УДК 517.5

Л. Н. Кусковский

О ПРОИЗВОДНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ

В вещественном (комплексном) линейном пространстве получены рекуррентные формулы, позволяющие находить частные производные любого порядка от фундаментального решения уравнения Лапласа.

Ключевые слова: оператор Лапласа, оператор Коши — Римана, рекуррентные формулы.

L. N. Kuskovskii

ON THE DERIVATIVES OF POTENTIALS

In a real (complex) linear space, we obtain recurrent formulas that allow us to find partial derivatives of any order from the fundamental solution of the Laplace equation.

Key words: Laplace operator, Cauchy — Riemann operator, recurrence formulas.

Решения многих задач математической физики, дифференциальных уравнений в частных производных, сингулярных интегральных уравнений связаны с нахождением частных производных различных порядков. В настоящей статье мы установим рекуррентные формулы, позволяющие находить производные любого порядка для классических потенциалов.

1. Вещественный случай

Будем использовать следующие обозначения:

$\mathbb{R}^n$ — n-мерное (n — натуральное число) евклидово пространство;

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ — произвольные точки $\mathbb{R}^n$;

$(x, \xi) = x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + \ldots + x_n\xi_n$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$;

$r = |x - \xi| = \left[(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + \ldots + (x_n - \xi_n)^2\right]^{\frac{1}{2}}$ — расстояние между точками x и ξ;

$\Delta \equiv \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ — оператор Лапласа.

Рассмотрим функцию

$$V(x - \xi) = \frac{1}{|x - \xi|^m} = \frac{1}{r^m}, \tag{1.1}$$

где m — любое натуральное число, $x \neq \xi$. Нетрудно найти

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{r^m}\right) = -\frac{m(x_j - \xi_j)}{r^{m+2}}, \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\left(\frac{1}{r^m}\right) = -\frac{m}{r^{m+2}} + \frac{m(m+2)(x_j - \xi_j)^2}{r^{m+4}}. \tag{1.3}$$

Отсюда и из (1.3) имеем

$$\Delta V(x-\xi)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\left(\frac{1}{r^m}\right)=-\frac{mn}{r^{m+2}}+\frac{m(m+2)}{r^{m+4}}\sum_{j=1}^{n}(x_j-\xi_j)^2=$$
$$=\frac{m}{r^{m+2}}[-n+m+2]. \quad (1.4)$$

Из (1.4) сразу следует, что при $m=n-2$, $n\geqslant 3$ функция (1.1) является решением уравнения Лапласа, т. е. $\Delta V(x-\xi)=0$, $x\neq\xi$.

Функция $V(x-\xi)=\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}$, $x\neq\xi$, $n\geqslant 3$, называется *сингулярным решением* уравнения Лапласа [3, с. 226]. Напомню

Определение. Функция $v(x)$ называется *гармонической* в конечной области $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, если она дважды непрерывно дифференцируема в Ω и удовлетворяет уравнению Лапласа.

Гармоническая в $\mathbb{R}^n\setminus(x=\xi)$ функция

$$V(x-\xi)=\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}},\quad n\geqslant 3,$$

называется *фундаментальным решением* уравнения Лапласа [2, с. 233]. В смысле обобщенных функций это означает, что данная функция удовлетворяет уравнению

$$\Delta V(x-\xi)=-(n-2)\sigma_n\delta(x-\xi),$$

где $\sigma_n=\frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$ — площадь поверхности $(n-1)$-мерной единичной сферы, δ — функция Дирака [7, с. 45–46], $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция Эйлера [5, с. 753].

Теорема. *Для $k=2\gamma$ или $k=2\gamma+1$ (k, γ — натуральные числа) имеем*

$$\frac{\partial^k}{\partial x_j^k}\big(V(x-\xi)\big)=\frac{\partial^k}{\partial x_j^k}\left(\frac{1}{r^m}\right)=\sum_{h=0}^{\gamma}a_h^k t_{k-h}(x_j-\xi_j)^{k-2h},\quad j=1,\,2,\,\ldots,\,n, \quad (1.5)$$

где

$$t_k=(-1)^k\frac{m(m+2)\ldots(m+2(k-1))}{r^{m+2k}},\quad m=1,\,2,\,\ldots,$$

$a_0^k=1$, a_h^k *— постоянные, вычисляемые по рекуррентным формулам:*

$$\begin{aligned}&a_h^{k+1}=a_h^k+a_{h-1}^k(k-2h+2),\quad h=1,\,2,\,\ldots,\,\gamma,\\&a_{\gamma+1}^{k+1}=a_\gamma^k(k-2\gamma).\end{aligned} \quad (1.6)$$

Доказательство. При $k=1$ и $k=2$ формула (1.5) справедлива, так как в силу (1.2) и (1.3) имеем

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(r^{-m})=a_0^1t_1(x_j-\xi_j),$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}(r^{-m})=a_0^2t_2(x_j-\xi_j)^2+a_1^2t_1.$$

Теперь, учитывая, что $\frac{\partial}{\partial x_j}(t_k) = t_{k+1}(x_j - \xi_j)$, и предположив, что формула (1.5) справедлива для некоторого k, получим

