порожденной группой. Давид Ионович обобщил этот результат на случай π-изоляторов, где π — множество простых чисел, причем он нашел абсолютно элементарное доказательство для этого общего утверждения.

Пять лет тому назад в декабре 2015 года под руководством декана факультета математики и компьютерных наук Б. Я. Солона в ИвГУ состоялась Международная научная конференция «Алгоритмические проблемы в алгебре и теории вычислимости», посвященная 75-летию д. ф.-м. н., профессора Давида Ионовича Молдаванского [1, 2]. Среди участников конференции были ведущие математики из Москвы, Ярославля, Новосибирска и Тулы. Как признавались гости конференции, они приехали в Иваново прежде всего для того, чтобы лично поздравить юбиляра. Давид Ионович продолжает оставаться центром притяжения для специалистов в области теории групп, талантливых математиков, выпускников математического факультета.

В заключение хочется пожелать Давиду Ионовичу здоровья, новых научных результатов и успехов в творческой деятельности, которую он так любит.

Библиографический список

1. Алгоритмические проблемы в алгебре и теории вычислимости : Международная научная конференция, посвященная 75-летию Д. И. Молдаванского : сб. науч. трудов. Иваново, Иван. гос. ун-т, 2016. 89 с.
2. Международная научная конференция «Алгоритмические проблемы в алгебре и теории вычислимости», посвященная 75-летию Д. И. Молдаванского. URL: `http://math.ivanovo.ac.ru/dalgebra/mold75/mold75.html` (дата обращения: 24.11.2020).
3. *Молдаванский Д. И.* 40 лет научной логико-алгебраической школе ИвГУ: итоги и перспективы // Вестник Ивановского государственного университета. Сер.: Естественные, общественные науки. 2014. Вып. 2. С. 75—80.
4. *Молдаванский Д. И.* Комбинаторная теория групп в Ивановском государственном университете // Чебышевский сборник. 2014. Т. 15, вып. 4. С. 32—54.

УДК 519.852

А. Ф. Вялов

О МНОЖЕСТВЕ ДОПУСТИМЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

При исследовании не полностью вырожденной задачи линейного программирования в n-мерном евклидовом пространстве в статье доказано, что $(n-m)$-мерное множество допустимых решений задачи представляет собой либо выпуклый многогранник, либо усеченный конус в $(n-m)$-мерной плоскости. Доказаны возможные исходы решения задачи, используя проекцию произвольного множества точек на прямую в n-мерном евклидовом пространстве. Сформулировано необходимое и достаточное условие, при котором множество допустимых решений задачи линейного программирования пусто.

Ключевые слова: линейное программирование, оптимальное управление, оптимизация.

A. F. Vyalov

ON THE SET OF FEASIBLE SOLUTIONS OF THE LINEAR PROGRAMMING PROBLEM

At research the not completely degenerate problem of linear programming in the n-dimensional Euclidean space, it is proved in the paper that the $(n-m)$-dimensional set of feasible solutions of the problem represents either a convex polyhedron, or a blunted cone in an $(n-m)$-dimensional plane. Possible outcomes of the problem solution are proved using the projection of an arbitrary set of points to a straight line in the n-dimensional Euclidean space. The necessary and sufficient condition is formulated at which the set of feasible solutions of the linear programming problem is empty.

Key words: linear programming, optimum control, optimization.

Множество $\mathcal{M}$ допустимых решений задачи линейного программирования (ЗЛП), на котором следует отыскать минимум целевой функции

$$(\mathbf{C}, \mathbf{X}) \to \min \tag{1}$$

в евклидовом пространстве[1] E_n, есть пересечение $(n-m)$-мерной плоскости [3] $\mathcal{E}_{n-m}$, описываемой системой $m < n$ линейных уравнений

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B}, \quad \mathrm{rk}\,\mathbf{A} = m, \tag{2}$$

с n-мерным конусом $\mathcal{K}$, задаваемым системой неравенств

$$x_i \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3}$$

Множество $\mathcal{M}_0$ допустимых решений ЗЛП, если ограничение (2) — система однородных линейных уравнений, никогда не пусто: либо точка O (начало координат пространства E_n), либо конус с вершиной в точке O [1].

Далее $\mathbf{B} \neq (0, 0, \ldots, 0)$.

Числовая строка $\mathbf{C} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ определяет направление возрастания функции цели в E_n [4]. *Направление* в E_n (как и в [1]) — нормированная строка чисел[2].

