали данную операцию для функций.

Введем обозначения: PC — множество всех ч. в. операторов; C — множество всех в. операторов. Будем говорить, что α *е-сводится к* (*се-сводится к*) β и писать $\alpha \le_e \beta$ ($\alpha \le_{ce} \beta$), если $\alpha = \Psi(\beta)$ для некоторого $\Psi \in PC$ ($\Psi \in C$). В статье будут рассмотрены две сводимости на PF:

$$\alpha \le_e \beta \Leftrightarrow (\exists \Psi \in PC)[\alpha = \Psi(\beta)] \quad \text{и}$$
$$\alpha \le_{ce} \beta \Leftrightarrow (\exists \Psi \in C)[\alpha = \Psi(\beta)].$$

Ранее эти сводимости были детально изучены в статье М. Г. Розинаса [2].

Как обычно, пусть $deg_e\alpha = \{\gamma : \gamma \equiv_e \alpha\}$ — *функциональная е-степень* или *частичная степень* функции α и $deg_{ce}\alpha = \{\gamma : \gamma \equiv_{ce} \alpha\}$ — *се-степень* функции α. Пусть L_e — ч. у. множество частичных степеней и L_{ce} — ч. у. множество се-степеней.

Легко видеть, что скип и е-скачок инвариантны в частичной степени (т. е. если $\varphi \equiv_e \psi$, то $\varphi^\diamond \equiv_e \psi^\diamond$ и $\varphi^{je} \equiv_e \psi^{je}$), поэтому они индуцируют соответствующие операторы на е-степенях. Мы используем $\mathbf{a}^\diamond$ для обозначения скипа и $\mathbf{a}'$ для обозначения е-скачка частичной степени $\mathbf{a}$. Обозначим через $\mathbf{0}$ частичную степень, состоящую из всех частично вычислимых функций, и через $\mathbf{0}'$ — е-скачок степени $\mathbf{0}$. Известно, что $\chi_{\overline{K_\psi}} \in \mathbf{0}'$.

Нам понадобятся следующие простые утверждения о соотношениях между сводимостями $\le_e$ и $\le_{ce}$.

Предложение 1.
(i) $\forall \alpha \forall f[\alpha \le_e f \Leftrightarrow \alpha \le_{ce} f]$.
(ii) $\forall A, B[A \le_e B \Leftrightarrow \chi_A \le_e \chi_B \Leftrightarrow \chi_A \le_{ce} \chi_B]$.

Доказательство.
(i) $\Rightarrow$: Очевидно, что $\alpha \le_{ce} f \to \alpha \le_e f$.

$\Leftarrow$: Пусть $\alpha \le_e f$, тогда существует частично вычислимый оператор Ψ такой, что $\alpha = \Psi(f)$. В этом случае по основной теореме об операторах [7, с. 195] существует вычислимый оператор Ψ_0 такой, что

$$\forall g[g \in dom\,\Psi \to \Psi_0(g) = \Psi(g)].$$

В частности, для нашего случая имеем $\alpha = \Psi_0(f) = \Psi(f)$, следовательно, $\alpha \le_{ce} f$.

(ii) $\Rightarrow$: Пусть $\chi_A = \Phi(\chi_B)$ для некоторого е-оператора Φ. Определим два е-оператора H_1 и H_2:

$$H_1(X) = \big\{\langle\langle x\rangle_1, 0\rangle : x \in X\big\};$$
$$H_2(X) = \big\{\langle x, 0\rangle : \langle x, y\rangle \in X\big\}$$

для всех $x, y \in \omega$ и $X \subseteq \omega$. Пусть $\Psi = H_1 * \Phi * H_2$. Ясно, что Ψ — функциональный оператор, определяемый е-оператором, представляющим собой композицию е-операторов H_1, Φ, H_2. Следовательно, Ψ — частично вычислимый оператор. Докажем, что Ψ — вычислимый оператор. Рассмотрим произвольную функцию α и применим к ней оператор Ψ:

$$\Psi(\alpha) = H_1 * \Phi * H_2(\alpha) = H_1 * \Phi\left(\{\langle x, 0\rangle : \langle x, y\rangle \in dom\,\alpha\}\right) =$$
$$= \big\{\langle\langle x\rangle_1, 0\rangle : x \in \Phi\left(\{\langle x, 0\rangle \in dom\,\alpha\}\right)\big\} = \beta,$$

где, очевидно, β — некоторая функция. Итак, Ψ всюду определен на PF, поэтому Ψ — вычислимый оператор. Кроме того, из определения следует, что $\chi_A = \Psi(\chi_B)$. Это означает, что $\chi_A \leq_{ce} \chi_B$. Заметим, что для любого множества X имеем $X \equiv_e \chi_X$, поэтому $\chi_A \leq_{ce} \chi_B \to \chi_A \leq_e \chi_B \to A \leq_e B$.

