МАТЕМАТИКА

УДК 517.518

А. С. Белов

ОБ ОЦЕНКЕ ОДНОЙ КЛАССИЧЕСКОЙ КОСИНУС-СУММЫ

Для сумм
$$S_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \cos(kx)$$
доказывается оценка
$$S_n(x) > -\ln \sin(x/2),$$
которая справедлива при всех $x \in (0, \pi)$ и целых
$$n \geq \frac{\pi}{2x} - \frac{1}{2}.$$
Из этой оценки вытекает неравенство Юнга и некоторые другие оценки, которые обобщают неравенство Юнга.

Суммы $S_n(x)$ являются частными суммами косинус-ряда
$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos(nx),$$
который в интервале $(0, 2\pi)$ сходится к функции $1 - \ln|2\sin(x/2)|$ и является рядом Фурье этой функции. Поэтому доказанная оценка для суммы $S_n(x)$ является естественной.

Ключевые слова: классические тригонометрические суммы, оценки частных сумм тригонометрического ряда.

A. S. Belov

ON THE ESTIMATE THE CLASSICAL COSINE-SUM

For sums
$$S_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \cos(kx),$$
the estimate
$$S_n(x) > -\ln \sin(x/2)$$
for $x \in (0, \pi)$ and integer
$$n \geq \frac{\pi}{2x} - \frac{1}{2}$$
is proved. From this estimate, the classical Young's inequality and some others estimates more general than the Young's inequality follow.

The sums $S_n(x)$ are partial sums of cosine-series
$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos(nx),$$
that, in the interval $(0, 2\pi)$, converges to the function $1 - \ln|2\sin(x/2)|$ and is the Fourier series of this function. Therefore, the proved estimate for sums $S_n(x)$ is natural.

Key words: the classical trigonometric sums, the estimates of the partial sums of trigonometric series.

1. Введение. Основной результат

Пусть задана последовательность действительных чисел $a = \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$. При всех целых неотрицательных n и действительных x через

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos(kx) \tag{1.1}$$

обозначим частные суммы косинус-ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx).$$

Пусть

$$V_n(x) = (2a_0 - a_1)\sin\Big(\frac{x}{2}\Big) + \sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k+1})\sin\Big(\Big(k+\frac{1}{2}\Big)x\Big) - a_{n+1} \tag{1.2}$$

при всех целых $n \geq 0$ и действительных x. Эти полиномы связаны с суммами (1.1) тождеством

$$2\sin\Big(\frac{x}{2}\Big)S_n(x) = V_n(x) + a_{n+1}\Big(1+\sin\Big(\Big(n+\frac{1}{2}\Big)x\Big)\Big), \tag{1.3}$$

справедливым при всех целых $n \geq 0$.

В статьях [1, 2, 3] нами изложены основные идеи нового метода доказательства неотрицательности частных сумм тригонометрического ряда с монотонными коэффициентами. Далее предполагаем, что последовательность действительных чисел $a = \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяет условиям

$$a_n \geq 0 \quad \text{и} \quad a_n \geq a_{n+1} \quad \text{при} \quad n \geq 1, \quad 2a_0 \geq a_1, \quad a_0 > 0. \tag{1.4}$$

При всех $t \in [0, +\infty)$ определим функцию

$$a(t) = \begin{cases} 2a_0 & \text{при} \quad t \in [0,\, 1/2), \\ a_n & \text{при} \quad t \in [n-1/2,\, n+1/2), \ n \geq 1. \end{cases} \tag{1.5}$$

В методе и в дальнейшем изложении важную роль играют функции

$$M(x) = M(a;x) = \int_0^{3\pi/(2x)} a(t)\cos(tx)\,dt, \qquad x > 0, \tag{1.6}$$

и

$$M_4(x) = M_4(a;x) = \int_0^{7\pi/(2x)} a(t)\cos(tx)\,dt, \qquad x > 0. \tag{1.7}$$

Функции (1.6) и полиномы (1.2) тесно связаны между собой, поскольку (см. [1, лемма 2.2])

$$x\,M(x) = V_n(x) \quad \text{при всех} \quad x \in \Big[\frac{3\pi}{2n+3}, \frac{3\pi}{2n+1}\Big] \tag{1.8}$$

для всех целых $n \geq 0$.

