УДК 510.5

Б. Я. Солон

СЕРВИСНЫЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ И ОПЕРАТОРЫ ПЕРЕЧИСЛЕНИЯ

В данной статье формулируется понятие сервисной системы. Для таких систем определяется понятие реализуемого отношения и формулируется тезис, аналогичный тезису Тьюринга. С помощью этого тезиса доказано, что подходящая формализация понятия сервиса позволяет рассматривать системы с внешним сервисом как операторы перечисления.

Ключевые слова: операторы перечисления, частично вычислимые операторы, вычислимые операторы, сервисные системы.

B. Ya. Solon

SERVICE COMPUTING SYSTEMS AND ENUMERATION OPERATORS

In this article, the concept of a service system is formulated. For such systems, the concept of a realizable relation is defined and a thesis similar to the Turing thesis is formulated. Using this thesis, it is proved that a suitable formalization of the concept of service allows us to consider systems with an outside service as enumeration operators.

Key words: enumeration operators, partially computable operators, computable operators, service systems.

Рассмотрим вычислительную систему[1] (далее, просто систему) с (потенциально) неограниченными ресурсами (память, быстродействие и т. д.) и операционной системой, позволяющей выполнить одновременно несколько процессов. Также пусть операционная система предоставляет возможность для доступа к некоторому внешнему сервису[2], который в самом общем случае можно считать черным ящиком. При обращении к внешнему сервису с запросом о возможности выполнения некоторого действия, которое моделируется некоторым конечным набором натуральных чисел, внешний сервис может не дать ответа (т. е. ожидание ответа длится бесконечно долго) или дать ответ в виде кода — также конечного упорядоченного набора натуральных чисел. Кроме того, внешний сервис может обрабатывать несколько входов одновременно, и если даже один из входов обслуживается бесконечно долго, все равно сохраняется возможность вводить новые данные в качестве входных значений.

Пусть $\omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$ — множество натуральных чисел. Дадим ряд определений, уточняющих постановку задачи.

Определение 1. Будем говорить, что система *реализует* отношение $A \subseteq \omega^2$, если для любых $x, y \in \omega$ упорядоченная пара $(x, y) \in A$ тогда и только тогда, когда система для входа x дает в качестве выхода число y.

[1]Например, любой конечный автомат: машины Тьюринга, машины Минского или автоматы с меньшей вычислительной мощностью.

[2]Формализация понятия сервиса системы будет дана ниже.

Обозначим данную систему с возможностью доступа к некоторому внешнему сервису через Σ. В процессе обработки входа x система Σ может обращаться к другой системе (внешнему сервису) Ξ. Заметим, что для однозначности отношения, реализуемого системой Σ, достаточно того, чтобы формализация системы с внешним сервисом явно указывала, как данная система использует в своей работе внешний по отношению к ней сервис.

В качестве примера системы с внешним сервисом можно рассматривать параллельную программу, которая запускается с заданным входом x, причем вызов внешнего сервиса реализуется посредством вызова одной из внешних библиотечных функций или отдельным сервисным процессом, которые осуществляют, например, кодирование файлов. В статье автора [2] впервые была реализована идея использования операторов перечисления для формализации сервисных систем кодирования файлов с целью сжатия объема информации, содержащейся в данном файле.

По аналогии с тезисом Тьюринга, утверждающим, что класс алгоритмически вычислимых функций совпадает с классом функций, вычислимых по Тьюрингу, мы выдвигаем тезис о связи вычислительных систем с внешним сервисом и операторами перечисления, определенными на 2^ω.