$\Leftarrow$: Пусть $A = \Phi(B)$ для некоторого e-оператора Φ. Определим два e-оператора Θ_1 и Θ_2:

$$x \in \Theta_1(X) \Leftrightarrow \langle x, 0\rangle \in X;$$
$$\langle x, y\rangle \in \Theta_2(X) \Leftrightarrow x \in X \wedge y = 0.$$

Ясно, что $H = \Theta_2 * \Phi * \Theta_1$ — e-оператор, определяющий вычислимый оператор. Непосредственно проверяется, что $\chi_A = H(\chi_B)$, следовательно, $\chi_A \leq_{ce} \chi_B$. Предложение доказано.

Множество частичных степеней, содержащих хотя бы одну тотальную функцию, обозначим через D_{TF}. Будем называть частичные степени из D_{TF} *тотальными частичными степенями.*

Предложение 2. $\forall\psi[\psi \in TF \to \psi \equiv_e c_{graph\,\psi}]$.

Доказательство. Пусть $\psi \in TF$, тогда $dom\,\psi = \omega$ и

$$c_{graph\,\psi} = \big\{(\langle x, \psi(x)\rangle, 1) : x \in \omega\big\} \cup \big\{(\langle x, y\rangle, 0) : x \in \omega \wedge y \neq \psi(x)\big\}.$$

Ясно, что в этом случае $\psi \leq_e c_{graph\,\psi}$ и $c_{graph\,\psi} \leq_e \psi$.

Заметим, что обратное утверждение неверно. Например, пусть $\psi(0)\uparrow$ и $\psi(x) = 0$ для всех $x \neq 0$. Тогда $\psi \notin TF$. В то же время оба множества $graph\,\psi$ и $c_{graph\,\psi}$ вычислимы и, следовательно, e-эквивалентны. В этом случае имеет место e-эквивалентность функций $\psi \equiv_e c_{graph\,\psi}$. В общем случае имеем $\psi \leq_e c_{graph\,\psi}$ и $c_{graph\,\psi} \nleq_e \psi$.

Авторы статьи [4] впервые всесторонне рассмотрели понятие тотальности множеств и степеней, которое появилось вполне естественно вместе с понятием e-сводимости, и понятие ко-тотальности, которое впервые использовалось (как термин) в тезисах А. В. Панкратьева [1] и было изучено более широко в статьях автора [3, 8]. В [4] для множеств была введена система терминов, характеризующих различные уровни "ко-тотальности" множеств — это *граф-кототальность*, *ко-тотальность* и *слабая ко-тотальность*. Выяснилось, что в работах [1, 3, 8] изучались в этой терминологии свойства граф-кототальных множеств и степеней, и что все приведенные классы множеств различны. Авторы утверждают, что наиболее фундаментальным в различных приложениях является свойство ко-тотальности. Приведем для сведения определения данных свойств из [4].

Пусть $A \subseteq \omega$. Множество A называется *тотальным*, если $\overline{A} \leq_e A$, множество A называется *ко-тотальным*, если наоборот $A \leq_e \overline{A}$, множество A называется *граф-кототальным*, если $A = \overline{graph\,f}$ для некоторой функции $f \in TF$, и, наконец, множество A называется *слабо ко-тотальным*, если $\overline{A} \equiv_e graph\,g$ для некоторой функции $g \in TF$.

В [3] доказано, что для каждой тотальной e-степени $\mathbf{b}$ выше $\mathbf{0}'$ существует граф-кототальная квазиминимальная e-степень $\mathbf{a}$ такая, что $\mathbf{a}' = \mathbf{b}$. Это усиливает результат Макэвоя [6], который доказал, что квазиминимальные e-степени имеют все возможные e-скачки. Заметим, что все три результата из [3, 8] также можно рассматривать как обобщения построенной Гаттериджем квазиминимальной граф-кототальной e-степени [5].