Пересечение плоскости $\mathcal{E}_{n-m}$ с конусом $\mathcal{K}$ есть либо выпуклое множество (как пересечение выпуклых множеств) точек $\mathcal{M}$ в E_n размерности[3] $n-m$, либо пустое множество. Иначе говоря, $\mathcal{M} \neq \varnothing$ — фрагмент плоскости $\mathcal{E}_{n-m}$ (некая выпуклая фигура в $\mathcal{E}_{n-m}$).

Возьмем произвольную точку $\mathbf{X_0} \in \mathcal{E}_{n-m}$. Геометрически плоскость $\mathcal{E}_{n-m}$ — множество точек всевозможных прямых в E_n, направления которых принадлежат *множеству P направлений*[4] в плоскости $\mathcal{E}_{n-m}$, содержащих эту точку.

Конус $\mathcal{K}$ является множеством точек лучей в E_n, проведенных из точки O. Множество направлений, в которых можно провести луч из точки O

[1] Пространство E_n — это множество числовых строк, интерпретируемых как точки.

[2] Здесь говорится о направлении $\mathbf{C}/|\mathbf{C}|$. Интерпретируется как орт.

[3] Вообще говоря, размерность фрагмента $\mathcal{M}$ лежит в диапазоне $[0,\ n-m]$.

[4] Базис подпространства $\mathcal{E}'_{n-m}$ определяет множество P направлений в $\mathcal{E}'_{n-m}$. При сдвиге подпространства множество P не изменяется [1].

в конусе $\mathcal{K}$, обозначим L. Направление, в котором проведен луч, будем называть направлением луча.

Предложение 1. *Из любой точки* $\mathbf{X}$ *конуса* $\mathcal{K}$ *можно провести луч внутри конуса* $\mathcal{K}$ *лишь в направлении* $\mathrm{G} \in L$.

То, что из любой точки $\mathbf{X}$ конуса $\mathcal{K}$ можно провести луч внутри конуса $\mathcal{K}$ в любом из направлений $\mathrm{G} \in L$, очевидно[5]. В направлении $\mathrm{G}_1 = -\mathrm{G}$, $\mathrm{G} \in L$, луч из точки $\mathbf{X} \in \mathcal{K}$ внутри конуса $\mathcal{K}$ провести невозможно.

Пусть направление G_1 таково, что $\mathrm{G}_1 \notin L$ и $-\mathrm{G}_1 \notin L$. Точка $\mathbf{X} \in \mathcal{K}$ и прямая, содержащая направленный отрезок G_1, определяют двумерную плоскость $\mathcal{E}_2$ в E_n (см. рис. 1). Плоскость $\mathcal{E}_2$ пересекает грани конуса $\mathcal{K}$.

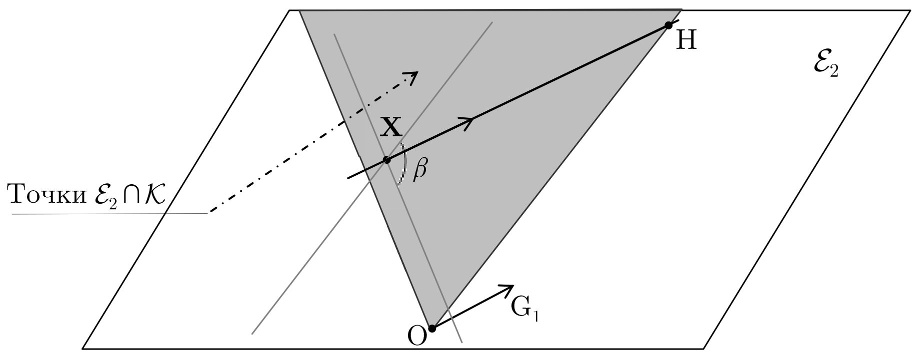


Рис. 1. Пересечение плоскости $\mathcal{E}_2$ с n-мерным конусом $\mathcal{K}$ ($n \geqslant 2$)

Через точку $\mathbf{X}$ проведем прямые, параллельные граням области пересечения плоскости $\mathcal{E}_2$ с конусом $\mathcal{K}$. Прямые пересекаются под углом β.

Луч, проведенный из точки $\mathbf{X}$ в направлении G_1, пересекает границу области конуса в точке H, так как прямая, содержащая луч, не параллельна границе области пересечения плоскости $\mathcal{E}_2$ с конусом $\mathcal{K}$.

Только у прямых, проходящих через точку $\mathbf{X}$ внутри угла β, множество P направлений не содержит направления $\mathrm{G} \in L$, они пересекают границы области конуса.

Все остальные сечения конуса аналогичны.