Сначала дадим необходимые определения, согласованные с терминологией из монографии [1]. В дальнейшем, под множествами будем понимать подмножества ω. Зафиксируем некоторую вычислимую нумерацию множества упорядоченных пар натуральных чисел (биекцию ω^2 на ω). Пусть $\langle x, y\rangle$ — номер упорядоченной пары (x, y) в этой нумерации. Если $z = \langle x, y\rangle$, то обозначим $\langle z\rangle_1 = x$ и $\langle z\rangle_2 = y$. Пусть $A \subseteq \omega^2$, тогда *графиком* отношения A называется множество $\tau(A) = \{\langle x, y\rangle : (x, y) \in A\}$. В дальнейшем будем отождествлять бинарное отношение $A \subseteq \omega^2$ с его графиком. Далее, если $D = \{n_1, \ldots, n_k\}$ — произвольное непустое конечное множество, где $n_1 < \ldots < n_k$, то число $u = 2^{n_1} + \ldots + 2^{n_k}$ называется *каноническим индексом* конечного множества D; обозначение: $D = D_u$. По определению, $\varnothing = D_0$. В теории вычислимости выделяются множества, для которых существует эффективная (алгоритмическая) процедура для перечисления (возможно, с повторениями) их элементов. Такие множества называются *перечислимыми*. Существуют вычислимые нумерации всех перечислимых множеств. Одна из них называется *гёделевой нумерацией*, пусть $W_0, W_1, \ldots, W_s, \ldots$ — последовательность перечислимых множеств с соответствующими гёделевыми номерами. Гёделев номер s перечислимого множества W указывает на алгоритм, который перечисляет его элементы. С другой стороны, существует алгоритм, который по любому перечисляющему алгоритму определяет гёделев номер множества, которое им перечисляется. Пусть PF — множество одноместных частичных арифметических функций. Обозначим через $\operatorname{dom}\alpha$ и $\operatorname{ran}\alpha$ — область определения и множество значений функции $\alpha \in PF$, соответственно. Обозначим через $\tau(\alpha) = \{\langle x, \alpha(x)\rangle : x \in \operatorname{dom}\alpha\}$ *график* функции α. Множество A называется *однозначным*, если $A = \tau(\alpha)$ для некоторой функции α. Пусть $\tau^{-1}(X) = \{(x, y) : \langle x, y\rangle \in X\}$, тогда для однозначного множества A имеем $\tau^{-1}(A) = \alpha$, где функция α такова, что $A = \tau(\alpha)$. Обозначим через SV множество всех однозначных множеств.

Наконец, дадим определение оператора перечисления (или е-оператора от английского термина «enumeration operator»). *Е-оператором с ин-*

дексом s называется отображение $\Phi_s\colon 2^\omega \to 2^\omega$ такое, что для произвольного множества A

$$\Phi_s(A) = \big\{x : \exists u\,[\langle x, u\rangle \in W_s \wedge D_u \subseteq A]\big\}.$$

С интуитивной точки зрения, множество B получено из множества A с помощью e-оператора Φ_s (т. е. $B = \Phi_s(A)$), если некоторый алгоритм (с номером s) по любому перечислению элементов множества A дает некоторое перечисление элементов множества B.

Пусть PF — множество всех арифметических функций $\alpha\colon \omega \to \omega$, в том числе и частичных, и TF — множество тотальных функций, т. е. таких, для которых $\operatorname{dom}\alpha = \omega$. Любое однозначное отображение $\Psi\colon PF' \to PF$, ($PF' \subseteq PF$) будем называть *функциональным* оператором. Будем говорить, что функциональный оператор Ψ определяется некоторым e-оператором Φ_s, если он определен на некотором множестве $PF' \subseteq PF$ и для любой функции $\alpha \in PF'$ имеет место равенство $\Psi(\alpha) = \tau^{-1}\Phi_z(\tau(\alpha))$.

Определение 2. Функциональный оператор Ψ называется *частично вычислимым*, если он определяется некоторым e-оператором Φ_z. В этом случае будем считать, что частично вычислимый оператор Ψ имеет тот же номер, что и Φ_z, т. е. $\Psi = \Psi_z$. Множество частично вычислимых операторов обозначим через PC.