В [4] доказано, что

$$\textit{граф-кототальность} \Rightarrow \textit{ко-тотальность} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \textit{слабая ко-тотальность},$$

причем никаких обратных импликаций нет.

В этой статье предпринята попытка перенести данные понятия на функции и частичные степени. Легко проверить, что определение тотального множества A, как множества, для которого выполнено $\overline{A} \leq_e A$, позволяет доказать, что

$$A \text{ — тотально} \Leftrightarrow A \equiv_e A \oplus \overline{A}.$$

Эта эквивалентность не проходит для случая тотальных функций, о чем было сказано выше. Мы введем новое понятие слабо тотальной функции, которое максимально соответствует множественному аналогу.

Пусть ψ — данная частичная функция, обозначим через $\psi^\sigma(x)$ частичную функцию, которая не определена для $x \in dom\,\psi$ и равна нулю для $x \in \overline{dom\,\psi}$.

Определение 5. Функция ψ называется *слабо тотальной*, если $\psi^\sigma \leq_e \psi$.

Обозначим через WTF (weakly total function) множество всех слабо тотальных функций и через D_{WTF} множество частичных степеней, содержащих хотя бы одну слабо тотальную функцию.

Предложение 3.
(i) $\forall\psi[\psi \in TF \to \psi \in WTF]$.
(ii) $\forall\psi[\overline{dom\,\psi}$ *— в. п.* $\to \psi \in WTF]$.
(iii) $\forall\psi[\psi \in WTF \to \psi \equiv_e c_{graph\,\psi}]$.

Доказательство.
(i) Если $dom\,\psi = \omega$, то $dom\,\psi^\sigma = \varnothing$. В этом случае тривиально $\psi^\sigma \leq_e \psi$ и поэтому ψ — слабо тотальная функция.

(ii) Пусть $\overline{dom\,\psi} \neq \varnothing$ — вычислимо перечислимое множество, тогда ψ^σ — частично вычислимая функция. В этом случае $\psi^\sigma \leq_e \psi$, следовательно, $\psi \in WTF$.

(iii) Пусть $\psi \in WTF$, тогда $\psi^\sigma \leq_e \psi$. Выпишем элементы графика характеристической функции множества $graph\,\psi$:

$$c_{graph\,\psi} = \big\{(\langle x, \psi(x)\rangle, 1) : x \in dom\,\psi\big\} \cup \big\{(\langle x, y\rangle, 0) : x \in dom\,\psi^\sigma\big\} \cup$$
$$\cup \big\{(\langle x, y\rangle, 0) : x \in dom\,\psi \wedge y \neq \psi(x)\big\}.$$

Тогда ясно с учетом нашего предположения, что $\psi \leq_e c_{graph\,\psi}$ и $c_{graph\,\psi} \leq_e \psi$.

Теорема 1. $D_{TF} = D_{WTF}$.

Доказательство. Пусть $\psi \in WTF$, тогда по предложению 3 (iii) $\psi \equiv_e c_{graph\,\psi}$. Это означает, что $D_{TF} \supseteq D_{WTF}$. Обратно, предложение 3 (i) утверждает, что любая тотальная функция является ко-тотальной. Следовательно, $D_{TF} \subseteq D_{WTF}$.

Следующее определение является аналогом понятия ко-тотального множества.

Определение 6. Функция $\psi \in PF$ называется *ко-тотальной*, если $\psi \leq_e \psi^\sigma$.

Обозначим через CTF (cototal function) множество всех ко-тотальных функций и через D_{CTF} множество частичных степеней, содержащих хотя бы одну ко-тотальную функцию.

Определение 7. Функция $\psi \in PF$ называется *слабо ко-тотальной*, если $\psi^\sigma \equiv_e g$ для некоторой тотальной функции g.

Обозначим через $WCTF$ (weakly cototal function) множество всех слабо ко-тотальных функций и через D_{WCTF} множество частичных степеней, содержащих хотя бы одну слабо ко-тотальную функцию.

Предложение 4.
(i) $\forall\psi[deg_e\psi \in D_{CTF} \Leftrightarrow \psi \leq_e \psi^\diamond]$.
(ii) $\forall\psi[\psi \in CTF \to \psi \in WCTF]$.
(iii) *Существуют частичные функции, которые не являются слабо ко-тотальными функциями.*
(iv) $(\forall\psi \in CTF)(\forall\varphi)[\varphi \leq_e \psi \to \varphi^\sigma \leq_e \psi^\diamond]$.