Введенные обозначения используются на протяжении всей этой статьи и считаются определенными, как только задана последовательность $a = \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Важность изучения функции (1.6) для исследования на неотрицательность частных сумм (1.1) становится ясной из следующей теоремы (см. [1, теорема 3.1]).

Теорема A. *Пусть последовательность* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *удовлетворяет условиям* (1.4) *и точка* $x \in (0, \pi]$ *произвольна. Тогда, если*

$$M(x) > 0, \tag{1.9}$$

то

$$S_n(x) > 0 \qquad \text{при всех} \qquad n \geq 0 \tag{1.10}$$

и

$$V_n(x) > 0 \qquad \text{при всех} \qquad n \geq \frac{3\pi}{2x} - \frac{3}{2}. \tag{1.11}$$

Более того, теорема останется верной, если одновременно в (1.9), (1.10) *и* (1.11) *знак "*$>$*" заменить на знак "*$\geq$*".*

Таким образом, как только доказано (1.9), то мы немедленно можем утверждать (1.10).

Пусть всюду далее квадратные скобки означают целую часть числа, заключенного в них. Суть нового метода доказательства неотрицательности частных сумм (1.1) состоит прежде всего в изучении функции (1.6) в окрестности нуля, т. е. в доказательстве того, что существует точка $x_0 \in (0, \pi]$, для которой $M(x) > 0$ при всех $x \in (0, x_0)$, и в нахождении такой точки x_0.

Далее функция (1.6) изучается на остальной части промежутка $(0, \pi]$ на основе равенств (1.8) и (1.2).

Поскольку (см. [1, лемма 3.1]) $M_4(x) \geq M(x)$ при всех $x > 0$, то там, где условие (1.9) не выполнено, изучается функция (1.7) на неотрицательность.

В силу теоремы A функция $S_{[3\pi/2x]}(x)$ положительна там, где верно условие (1.9). Поэтому изучаем эту функцию на неотрицательность только там, где условие (1.9) не выполнено.

Затем применяем следующие теоремы, которые доказаны в статье [2].

Теорема B. *Пусть выполнены условия* (1.4) *и точка* $x \in (0\,, \pi]$ *произвольна. Тогда, если*

$$M_4(x) > 0 \tag{1.12}$$

и

$$S_{[3\pi/2x]}(x) > 0, \tag{1.13}$$

то справедливо утверждение (1.10). *При этом теорема останется верной, если одновременно в* (1.12), (1.13) *и* (1.10) *знак "*$>$*" заменить на знак "*$\geq$*".*

Следующая теорема является дополнительной к теореме B.

Теорема C. *Пусть выполнены условия* (1.4), *точка* $x \in (0, \pi]$ *произвольна и справедливо условие* (1.12). *Пусть* $M(x) = 0$. *Тогда*

a) если число $3\pi/2x - 1/2$ *не целое, то верно утверждение* (1.10);

b) если число $N = 3\pi/2x - 1/2$ *целое, то* $S_N(x) = 0$ *и при всех целых* $n \geq 0$, $n \neq N$, *сумма* $S_n(x) > 0$.

Теоремы A, B и C во многих случаях сводят доказательство неотрицательности частных сумм (1.1) к исследованию трех функций (1.6), (1.7) и $S_{[3\pi/2x]}$.

Отметим, что для проверки условий теоремы B иногда удобнее сначала доказать, что справедливо утверждение $M_4(x) - S_{[3\pi/2x]}(x) \geq 0$, и отсюда и из (1.13) уже выводить условие (1.10).

При всех натуральных n будем пользоваться обозначением

$$\nu_n = \sum_{k=0}^{m} a_k - \sum_{k=m}^{n-1} a_k - \frac{1}{3}\,(6m+1-2n)\,a_m, \qquad \text{где} \qquad m = \Big[\frac{n+1}{3}\Big].$$

Ясно (см. также [2]), что $\nu_1 = a_0/3$ и

$$\nu_{n+1} - \nu_n = \frac{2}{3}\,a_{[(n+1)/3]} - a_n \qquad \text{при всех} \qquad n \geq 1.$$

В [2] получена следующая теорема.

Теорема D. *Пусть последовательность $a = \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяет условиям (1.4), условиям*

$$a_0 \geq a_1, \qquad 2a_0 + a_1 \geq 4a_2,$$

и условию

$$\nu_n \geq 0 \qquad \textit{при всех} \qquad n \geq 5.$$

Тогда при всех $x \in (0, \pi)$ верны утверждения (1.9), (1.10) и (1.11).