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^{k+1}}{\partial x_j^{k+1}}\left(\frac{1}{r^m}\right) = \sum_{h=0}^{\gamma} a_h^k t_{k+1-h}(x_j-\xi_j)^{k+1-2h} +& \\
+ \sum_{h=0}^{\gamma} a_h^k (k-2h) t_{k-h}(x_j-\xi_j)^{k-2h-1} =& \\
= a_0^k t_{k+1}(x_j-\xi_j)^{k+1} +& \\
+ \left[a_0^k k + a_1^k\right] t_k (x_j-\xi_j)^{k-1} +& \\
+ \left[a_1^k (k-2) + a_2^k\right] t_{k-1} (x_j-\xi_j)^{k-3} +& \\
+ \left[a_2^k (k-4) + a_3^k\right] t_{k-2} (x_j-\xi_j)^{k-5} +& \\
\ldots& \\
+ \left[a_{\gamma-1}^k (k+2-2\gamma) + a_\gamma^k\right] t_{k+1-\gamma} (x_j-\xi_j)^{k+1-2\gamma} +& \\
+ a_\gamma^k (k-2\gamma) t_{k-\gamma} (x_j-\xi_j)^{k-2\gamma-1}.&
\end{aligned}$$

Отсюда, представив выражения в квадратных скобках согласно (1.6), получим

$$\frac{\partial^{k+1}}{\partial x_j^{k+1}}\left(\frac{1}{r^m}\right) = \sum_{h=0}^{\gamma+1} a_h^{k+1} t_{(k+1)-h}(x_j-\xi_j)^{k+1-2h}, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

что, согласно методу математической индукции, и доказывает теорему.

2. Комплексный случай

Далее используются следующие обозначения:

$\mathbb{C}^n$ — n-мерное комплексное пространство ($n = 1, 2, \ldots$);

$z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$, $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$, где $z_j = x_j + iy_j$, $\zeta_j = \xi_j + i\eta_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$, $i^2 = -1$, — точки $\mathbb{C}^n$;

$\langle z, \zeta\rangle = (z, \overline{\zeta}) = z_1\overline{\zeta_1} + z_2\overline{\zeta_2} + \ldots + z_n\overline{\zeta_n}$ — эрмитово скалярное произведение в $\mathbb{C}^n$;

$|z| = \sqrt{\langle z, z\rangle}$ — норма вектора z;

$$\begin{aligned}
R = |z-\zeta| = \left[|z_1-\zeta_1|^2 + |z_2-\zeta_2|^2 + \ldots + |z_n-\zeta_n|^2\right]^{\frac{1}{2}} =& \\
= \left[(z_1-\zeta_1)\overline{(z_1-\zeta_1)} + \ldots + (z_n-\zeta_n)\overline{(z_n-\zeta_n)}\right]^{\frac{1}{2}}&
\end{aligned}$$

— расстояние между точками z и ζ ($z \neq \zeta$).

Здесь при дифференцировании удобно пользоваться операторами Коши — Римана [1, с. 105; 6, с. 21–25]:

$$\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z_j}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\frac{\partial}{\partial y_j}\right), \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Рассмотрим функцию

$$U(z-\zeta) = \frac{1}{|z-\zeta|^m} = \frac{1}{R^m} = \left[\sum_{j=1}^{n}(z_j-\zeta_j)\overline{(z_j-\zeta_j)}\right]^{-\frac{m}{2}}, \quad m = 1, 2, \ldots \quad (2.1)$$

и оператор

$$\Delta \equiv 4\left[\frac{\partial^2}{\partial\overline{z_1}\partial z_1}+\frac{\partial^2}{\partial\overline{z_2}\partial z_2}+\ldots+\frac{\partial^2}{\partial\overline{z_n}\partial z_n}\right] \tag{2.2}$$

— классический оператор Лапласа (лапласиан) [4, с. 17] в пространстве $\mathbb{C}^n$ (или в $2n$-мерном пространстве $\mathbb{R}^{2n}$). Имеем

$$\frac{\partial}{\partial z_j}\left(\frac{1}{|z-\zeta|^m}\right)=\frac{\partial}{\partial z_j}\left[\sum_{j=1}^{n}(z_j-\zeta_j)\overline{(z_j-\zeta_j)}\right]^{-\frac{m}{2}}=-\frac{m}{2}\frac{1}{R^{m+2}}\overline{(z_j-\zeta_j)}. \tag{2.3}$$

В силу (2.3) получаем

$$\frac{\partial^2}{\partial\overline{z_j}\partial z_j}\left(\frac{1}{|z-\zeta|^m}\right)=\frac{m(m+2)}{4}\frac{|z_j-\zeta_j|^2}{R^{m+4}}-\frac{m}{2}\frac{1}{R^{m+2}}.$$

Отсюда и из (2.2)

$$\Delta\left(\frac{1}{R^m}\right)=4\left[\frac{m(m+2)}{4}\frac{1}{R^{m+4}}\sum_{j=1}^{n}|z_j-\zeta_j|^2-\frac{nm}{2}\frac{1}{R^{m+2}}\right]=$$
$$=\frac{m}{R^{m+2}}\big[(m+2)-2n\big],$$

откуда сразу следует, что при $m=2n-2$, $z\neq\zeta$, функция (2.1) является гармонической в любой ограниченной области $\Omega\subset\mathbb{C}^n$.

Библиографический список

1. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1967. 436 с.
2. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976. 392 с.
3. *Михлин С. Г.* Курс математической физики. М.: Наука, 1968. 576 с.
4. *Рудин У.* Теория функций в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$. Пер. с англ. М.: Мир, 1984. 456 с.
5. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. 7-е изд. М.: Наука, 1969. 800 с.
6. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. Часть 2. Функции нескольких переменных. 2-е изд., перераб. и допол. М.: Наука, 1976. 400 с.
7. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Второй специальный курс. 2-е изд., перераб. М.: Изд-во МГУ, 1984. 208 с.

УДК 512.543

Е. Д. Логинова, Д. И. Молдаванский

О СВОБОДНЫХ ПОДГРУППАХ И ЦЕНТРЕ *HNN*-РАСШИРЕНИЯ ГРУПП

Получены условия отсутствия нециклических свободных подгрупп в HNN-расширениях групп и нетривиальности центра HNN-расширений.

Ключевые слова: HNN-расширения групп, свободная группа, центр группы.