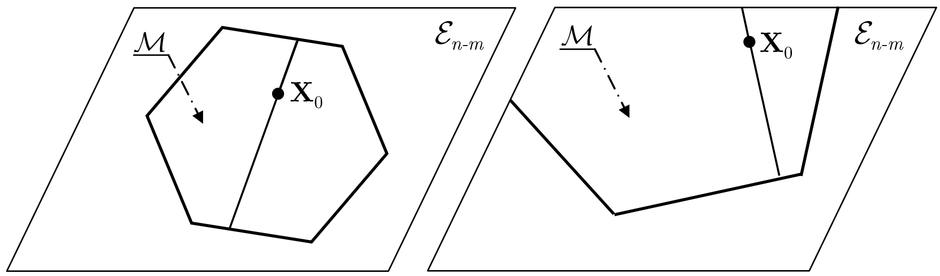
Вывод. Пересечение прямой, направления у которой $\mathrm{G}_1 \notin L$ и $-\mathrm{G}_1 \notin L$, проведенной через точку $\mathbf{X} \in \mathcal{K}$, с конусом $\mathcal{K}$ есть отрезок (либо точка, если точка $\mathbf{X}$ — точка ребра конуса $\mathcal{K}$, а прямая касается конуса лишь в точке $\mathbf{X}$).

Если множество направлений P в плоскости $\mathcal{E}_{n-m}$ не содержит ни одного направления из подмножества L множества направлений в конусе $\mathcal{K}$[6] и у плоскости $\mathcal{E}_{n-m}$ есть общая точка $\mathbf{X_0}$ с конусом $\mathcal{K}$, то (учитывая, что в каждом из направлений $\mathrm{G} \in P$ через эту точку в плоскости $\mathcal{E}_{n-m}$ можно провести прямую, а в конусе $\mathcal{K}$ лишь отрезок) выпуклый фрагмент $\mathcal{M}$ состоит из отрезков.

[5] Например, достаточно *сдвигом* построить копию конуса $\mathcal{K}$ с вершиной в точке $\mathbf{X}$. Копия не выйдет за пределы конуса $\mathcal{K}$.

[6] Множество направлений в конусе $\mathcal{K}$ совпадает с множеством направлений в E_n.

Множество концов отрезков образует грани фрагмента $\mathcal{M}$. Грани фрагмента $\mathcal{M}$ — это фрагменты плоскостей $\mathcal{E}_{n-m-1}$, получившиеся при пересечении плоскости $\mathcal{E}_{n-m}$ с гранями конуса $\mathcal{K}$. Фрагмент $\mathcal{M} \subset \mathcal{E}_{n-m}$ — выпуклый многогранник. На рис. 2-*а* приведен пример двумерного многогранника.



а) многогранник[7] б) усеченный конус

Рис. 2. Варианты $(n-m)$-мерных фрагментов $\mathcal{M}$ в плоскости $\mathcal{E}_{n-m}$ $(n = 4,\ m = 2)$

Фрагменты плоскостей $\mathcal{E}_{n-m-1}$ в плоскости $\mathcal{E}_{n-m}$, в свою очередь, есть многогранники с гранями порядка $n-m-2$. Пересечения фрагментов плоскостей $\mathcal{E}_{n-m-1}$ в углах многогранника — тоже фрагменты плоскостей $\mathcal{E}_{n-m-2}$ — грани порядка $n-m-2$ и т. д. Вершина многогранника $\mathcal{M}$ как пересечение его ребер (граней первого порядка, фрагментов плоскостей $\mathcal{E}_1$) есть грань нулевого порядка многогранника $\mathcal{M}$.

Пусть множество P направлений в плоскости $\mathcal{E}_{n-m}$ содержит направления из множества L. Тогда фрагмент $\mathcal{M}$ может быть представлен как множество лучей (из любой точки $\mathbf{X} \in \mathcal{M}$ можно провести луч во фрагменте $\mathcal{M}$ в направлении $\mathrm{G} \in L \cap P$), фрагмент $\mathcal{M}$ — усеченный конус; пример — на рис. 2-*б*.