Определение 3. Частично вычислимый оператор Ψ называется *вычислимым*, если он определен на всем множестве PF.

Сформулируем тезис, который призван дать формализацию интуитивного определения вычислительной системы с внешним сервисом в терминах операторов перечисления.

Тезис. *Для любой подходящей в интуитивном смысле формализации дискретных систем с внешним сервисом, описание данной системы Σ с внешним сервисом Ξ и задание отношения $A \subseteq \omega^2$, реализуемого внешним сервисом Ξ, однозначно определяют отношение $B \subseteq \omega^2$, реализуемое системой Σ относительно A, причем оператор, который графику каждого отношения A ставит в соответствие график отношения B, реализуемого системой Σ относительно A, является e-оператором. Другими словами, при выполнении вышеуказанных условий существует такое $s \in \omega$, что $B = \Phi_s(A)$ для всех отношений A.*

Заметим, что дискретность системы с внешним сервисом предполагает, что ее состояние в каждый момент времени может быть однозначно описано некоторым конечным объектом (т. е. может быть задано, в конечном итоге, некоторым натуральным числом). В этом случае множество возможных состояний системы с внешним сервисом не более чем счетно. Если множество возможных состояний счетно, то зафиксируем какую-либо их вычислимую нумерацию.

Теперь формализуем понятие сервиса для дискретных систем с внешним сервисом.

Определение 4. *Сервисом* дискретной системы Σ называется упорядоченный набор

$$\sigma = (S, I, F, h, f, R_i, R_e, p),$$

где

S — множество возможных состояний системы;

$I, F \subseteq S$ — непустые разрешимые подмножества, содержащие *начальные* состояния и *конечные* состояния, соответственно;

$h\colon I \to \omega$, $f\colon F \to \omega$ — вычислимые функции;

$R_i, R_e \subseteq \omega \times \omega$ — перечислимые отношения;

$p\colon R_e \to \omega \times \omega$ — (частично) вычислимая функция с областью определения R_e.

Во время выполнения запроса с входом x система последовательно принимает ряд состояний, начиная с некоторого *начального* состояния, в котором она воспринимает входное значение x. Вычислимые множества I и F (т. е. множества, для которых алгоритмически разрешима проблема разрешения) моделируют возможность эффективно определить по данному состоянию, будет оно начальным или конечным. Далее, система завершает исполнение в некотором *конечном* состоянии, и тогда вычислимая функция $f\colon F \to \omega$ эффективно определяет соответствующий результат обработки запроса. Переход системы из одного состояния в другое происходит дискретно и связан с переключением одной команды на другую в программе.

Все команды можно разделить на два класса: *внутренние* и *внешние*. Внутренние команды производятся без участия внешнего сервиса (например, внутренней командой можно считать инструкцию по изменению значения переменной). Внешние команды содержат запрос к внешнему сервису и возврат результата по этому запросу.

Будем предполагать, что возможно эффективное (т. е. с помощью некоторого алгоритма) перечисление двух множеств R_i и R_e. Напомним, что R_i и R_e представляют собой множества упорядоченных пар натуральных чисел вида (s_1, s_2), где s_1 и s_2 — номера соответствующих состояний системы. Множество R_i состоит из таких пар состояний (s_1, s_2), для которых переход от s_1 к s_2 произошел в результате выполнения некоторой внутренней команды. Множество R_e состоит из таких пар состояний (s_1, s_2), для которых переход от s_1 к s_2 произошел в результате того, что когда система находилась в состоянии s_1, некоторая внешняя команда сделала запрос к внешнему сервису и внешний сервис вернул ответ на этот запрос, и при этом можно однозначно указать, какой это ответ и какой это запрос. Функция $p\colon R_e \to \omega \times \omega$ формализует это требование, давая для каждой пары состояний $(s_1, s_2) \in R_e$ пару чисел (x, y) таких, что переход от s_1 к s_2 связан с возвратом внешним сервисом числа y на запрос x.