В частности, если невозрастающая последовательность неотрицательных чисел $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяет условиям

$$a_0 > 0, \qquad 2a_0 + a_1 \geq 4a_2, \qquad a_0 + a_1 \geq a_2 + a_3 + a_4$$

и

$$2a_n \geq 3a_{3n-1} \qquad \textit{при всех} \qquad n \geq 2,$$

то при всех $x \in (0, \pi)$ верны утверждения (1.9), (1.10) и (1.11).

В этой статье мы будем всюду далее рассматривать конкретную последовательность $a_0 = 1$, $a_n = 1/n$ при всех $n \geq 1$. Все введенные выше обозначения далее считаются определенными для этой конкретной последовательности. Тогда

$$2a_n - 3a_{3n-1} = \frac{3n-2}{(3n-1)\,n} > 0$$

при всех $n \geq 1$. Следовательно, условия теоремы D выполнены и, значит, $M(x) > 0$ при всех $x \in (0, \pi)$. Поэтому верно (1.10) при всех $x \in (0, \pi)$, то есть частным случаем теоремы D является результат Юнга [9] (см. также [5, отдел 6, задачи 26, 27, 28]), который обобщался в [6, 7, 8] (см. также цитированную в них литературу).

Таким образом, в этой статье мы применим метод к суммам

$$S_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\,\cos(kx), \tag{1.14}$$

которые являются частными суммами косинус-ряда

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\,\cos(nx). \tag{1.15}$$

В результате будут получены новые оценки, которые показывают эффективность метода.

В этом случае

$$a(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{[t+1/2]} & \text{при} \quad t \geq \dfrac{1}{2}, \\ 2 & \text{при} \quad t \in \left[0,\, \dfrac{1}{2}\right). \end{cases}$$

Таким образом,

$$a(t) = \frac{1}{k} \quad \text{при} \quad t \in [k - 1/2,\, k + 1/2)$$

для всех $k \geq 1$. Отсюда и из (1.14) следует (см. [1, формула 2.12])

$$2\,\sin(x/2)\,S_n(x) = x \int_0^{n+1/2} a(t)\,\cos(tx)\,dt \quad \text{при всех} \quad n \geq 0,$$

и для всех $x > 0$ и целых $n \geq 0$ верна оценка

$$2\,\sin(x/2)\,S_n(x) \geq xM(x), \quad \text{если} \quad n + 1/2 \geq \pi/(2x). \tag{1.16}$$

Справедлива также оценка

$$2\,\sin(x/2)\,S_n(x) \geq xM_4(x), \quad \text{если} \quad n + 1/2 \geq 5\pi/(2x).$$

Положим

$$H(x) = \frac{xM(x)}{2\,\sin(x/2)} \quad \text{при} \quad x \in (0,\, 2\pi). \tag{1.17}$$

Основными являются следующие две теоремы.

Теорема 1.1. *Функции $H(x)$ и $H(x) + \ln\sin(x/2)$ строго убывают и положительны на интервале $(0,\, \pi)$, а при $x = \pi$ обращаются в нуль. В частности,*

$$H(x) > -\ln\sin(x/2) \quad \textit{при всех} \quad x \in (0,\, \pi). \tag{1.18}$$

Теорема 1.2. *Для любого $v \in (0, \pi]$ и для каждого целого*

$$n \geq \frac{\pi}{2v} - \frac{1}{2} \tag{1.19}$$

верны оценки

$$S_n(x) > H(v) \qquad \textit{при всех} \quad x \in (0,\, v), \tag{1.20}$$

$$S_n(x) > -\ln\sin(v/2) \quad \textit{при всех} \quad x \in (0,\, v). \tag{1.21}$$

В частности, справедлива оценка

$$S_n(x) > -\ln\sin(x/2) \quad \textit{при всех} \quad x \in (0,\, \pi) \quad \textit{и} \quad n \geq \frac{\pi}{2x} - \frac{1}{2}. \tag{1.22}$$

Заметим, что ряд (1.15) является (см. [4, гл. 1, формула 2.8, гл. 7, формула 2.2]) рядом Фурье функции $1 - \ln|2\sin(x/2)|$ и сходится к этой функции равномерно на каждом сегменте, содержащемся в интервале $(0,\, 2\pi)$. Поэтому оценка (1.22) для суммы (1.14) является естественной.

