УДК 512.543

Д. И. Молдаванский

ОБ ИЗОЛЯТОРАХ КОНЕЧНО ПОРОЖДЕННЫХ ПОДГРУПП СВОБОДНЫХ ГРУПП

Хорошо известно, что в любой свободной группе изолятор произвольной конечно порожденной подгруппы является конечно порожденной подгруппой. Здесь приводится весьма простое доказательство этого утверждения.

Ключевые слова: изолированная подгруппа, изолятор подгруппы, свободная группа.

D. I. Moldavanskii

ABOUT ISOLATORS OF FINITELY GENERATED SUBGROUPS OF FREE GROUPS

It is well known that in any free group the isolator of a finitely generated subgroup is a finitely generated subgroup. A very simple proof of this statement is proposed.

Key words: isolated subgroup, isolator of subgroup, free group.

Напомним, что подгруппа H некоторой группы G называется *изолированной*, если для любого элемента g группы G и любого целого положительного числа m из включения $g^m \in H$ следует включение $g \in H$. Наименьшая из изолированных содержащих H подгрупп группы G (т. е. пересечение всех изолированных подгрупп группы G, содержащих H) называется *изолятором подгруппы* H и обозначается символом $I(H)$.

Эти понятия, введенные П. Г. Конторовичем [2], были обобщены в работе В. Н. Безверхнего [1] следующим образом.

Подгруппа H некоторой группы G называется m*-изолированной* для некоторого целого положительного числа m, если для любого элемента $g \in G$ из того, что $g^m \in H$ следует, что $g \in H$. Для произвольного непустого множества простых чисел π подгруппа H группы G называется π*-изолированной*, если она m-изолирована для каждого π-числа m (или, что равносильно, p-изолирована для каждого простого $p \in \pi$). Наименьшая из π-изолированных подгрупп группы G, содержащих H, называется π*-изолятором подгруппы* H и обозначается символом $I_\pi(H)$.

Следует отметить, что оригинальное определение π-изолированности подгрупп, сформулированное в [1], означает, в соответствии с определением, приведенным выше (и согласующимся с терминологией в современных публикациях), π'-изолированность, где π' — дополнение множества π в множестве всех простых чисел.

Справедлива следующая

Теорема. *Для любой свободной группы F и произвольного непустого множества π простых чисел π-изолятор $I_\pi(H)$ каждой конечно по-*

рожденной подгруппы H группы F является конечно порожденной подгруппой.

В случае, когда множество π содержит все простые числа (т. е. свойство π-изолированности является свойством просто изолированности), это утверждение было доказано в статье [4], в общем случае — в работе [1]. В действительности, утверждение теоремы, сформулированной выше, было лишь частью результатов этих работ, состоявших в доказательстве существования алгоритма для построения системы порождающих изолятора конечно порожденной подгруппы свободной группы. Поэтому доказательства в обеих работах были довольно сложными и связанными с установлением ряда нетривиальных свойств нильсеновского множества порождающих подгруппы свободной группы. С другой стороны, предлагаемое здесь доказательство только существования конечной системы порождающих у изолятора конечно порожденной подгруппы свободной группы является практически элементарным и требует лишь трех предварительных замечаний.

Предложение 1. *Пусть H — конечно порожденная подгруппа свободной группы F и пусть для некоторого неединичного элемента $f \in F$ и некоторого целого положительного числа m имеет место включение $f^m \in H$. Тогда ранг подгруппы K группы F, порожденной подгруппой H и элементом f, не превосходит ранга подгруппы H.*

Для доказательства этого фиксируем некоторую систему $a_1, a_2, \ldots, a_n$ свободных порождающих подгруппы H. По условию, для некоторого слова $w = w(a_i)$ от этих порождающих в группе F выполнено равенство $f^m = w$. Отметим, что поскольку $f^m \neq 1$, слово w не является пустым.

Далее, обозначим через U свободную группу с множеством свободных порождающих x_1, x_2, $\ldots$, x_n, y, и пусть V — ее подгруппа, порождаемая элементами x_1, x_2, $\ldots$, x_n. Тогда группа

$$T = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n, y;\ w(x_i) = y^m \rangle$$

является, с одной стороны, фактор-группой группы U по нормальному замыканию элемента $w(x_i)y^{-m}$, а с другой стороны — свободным произведением группы V и циклической группы, порождаемой элементом y, с объединенной циклической подгруппой, порождаемой элементом $w(x_i) = y^m$.