Доказательство.

(i) Если $\psi \in CTF$, то $\psi \leq_e \psi^\sigma$. Поэтому имеем $\psi \leq_e \overline{K_\psi} \leq_e \chi_{\overline{K_\psi}} = \psi^\diamond$. Итак, $\psi \leq_e \psi^\diamond$.

Обратно, если $\psi \leq_e \psi^\diamond$, то $\chi_{K_\psi} \equiv_e K_\psi \equiv_e \psi \leq_e \chi_{\overline{K_\psi}}$. Имеем в результате, что функция $\zeta = \chi_{K_\psi} \equiv_e \psi$ и $\zeta \leq_e \zeta^\sigma$, т. е. ζ является ко-тотальной функцией.

(ii) Пусть $\psi \in CTF$, тогда $\psi \leq_e \psi^\sigma$, поэтому $\psi \oplus \psi^\sigma \leq_e \psi^\sigma$. С другой стороны, очевидно, что $\psi \oplus \psi^\sigma \geq_e \psi^\sigma$, поэтому $\psi \oplus \psi^\sigma \equiv_e \psi^\sigma$. Введем функцию g такую, что $g(x) = \psi(x) + 1$, если $x \in dom\,\psi$, и $g(x) = 0$, если $x \in \overline{dom\,\psi}$. Очевидно, что g — тотальная функция. Кроме того, можно построить алгоритм для вычисления значений функции $g(x)$, используя перечисление графика функции $\psi \oplus \psi^\sigma$. Это означает, что $g \leq_e \psi \oplus \psi^\sigma$. Непосредственно из определения функции $g(x)$ следует, что $g \geq_e \psi \oplus \psi^\sigma$. Следовательно, $\psi \in WCTF$.

(iii) Ниже (см. определение 8) дано понятие квазиминимальной частичной степени. Впервые это понятие появилось в диссертации Гаттериджа [5]. С помощью конструкции Гаттериджа можно построить квазиминимальную функцию ψ такую, что ψ^σ также является квазиминимальной функцией. Если предположить, что ψ является слабо ко-тотальной, то $\psi^\sigma \equiv_e g$ для некоторой тотальной функции g, т. е. $deg_e\psi^\sigma$ является тотальной e-степенью. Из определения квазиминимальной e-степени следует, что она должна быть нетотальной. Итак, функция ψ не является слабо ко-тотальной.

Отсюда следует, в частности, что существуют и не ко-тотальные функции. Впрочем, можно привести тривиальные примеры не ко-тотальных, но слабо ко-тотальных функций. Пусть f — любая тотальная невычислимая функция, тогда $f^\sigma = \varnothing$ и в случае $f \leq_e f^\sigma$ получаем, что f — вычислимая функция. В то же время $f^\sigma = \varnothing \equiv_e g$, где g — некоторая тотальная вычислимая функция. Итак, имеем пример не ко-тотальной, слабо тотальной функции. Аналогично доказывается, что невычислимая частичная функция ψ такая, что $\overline{dom\,\psi}$ — в. п. множество, является не ко-тотальной, слабо ко-тотальной функцией.

(iv) Следует непосредственно из определения 3.

Определение 8. Частичная степень (се-степень) $deg_e\psi \neq \mathbf{0}$ называется *квазиминимальной*, если

$$\forall f[f \leq_e \psi \to f \text{ — вычислимая функция}].$$

Теорема 2. *Любая тотальная частичная степень* $\mathbf{a} \geq \mathbf{0}'$ *содержит ко-тотальную функцию* ψ *такую, что* $deg_e\psi$ *— квазиминимальная частичная степень.*

Доказательство. В статье [3] доказана теорема, сформулированная в терминах множеств: любая тотальная е-степень $\mathbf{a} \geq \mathbf{0}'$ содержит тотальную функцию f такую, что $\overline{graph\,f}$ принадлежит квазиминимальной е-степени. Теорема 2 не является прямым следствием процитированной теоремы, но ее доказательство можно трансформировать в доказательство теоремы 2.

Замечание. Определения слабо тотальной функции, ко-тотальной и слабо кототальной функции можно дать в более общем виде. В данной статье этот подход не исследуется, однако, эти определения приведем ниже с сохранением соответствующих терминов.