Теорема 1.3. *Для любого натурального числа m и для каждого целого*

$$n \geq \frac{m-1}{3} \tag{1.23}$$

верна оценка

$$S_n(x) > S_m\Big(\frac{3\pi}{2m+1}\Big) \quad \textit{при всех} \quad x \in \Big(0,\, \frac{3\pi}{2m+1}\Big). \tag{1.24}$$

В частности, справедлива оценка

$$S_n(x) > \frac{19}{24} \quad \textit{при всех} \quad x \in (0,\, \pi/3) \quad \textit{и} \quad n \geq 1. \tag{1.25}$$

Теоремы 1.1, 1.2, 1.3 и некоторые их следствия будут доказаны в следующем разделе. А в разделе 3 приведены без доказательства некоторые другие теоремы о суммах (1.14), которые также получаются из доказанных теорем с использованием излагаемого нового метода.

Теперь перейдем к доказательствам сформулированных выше результатов.

2. Доказательства теорем 1.1, 1.2, 1.3 и некоторых их следствий

Доказательство теоремы 1.1.

Функции $M(x)$, $H(x)$ и $H(x)+\ln\sin(x/2)$ имеют первые непрерывные производные на интервале $(0,\, 2\pi)$ и при $x = \pi$ обращаются в нуль. Возьмем любое натуральное n и докажем, что первые производные функций $H(x)$ и $H(x) + \ln\sin(x/2)$ строго отрицательны при

$$x \in \Big(\frac{3\pi}{2n+3},\, \frac{3\pi}{2n+1}\Big). \tag{2.1}$$

Действительно, при условии (2.1) из (1.17), (1.3) и (1.8) имеем

$$H(x) = S_n(x) - \frac{1+\sin\big((n+1/2)\,x\big)}{2\,(n+1)\,\sin(x/2)}. \tag{2.2}$$

Отсюда

$$H'(x) = -\sum_{k=1}^{n}\sin(kx) - \frac{(n+1/2)\,\cos\big((n+1/2)\,x\big)}{2\,(n+1)\,\sin(x/2)} + \\ + \frac{\cos(x/2)\,\big(1+\sin\big((n+1/2)\,x\big)\big)}{4\,(n+1)\,\sin^2(x/2)}.$$

Используя известную формулу для сопряженного ядра Дирихле (см. [4, гл. 1, п. 1]), получим

$$H'(x) = \frac{\cos\big((n+1/2)\,x\big)}{4\,(n+1)\,\sin(x/2)} - \frac{\cos(x/2)}{2\,\sin(x/2)} + \frac{\cos(x/2)\,\big(1+\sin\big((n+1/2)x\big)\big)}{4\,(n+1)\,\sin^2(x/2)}.$$

Таким образом,

$$H'(x) = \frac{\cos(x/2)+\sin\big((n+1)\,x\big)}{4\,(n+1)\,\sin^2(x/2)} - \frac{\cos(x/2)}{2\,\sin(x/2)}, \tag{2.3}$$

$$\big(H(x)+\ln\sin(x/2)\big)' = \frac{\cos(x/2)+\sin\big((n+1)\,x\big)}{4\,(n+1)\,\sin^2(x/2)}. \tag{2.4}$$

Из условия (2.1) вытекает, что $(2n+1)x < 3\pi$ и $(2n+3)x > 3\pi$, то есть

$$-x < (2n+2)x - 3\pi < x.$$

Поэтому

$$\cos(x/2) + \sin\big((n+1)\,x\big) = \cos(x/2) - \cos\big(|(2n+2)\,x - 3\pi|/2\big) < 0.$$

Следовательно, при

$$x \in \Big[\frac{3\pi}{2n+3},\, \frac{3\pi}{2n+1}\Big) \tag{2.5}$$

производная (2.3) функции $H(x)$ строго отрицательна, а при условии (2.1) строго отрицательна и производная (2.4). Поэтому функции $H(x)$ и $H(x)+\ln\sin(x/2)$ строго убывают и положительны на интервале $(0,\,\pi)$. Теорема 1.1 доказана.

Доказательство теоремы 1.2.