Из того, что в E_n можно опустить перпендикуляр на подпространство [2], следует: в E_n существует ортогональная проекция множества точек на прямую $\mathcal{E}_1$, проходящую через точку O. Варианты фрагментов $\mathcal{M}$ дают возможность сделать заключение, что ортогональной проекцией в E_n фрагмента $\mathcal{M}$ на прямую $\mathcal{E}_1$, множество P направлений которой содержит направление $\mathbf{C}/|\mathbf{C}|$, может быть:

– точка; целевая функция $(\mathbf{C}, \mathbf{X}) = const$, $\mathbf{X} \in \mathcal{M}$, то есть решение ЗЛП — весь фрагмент $\mathcal{M}$;

– отрезок $[\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2}]$; точки фрагмента $\mathcal{M}$, проекциями которых является начало отрезка $\mathbf{X_1}$ (отрезок, как вектор с концом в $\mathbf{X_2}$, имеет направление $\mathbf{C}/|\mathbf{C}|$), составляют решение ЗЛП;

– луч; если направление луча совпадает с направлением $\mathbf{C}/|\mathbf{C}|$, то точки фрагмента $\mathcal{M}$, проекциями которых является начало луча, составляют решение ЗЛП, иначе ЗЛП не имеет решения $(\mathbf{C}, \mathbf{X}) \to -\infty$;

– вся прямая; ЗЛП не имеет решения $(\mathbf{C}, \mathbf{X}) \to -\infty$.

Вывод. Если целевая функция на множестве $\mathcal{M}$ не убывает неограниченно, то решение ЗЛП — либо весь фрагмент $\mathcal{M}$, либо грань фраг-

[7] Невырожденный случай.

мента $\mathcal{M}$. Грань фрагмента $\mathcal{M}$ лежит в плоскости $(\mathbf{C}, \mathbf{X}) = z$, сам фрагмент $\mathcal{M}$ расположен в полупространстве $(\mathbf{C}, \mathbf{X}) \geqslant z$. Наиболее вероятное решение ЗЛП — вершина многогранной области $\mathcal{M}$.

Предложение 2. *Если множество допустимых решений* $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{E}'_{n-m}$ *в соответствующей полностью вырожденной задаче (задаче с приведенной системой системы уравнений (2)) есть точка* O [1], *то в ЗЛП множество* $\mathcal{M}$ *пусто, когда можно построить подпространство* $\mathcal{E}'_{n-1}$, $\mathcal{E}'_{n-m} \subset \mathcal{E}'_{n-1}$, *которое делит пространство* E_n *на два полупространства таким образом, что вектор* $\mathbf{X} \notin \mathcal{E}'_{n-m}$ *сдвига подпространства* $\mathcal{E}'_{n-m}$ *и конус* $\mathcal{K}$ *лежат в разных полупространствах.*

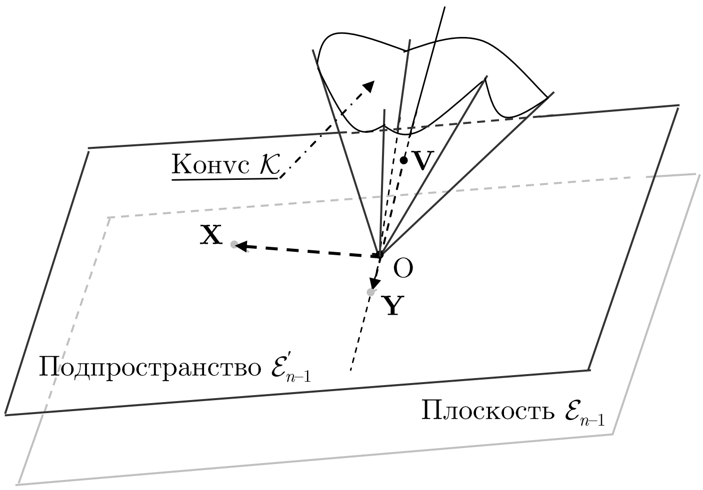


Рис. 3. Иллюстрация сдвига подпространства[8] ($n = 5$)

Пусть подпространство $\mathcal{E}'_{n-1}$ построено. После сдвига подпространства $\mathcal{E}'_{n-1}$ на вектор $\mathbf{X}$ получается плоскость $\mathcal{E}_{n-1}$. Точка $\mathbf{Y}$ — точка пересечения прямой, проведенной через точки O и $\mathbf{V} = (1, 1, \ldots, 1)$, с плоскостью $\mathcal{E}_{n-1}$. Так как точка $\mathbf{X}$ и конус $\mathcal{K}$ лежат в разных полупространствах, а $\mathcal{E}'_{n-1}$ и $\mathcal{E}_{n-1}$ параллельны, то $\mathbf{Y} = (-a, -a, \ldots, -a)$, $a > 0$.

Оценим $\mathcal{E}_{n-1}$, воспользовавшись другим частным[9] решением — числовой строкой $\mathbf{Y}$.