Пусть ψ — данная частичная функция, обозначим через $\psi_f^\sigma(x)$ частичную функцию, которая не определена для $x \in dom\,\psi$ и удовлетворяет равенству $\psi_f^\sigma(x) = f(x)$ для $x \in \overline{dom\,\psi}$, где f — некоторая тотальная функция такая, что $\psi \subseteq f$ и $f \leq_e \psi$.

Определение 5′. Функция ψ называется *слабо тотальной*, если $\psi_f^\sigma \leq_e \psi$ для некоторой тотальной функции f такой, что $\psi \subseteq f$ и $f \leq_e \psi$.

Определение 6′. Функция ψ называется *ко-тотальной*, если $\psi \leq_e \psi_f^\sigma$ для некоторой тотальной функции f такой, что $\psi \subseteq f$ и $f \leq_e \psi$.

Определение 7′. Функция ψ называется *слабо ко-тотальной*, если $(\exists g \in TF)[\psi_f^\sigma \equiv_e g]$ для некоторой тотальной функции f такой, что $\psi \subseteq f$ и $f \leq_e \psi$.

Библиографический список

1. *Панкратьев А. В.* Исследование некоторых свойств е-степеней кототальных множеств // Логика и приложения: Междунар. конф., посвященная 60-летию со дня рождения академика Ю. Л. Ершова: тез. докл. Новосибирск: Ин-т дискр. матем. и информ., 2000.
2. *Розинас М. Г.* Частичные степени и r-степени // Сибирский математический журнал. 1974. Т. 15, № 6. С. 1323—1331.
3. *Солон Б. Я.* Тотальные и ко-тотальные степени перечислимости // Известия высших учебных заведений. Математика. 2005. № 9. С. 60—68.
4. *Andrews U., Ganchev H. A., Kuyper R., Lempp S., Miller J. S., Soskova A., Soskova M.* On cototality and the skip operator in the enumeration degrees // Trans. Amer. Math. Soc. 2019. Vol. 372. P. 1631—1670.
5. *Gutteridge L.* Some results on enumeration reducibility. Ph. D. Thesis. Simon Fraser University, 1971.

6. *McEvoy K.* Jumps of quasiminimal enumeration degrees // J. Symbolic Logic. 1985. Vol. 50, № 3. P. 839—848.
7. *Rogers H., Jr.* Theory of recursive functions and effective computability. New York: McGraw-Hill, 1967. 482 p.
8. *Solon B. Ya.* Co-total enumeration degrees // *Beckmann A., Berger U., Löwe B., Tucker J. V.* (eds). Second conference on computability in Europe, CiE 2006. Proceedings. Berlin, Heidelberg : Springer, 2006. P. 538—545. (Lecture Notes in Computer Science, Vol. 3988).

УДК 519.67

С. И. Хашин

СРАВНЕНИЕ АКТИВАТОРНЫХ ФУНКЦИЙ НЕЙРОСЕТИ

Сравнивается эффективность различных функций активации нейронной сети. Рассматривается 3-слойная нейросеть с двум входами для задачи регрессии: по 10 нейронов в первом и втором слоях. В 3-м, выходном, слое всегда 1 нейрон. Для всех нейронов в каждом внутреннем слое выбирается одна и та же функция активации. Мы рассматриваем по 9 различных активаторных функций в каждом слое, всего 81 вариант. Для примера рассматриваются три различные обучающие матрицы (4096 обучающих векторов в одной, 255 025 в другой и 70 000 в третьей). Сравниваются результаты обучения для разных пар активаторных функций в каждом слое.

Ключевые слова: нейрон, нейросеть, передаточная функция, активаторная функция.

S. I. Khashin

A COMPARISON OF THE ACTIVATION FUNCTIONS OF THE NEURAL NETWORK

We consider a 3-layer neural network with two inputs for the regression problem: 10 neurons in the first and the second layers. The 3rd, output, layer always contains 1 neuron. For all neurons in each inner layer, the same activation function is selected. We consider 9 different activator functions in each layer, 81 options in total. As an example, three different training matrices are considered (4096 training vectors in the first, 255 025 in the second, and 70 000 in the third). The paper compares the effectiveness of various selections of activator functions.

Key words: neuron, neural network, activation function

1. Введение

Нейронные сети в последнее время активно примеряются во многих разделах компьютерной графики [1–4]. К сожалению, большинство результатов в этой области носят экспериментальный характер, выбор той или иной архитектуры нейросети, выбор активаторных функций основывается на интуиции разбработчика. Обучение нейронной сети требует боль-