Из (1.17) и (1.16) следует, что для всех $x \in (0,\,2\pi)$ и целых $n \geq 0$ верна оценка

$$S_n(x) \geq H(x) \quad \text{при} \quad n + 1/2 \geq \pi/(2x). \tag{2.6}$$

Возьмем любые $v \in (0,\,\pi]$ и целое n, которое удовлетворяет условию (1.19). Тогда при $x \in (0,\,v)$ из (2.6) и теоремы 1.1 имеем

$$S_n(x) \geq H(x) > H(v) \quad \text{при} \quad x \geq \pi/(2n+1).$$

Если $x \in [0,\,\pi/(2n+1)]$, то сумма (1.14) при $n \geq 1$ строго убывает, а при $n = 0$ постоянна. Поэтому

$$S_n(x) \geq H\big(\pi/(2n+1)\big) > H(v) \quad \text{при} \quad x < \pi/(2n+1).$$

Значит,

$$S_n(x) > H(v) \quad \text{при} \quad x \in (0,\,v)$$

и оценка (1.20) доказана. Отсюда и из (1.18) вытекает оценка (1.21), и из (2.6) следует оценка (1.22). Теорема 1.2 доказана.

Доказательство теоремы 1.3.

Возьмем любое натуральное число m и в теореме 1.2 положим

$$v = \frac{3\pi}{2m+1}.$$

Тогда (1.19) запишется как (1.23). Из (2.2) сразу вытекает, что в этом случае

$$H(v) = S_m\Big(\frac{3\pi}{2m+1}\Big).$$

Поэтому (1.20) запишется как (1.24). При $m = 4$ получим (1.25), поскольку

$$S_4(\pi/3) = \frac{19}{24}.$$

Теорема 1.3 доказана.

Заметим, что теорема 1.3 при $m = 1$, или, что то же самое, теорема 1.2 при $v = \pi$, дает неравенство Юнга.

Как следствия теорем 1.1, 1.2 и 1.3 получаем следующие две теоремы.

Теорема 2.1. *Для любого натурального числа n при всех*

$$x \in \Big(0,\,\frac{3\pi}{13}\Big)$$

верна оценка

$$S_n(x) > S_6\Big(\frac{3\pi}{13}\Big) = 1{,}140496\ldots \tag{2.7}$$

Доказательство. В теореме 1.3 положим $m = 6$. Поскольку
$$S_6(3\pi/3) = 1{,}140496\ldots,$$
то получим (2.7) при $n \geq 2$. При $n = 1$ (2.7) вытекает из того, что
$$S_1(3\pi/3) > S_6(3\pi/3).$$
Теорема 2.1 доказана.

Теорема 2.2. *Для любого натурального числа n при всех*
$$x \in \left(0,\, \frac{\pi}{4}\right)$$
верна оценка
$$S_n(x) > H\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1{,}063407\ldots \tag{2.8}$$

Доказательство. В теореме 1.2 положим $v = \pi/4$. Тогда из (2.2), где $n = 5$, получим
$$H(\pi/4) = S_5(\pi/4) - \frac{1 + \sin(11\pi/8)}{12\,\sin(\pi/8)} = 1{,}063407\ldots$$
Поэтому при $n \geq 2$ верно (2.8). Поскольку
$$S_1(\pi/4) > H(\pi/4),$$
то получим (2.8) и при $n = 1$. Теорема 2.2 доказана.

Таким образом, при $x \in (0,\, 3\pi/13)$ можно использовать оценку (2.7), а при $x \in [3\pi/13,\, \pi/4)$ лучше использовать оценку (2.8).

3. О некоторых оценках, связанных с суммами (1.14)

В этом разделе приведены без доказательства некоторые другие оценки, связанные с суммами (1.14), которые получаются из доказанных выше теорем с использованием излагаемого метода.

Пусть $z_1 \in (7\pi/10,\, 3\pi/4)$ — единственная точка в этом интервале, в которой $S_4(z_1) = S_2(z_1)$. Тогда
$$z_1 = 2,336478908\ldots = \frac{\pi}{1,3445842\ldots}.$$

Пусть $z_2 \in (3\pi/4,\, 7\pi/8)$ — единственная точка в этом интервале, в которой $S_4(z_2) = S_1(z_2)$. Тогда
$$z_2 = 2,3990386\ldots = \frac{\pi}{1,30952\ldots}.$$

Пусть $v_0 \in (\pi/4,\, 3\pi/10)$ — единственная точка в этом интервале, в которой $S_5(v_0) = S_0(v_0)$. Тогда
$$v_0 = 0,8398964\ldots = \frac{\pi}{3,740452\ldots}.$$