Определение 5. Будем говорить, что пара состояний $s_1, s_2 \in S$ системы Σ образует *допустимый* шаг относительно отношения $A \subseteq \omega^2$, если

$$(s_1, s_2) \in R_i \quad \text{или} \quad (s_1, s_2) \in R_e \;\&\; p(s_1, s_2) \in A.$$

Множество всех допустимых шагов системы Σ обозначим через $Step(A)$.

Определение 6. *Конечным поведением* сервиса σ относительно произвольного отношения $A \subseteq \omega^2$ будем называть всякую конечную последовательность состояний $s_0, s_1, \ldots, s_n$, в которой $n > 0$, $s_0 \in I$, $s_n \in F$ и любая пара соседних состояний образует допустимый относительно A шаг, т. е. $(s_{i-1}, s_i) \in Step(A)$ для всех $i = 1, \ldots, n$.

Определение 7. Будем говорить, что сервис σ *реализует отношение* B *относительно* A, если для всех $x, y \in \omega$ пара $(x, y) \in B$ тогда и только тогда, когда найдется конечное поведение $s_0, \ldots, s_n \in S$ системы σ относительно A такое, что $h(s_0) = x$ и $f(s_n) = y$.

Заметим, что по нашему определению сервис является конечным объектом, поэтому можно устроить вычислимую нумерацию всех сервисов данной системы. Зафиксируем какую-либо такую нумерацию, что позволяет говорить о номере сервиса. В следующей теореме тотальные функции g рассматриваются как частный случай бинарного отношения A.

Теорема. *Для всякого сервиса σ оператор $\Psi_\sigma \colon 2^\omega \to 2^\omega$, который графику каждого отношения $A \subseteq \omega^2$ ставит в соответствие график отношения $\Psi_\sigma(A)$, реализуемого сервисом σ относительно A, является e-оператором, причем индекс этого e-оператора может быть найден эффективно по номеру сервиса. При этом существует такая вычислимая функция s, что для каждого σ (рассматриваемого как номер сервиса) $\Phi_{s(\sigma)}$ определяет вычислимый оператор Ψ'_σ такой, что $\Psi_\sigma(g) = \Psi'_\sigma(g)$ для всех тотальных функций g, принадлежащих области определения функционального оператора Ψ_σ.*

Доказательство основано на тезисе, применимость которого обусловлена описанной выше формализацией понятия сервиса. Предложенный нами тезис утверждает, что сервис σ, который графику каждого отношения $A \subseteq \omega^2$ ставит в соответствие график отношения, реализуемого сервисом σ относительно A, является e-оператором Ψ_σ. В этом случае Ψ_σ можно считать частично вычислимым функциональным оператором, определяемым e-оператором, связанным с сервисом σ. Отношение $A \subseteq \omega^2$ не обязано быть функцией, но в тех случаях, когда A является графиком некоторой функции, отношение B, которое реализуется сервисом σ относительно A, также не обязано быть функцией. Область определения функционального оператора Ψ_σ состоит из тех отношений A, которые являются функциями и для которых отношение B, которое реализуется сервисом σ относительно A, также является функцией.

Лемма 1. *Существует перечисляющий алгоритм, позволяющий из любого перечисления графика тотальной функции g получить перечисление $\tau(g)$ в естественном порядке.*

Доказательство. Пусть $\langle x_0, g(x_0)\rangle, \langle x_1, g(x_1)\rangle, \ldots, \langle x_n, g(x_n)\rangle, \ldots$ — перечисление $\tau(g)$ в произвольном порядке. Опишем оператор перечисления Φ, переводящий данное перечисление $\tau(g)$ в перечисление в естественном порядке. На вход Φ подаются элементы $\langle x_0, g(x_0)\rangle, \langle x_1, g(x_1)\rangle, \ldots$; как только появляется $\langle 0, g(0)\rangle$ — это число подается на выход, далее вновь на вход подаются элементы $\langle x_0, g(x_0)\rangle, \langle x_1, g(x_1)\rangle, \ldots$; как только появляется $\langle 1, g(1)\rangle$ — это число подается на выход и т. д.