Пусть φ обозначает естественный гомоморфизм группы U на фактор-группу T. Очевидно, кроме того, что отображение

$$x_i \mapsto a_i \ (i = 1, 2, \ldots, n), \quad y \mapsto f$$

определяет гомоморфизм ψ группы T на подгруппу K группы F. Тогда произведение $\tau = \varphi\psi$ является эпиморфизмом группы U ранга $n+1$ на свободную группу K, ранг которой, следовательно, не превосходит числа $n+1$. Но поскольку ядро гомоморфизма τ отлично от единичной подгруппы и так как свободные группы конечных рангов хопфовы, ранг подгруппы K должен быть строго меньше числа $n + 1$. Предложение 1 доказано.

Следующее утверждение практически очевидно.

Предложение 2. *Для любого множества простых чисел π и произвольной подгруппы H некоторой группы G любая содержащая подгруп-*

пу H собственная подгруппа K π-изолятора $I_\pi(H)$ подгруппы H в группе G не является π-изолированной.

В самом деле, в противном случае было бы справедливо включение $I_\pi(H) \subseteq K$.

Третье из необходимых нам утверждение сформулировано в книге [3] (§ 2.4, задача 17) как теорема Такахаси.

Предложение 3. *В любой свободной группе возрастающая последовательность подгрупп, ранг каждой из которых не превосходит некоторого одного и того же целого числа, стабилизируется на конечном шаге.*

Переходя непосредственно к доказательству теоремы, предположим, рассуждая от противного, что π-изолятор $I_\pi(H)$ некоторой конечно порожденной подгруппы H свободной группы F не является конечно порожденной подгруппой. Покажем, что из этого предположения вытекает существование в группе F бесконечной строго возрастающей последовательности подгрупп, ранг каждой из которых не превышает ранга подгруппы H. Тем самым, с учетом предложения 3, теорема будет доказана.

Для построения такой последовательности полагаем $H_0 = H$. Так как подгруппа H_0 содержится в подгруппе $I_\pi(H)$ и конечно порождена, она не совпадает с этой подгруппой и потому, в силу предложения 2, не является π-изолированной. Поэтому существует элемент f_0, не принадлежащий подгруппе H_0 и такой, что $f_0^{m_0} \in H_0$ для некоторого положительного π-числа m_0. Поскольку тогда элемент $f_0^{m_0}$ входит в подгруппу $I_\pi(H)$ (в силу π-изолированности этой подгруппы), имеем включение $f_0 \in I_\pi(H)$. Следовательно, подгруппа H_1, порождаемая подгруппой H_0 и элементом f_0, лежит в подгруппе $I_\pi(H)$, содержит подгруппу H_0, отлична от нее и является конечно порожденной. Более того, из предложения 1 следует, что ее ранг не превосходит ранга подгруппы H_0.

Предположим, что для некоторого $r \geqslant 1$ уже построена строго возрастающая последовательность $H_0 < H_1 < \ldots < H_r$ подгрупп, лежащих в $I_\pi(H)$, ранг каждой из которых не превосходит ранга подгруппы H. Применяя к подгруппе H_r рассуждения из предыдущего абзаца, найдем элемент f_r, не принадлежащий подгруппе H_r и такой, что $f_r^{m_r} \in H_r$ для некоторого положительного π-числа m_r. Как и выше, подгруппа H_{r+1}, порожденная подгруппой H_r и элементом f_r, лежит в подгруппе $I_\pi(H)$, содержит подгруппу H_r, не совпадает с ней, и имеет ранг, не превосходящий ранга подгруппы H.

Существование последовательности с обещанными свойствами теперь доказано.

Библиографический список

1. *Безверхний В. Н.* О π-изоляторах свободной группы // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп: Межвузовск. сб. науч. тр. Тула: Тул. гос. пед. ин-т им. Л. Н. Толстого, 1990. С. 3–13.
2. *Конторович П. Г.* Группы с базисом расщепления II // Математический сборник. 1946. Т. 19 (61), № 2. С. 287–308.
3. *Магнус В., Каррас А., Солитэр Д.* Комбинаторная теория групп. М.: Наука, 1974. 456 с.
4. *McDonough T. P.* Root-closure in free groups // J. London Math. Soc. 1970. P. 191–192.