Теорема 3.1. *Для любого $x \in (0, \pi]$ функция*
$$G_1(x) = \min_{n \geq [\pi/2x]} S_n\,(x)$$
равна
$$\begin{array}{lll} S_{[3\pi/2x]}\,(x) & \textit{при} & x \in (0,\, z_1] \cup [z_2,\, \pi], \\ S_{[7\pi/2x]}\,(x) & \textit{при} & x \in [z_1,\, z_2]. \end{array}$$

В частности, на отрезке $[0,\,\pi]$ *функция* $\min_{n\ge 0} S_n(x)$ *равна*

$$\begin{array}{lll} S_0(x) & \text{при} & x\in[0,\,v_0],\\ S_5(x) & \text{при} & x\in[v_0,\,3\pi/10],\\ S_4(x) & \text{при} & x\in[3\pi/10,\,3\pi/8],\\ S_3(x) & \text{при} & x\in[3\pi/8,\,\pi/2],\\ S_2(x) & \text{при} & x\in[\pi/2,\,z_1],\\ S_4(x) & \text{при} & x\in[z_1,\,z_2],\\ S_1(x) & \text{при} & x\in[z_2,\,\pi]. \end{array}$$

Заметим, что теоремы 1.1, 1.2 и 3.1 для любого $m\ge 0$ при использовании излагаемого метода позволяют на отрезке $[0,\,\pi]$ найти функции $\min_{n\ge m} S_n(x)$ и $\max_{n\ge m} S_n(x)$, но с увеличением m возрастает и объем вычислений. Например, при $m=1$ получается следующий результат.

Пусть $v_1\in(\pi/10,\,3\pi/28)$ — единственная точка в этом интервале, в которой $S_{14}(v_1)=S_1(v_1)$. Тогда

$$v_1=0,318587203\ldots=\frac{\pi}{9,8610133\ldots}.$$

Теорема 3.2. *Для любого* $x\in[0,\pi]$ *функция*

$$\min_{n\ge 1} S_n(x)$$

равна

$$\begin{array}{llll} S_1(x) & \text{при} & x\in[0,\,v_1], & \\ S_{14}(x) & \text{при} & x\in[v_1,\,3\pi/28], & \\ S_n(x) & \text{при} & x\in[3\pi/(2n+2),\,3\pi/(2n)], & n=3,\,4,\,\ldots,\,13,\\ S_2(x) & \text{при} & x\in[\pi/2,\,z_1], & \\ S_4(x) & \text{при} & x\in[z_1,\,z_2], & \\ S_1(x) & \text{при} & x\in[z_2,\,\pi]. & \end{array}$$

Конечно, полученные оценки неулучшаемы.

Библиографический список

1. *Белов А. С.* О примерах тригонометрических рядов с неотрицательными частными суммами // Математический сборник. 1995. Т. 186, № 4. С. 21–46.
2. *Белов А. С.* Об одном методе доказательства неотрицательности всех частных сумм тригонометрического ряда // Вестник Ивановского государственного университета. Сер.: Биология, Химия, Физика, Математика. 2007. Вып. 3. С. 60–71.
3. *Белов А. С.* Исследование положительности всех частных сумм тригонометрического ряда в окрестности нуля // Вестник Ивановского государственного университета. Сер.: Биология, Химия, Физика, Математика. 2008. Вып. 2. С. 63–80.
4. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. Т. 1. М.: Мир, 1965. 615 с.
5. *Полиа Г., Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа. Ч. 2. М.: Наука, 1978. 432 с.
6. *Fong J. Z. Yi., Lee T. Y., Rao R. N., Wong P. X.* A functional bound for Young's cosine polynomial II // Publ. Math. Debrecen. 2020. Vol. 96, № 3–4. P. 445–457.
7. *Gasper G.* Nonnegative sums of cosine, ultraspherical and Jacobi polynomials // J. Math. Anal. Appl. 1969. Vol. 26. № 1. P. 60–68.
8. *Rogosinski W., Szegö G.* Über die Abschnitte von Potenzreichen, die in einem Kreise beschrankt bleiben // Math. Zeit. 1928. Vol. 28. P. 73–94.
9. *Young W. H.* On a certain series of Fourier // Proc. Lond. Math. Soc. 1912. Vol. 11. P. 357–366.