При сдвиге подпространства $\mathcal{E}'_{n-1}$ к каждой координатной строке точки подпространства $\mathcal{E}'_{n-1}$ прибавляется числовая строка вектора сдвига. Сдвиг точки O $(0, 0, \ldots, 0) + (-a, -a, \ldots, -a)$ приводит к точке $\mathbf{Y}$ с отрицательными координатами. При последующем вычислении сдвинутого подпространства прибавлением $(-a, -a, \ldots, -a)$ к координатным строкам любой другой точки подпространства $\mathcal{E}'_{n-1}$ невозможно получить числовую строку, состоящую из неотрицательных чисел, так как в подпространстве $\mathcal{E}'_{n-1}$ точка O — единственная точка, у которой все координаты неотрицательные. Поэтому в сдвинутом подпространстве $\mathcal{E}_{n-1}$ нет точек с неотрицательными координатами.

[8] Условное изображение подпространства [3] и конуса; на рисунке лишь ребра и пять из десяти двумерных граней конуса.

[9] Множество числовых строк $\mathcal{E}_{n-1}$ есть множество решений неоднородного линейного уравнения.

Следовательно, и в плоскости $\mathcal{E}_{n-m} \subset \mathcal{E}_{n-1}$ нет точек с неотрицательными координатами, а конус $\mathcal{K}$ состоит только из точек с неотрицательными координатами. Поэтому множество $\mathcal{M} = \mathcal{E}_{n-m} \cap \mathcal{K}$ пусто.

Предложение 3. *Если конус $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{E}'_{n-m}$ [1] в соответствующей полностью вырожденной задаче (приведенная система системы уравнений (2)) состоит только из лучей, принадлежащих грани конуса $\mathcal{K}$, то в ЗЛП множество $\mathcal{M}$ пусто, когда можно построить подпространство $\mathcal{E}'_{n-1}$, $\mathcal{E}'_{n-m} \subset \mathcal{E}'_{n-1}$, которое делит пространство E_n на два полупространства таким образом, что вектор $\mathbf{X} \notin \mathcal{E}'_{n-m}$ сдвига подпространства $\mathcal{E}'_{n-m}$ и конус $\mathcal{K}$ лежат в разных полупространствах.*

Любая точка $\mathbf{X} \notin \mathcal{M}_0$ подпространства $\mathcal{E}'_{n-m}$ имеет отрицательную координату. Хотя в множестве $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{E}'_{n-m}$ все числовые строки состоят из неотрицательных чисел, у каждой точки конуса $\mathcal{M}_0$ есть координата со значением 0, так как все лучи в конусе $\mathcal{M}_0$ принадлежат грани конуса $\mathcal{K}$. После аналогичного рассмотренному выше сдвига подпространства $\mathcal{E}'_{n-1}$ на вектор $\mathbf{Y}$ (прибавлением к координатным строкам точек подпространства $\mathcal{E}'_{n-1}$ числовой строки $(-a, -a, \ldots, -a)$) в координатных строках точек сдвинутого множества $\mathcal{M}_0$ окажутся отрицательные числа $-a$ (на местах нулей). После сдвига остальных точек $\mathcal{E}'_{n-m}$ в суммах числовых строк сохранятся отрицательные значения. Следовательно, в плоскости $\mathcal{E}_{n-m}$ нет точек с неотрицательными значениями координат, $\mathcal{M} = \varnothing$.

Если же в конусе $\mathcal{M}_0$ есть луч с направлением $\mathrm{G} \in L$, не принадлежащий грани конуса $\mathcal{K}$, то множество $\mathcal{M}$ непусто, так как луч, проведенный в E_n из любой точки $\mathbf{X} \notin \mathcal{K}$ в этом направлении, пересекает грань конуса $\mathcal{K}$.

Вывод. В ЗЛП множество $\mathcal{M}$ пусто тогда и только тогда, когда в соответствующей полностью вырожденной задаче (приведенная система системы уравнений (2)) плоскость $\mathcal{E}'_{n-m}$ касается конуса $\mathcal{K}$ по его грани, а вектор сдвига подпространства $\mathcal{E}'_{n-m}$ отодвигает подпространство $\mathcal{E}'_{n-m}$ от конуса $\mathcal{K}$.

Библиографический список

1. *Вялов А. Ф.* Симплекс-алгоритм и полностью вырожденная задача // Вестник Ивановского государственного университета. Сер.: Естественные, общественные науки. 2018. Вып. 2. С. 62–65.
2. *Гельфанд И. М.* Лекции по линейной алгебре. 5-е изд., испр. М.: Добросвет, МЦНМО, 1998. 320 с.
3. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Конечномерные линейные пространства. М.: Наука, 1969. 432 с.
4. *Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г.* Линейное программирование. М: ГИФМЛ, 1963. 775 с.