Лемма 2. *Существует такая вычислимая функция f, что для всех $z \in \omega$*

(i) $W_{f(z)} \in SV$;
(ii) $W_{f(z)} \subseteq W_z$;
(iii) $\langle W_{f(z)}\rangle_1 = \langle W_z\rangle_1$;
(iv) $W_z \in SV \Rightarrow W_{f(z)} = W_z$.

Доказательство. Для данного z перечисляем W_z в стандартном порядке. Как только появляется новое число $\langle x, y\rangle$, проверяем, есть ли среди ранее перечисленных элементов W_z числа вида $\langle x, y\rangle$. Если да, то $\langle x, y\rangle$ удаляем, если нет, то продолжаем перечисление W_z. Описанная процедура является алгоритмом для перечисления некоторого нового множества $W_{f(z)}$, причем значение функции $f(z)$ найдено эффективно по z. По тезису Чёрча, $f(z)$ — вычислимая функция. Ясно, что $W_{f(z)}$ — однозначное множество. Остальные пункты (ii) — (iv) очевидны.

Завершим доказательство теоремы. Докажем теперь существование вычислимой функции $s(\sigma)$ такой, что $\Phi_{s(\sigma)}$ определяет вычислимый оператор Ψ'_σ, удовлетворяющий условию $\Psi_\sigma(g) = \Psi'_\sigma(g)$ для всех тотальных функций g, принадлежащих области определения частично вычислимого оператора Ψ_σ.

Из леммы 1 следует, что из любого перечисления графика тотальной функции g можно эффективно получить перечисление $\tau(g)$ в естественном порядке. Применяя к множеству $\{\langle 0, g(0)\rangle, \langle 1, g(1)\rangle, \dots\}$ е-оператор Ψ_σ, получим множество $\Psi_\sigma(\tau(g))$ в фиксированном порядке. Применим к множеству $\Psi_\sigma(\tau(g))$ процедуру, описанную в лемме 2, которая эффективна относительно фиксированного перечисления этого множества. В результате получим однозначное множество H такое, что $H \subseteq \Psi_\sigma(\tau(g))$ и $\langle H\rangle_1 = \langle \Phi_z(\tau(g))\rangle_1$.

Теперь устроим композицию четырех е-операторов:

(i) Если вход неоднозначен, то на выход композиции даем множество ω. Если вход — однозначный, этот оператор тождественен.

(ii) Преобразование однозначного входа к естественному перечислению.

(iii) Применение е-оператора Ψ_σ.

(iv) Применение процедуры образования однозначного множества.

Так как результат описанной композиции четырех е-операторов не зависит от порядка, в котором подаются элементы произвольного множества на ее вход, то она представляет собой е-оператор, причем гёделев номер этого е-оператора может быть эффективно найден по данному сервису σ. Это означает, что существует тотальная вычислимая функция s такая, что $\Phi_{s(\sigma)} \colon SV \to SV$ для любого σ.

Пусть е-оператор, заданный сервисом σ, определяет частично вычислимый оператор Ψ_σ, тогда из конструкции следует, что $\Phi_{s(\sigma)}$ определяет вычислимый оператор Ψ'_σ такой, что $\forall g\,[g \in \operatorname{dom}\Psi_\sigma \Rightarrow \Psi'_\sigma(g) = \Psi_\sigma(g)]$. Теорема доказана.

Библиографический список

1. *Роджерс Х.* Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М.: Мир, 1972. 624 с.
2. *Солон Б. Я.* Сервисные системы кодирования как операторы перечисления // Математика и приложения. Журнал Ивановского математического общества. 2013. Вып. 1 (10). С. 1—8.